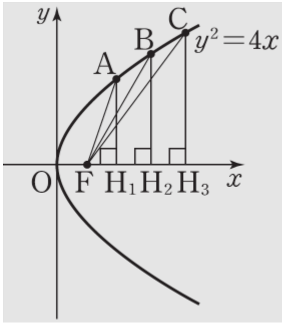
1) 이차곡선 <EBS수능특강변형>

1. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$이라고 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{FA}}=3$, $\overline{\mathrm{FB}}=4$, $\overline{\mathrm{FC}}=5$일 때, 세 삼각형 $\mathrm{AFH_1}$, $\mathrm{BFH_2}$, $\mathrm{CFH_3}$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라고 하자. ${S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2$의 값은?



(단, 세 점 A, B, C는 제 1 사분면 위의 점이다.)

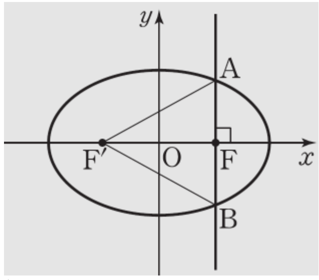
① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

2. 준선이 $y=-2$인 포물선 $x^2=ay$가 있다. 이 포물선이 점 $(6,\ k)$를 지날 때, $10(a+k)$의 값을 구하시오 (단, a는 상수이다)

3. 두 포물선 $(y-1)^2=a(x+3)$, $(x+2)^2=-8(y-b)$의 초점이 일치할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

4. 그림과 같이 두 초점이



$\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2\sqrt{3},\ 0)$인 타원이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 할 때, 삼각형 AF′B는 정삼각형이다. 이때 타원의 단축의 길이는?

① 8 ② $6\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{22}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

5. 곡선 $x^2-3xy+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

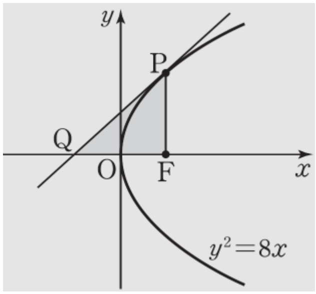
6. 곡선 $ax^2+\sqrt{y}=b$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -2일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

7. 곡선 $x^2-2y^2=1$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by-1=0$이다. 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

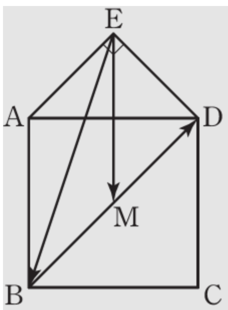
① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

8. 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, 삼각형 PQF의 넓이는?



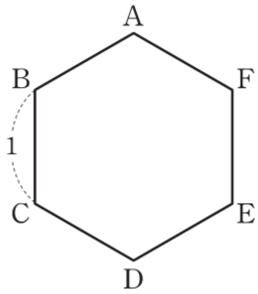
① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

9. 그림과 같이 한 평면 위에 정사각형 ABCD와 $\angle \mathrm{AED}=90°$인 직각이등변삼각형 ADE가 있다. 선분 BD의 중점을 M이라 하고 $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=2$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{EB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|$의 값은?



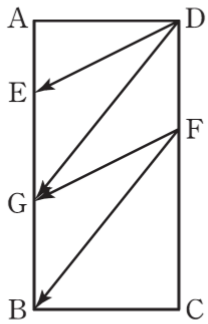
① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $\sqrt{14}$　⑤ 4

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$와 같고 시점이 F인 벡터의 종점을 G라고 하자. 또 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$와 같고 시점이 E인 벡터의 종점을 H라고 하자. 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|$의 값은?

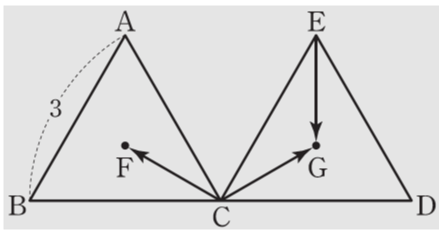


① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

11. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AD}}=2:1$인 직사각형 ABCD에서 선분 AB 위에 점 E와 선분 CD 위의 점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{DF}}=2:3$이다. 선분 EB 위의 점 G에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}$일 때, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{FB}}|^2}=\dfrac{n}{m}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

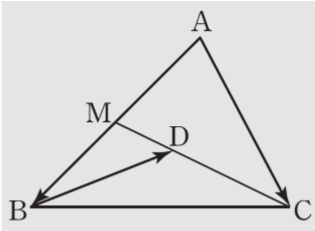


12. 그림과 같이 한 평면 위에서 한 변의 길이가 3인 두 정삼각형 ABC, ECD의 무게중심을 각각 F, G라고 하자. 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}|$의 값은? (단, 세 점 B, C, D는 한 직선 위에 있고, 두 직선 BD, FG는 서로 평행하다.)



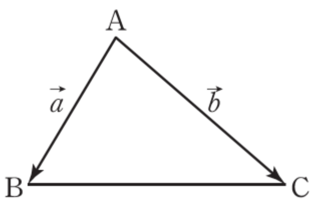
① $\sqrt{10}$　② $2\sqrt{3}$　③ $\sqrt{14}$　④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

13. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점을 M이라 하고, 선분 CM을 $5:2$로 내분하는 점을 D라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $-\dfrac{3}{14}$　② $-\dfrac{5}{14}$　③ $-\dfrac{1}{2}$　④ $-\dfrac{9}{14}$　⑤ $-\dfrac{11}{14}$

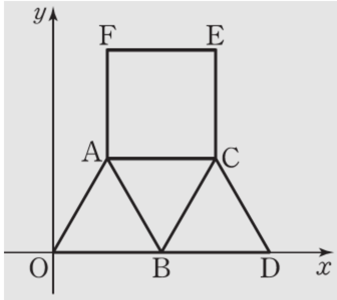
14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m-n$의 값은?



① -4　② $-\dfrac{11}{3}$　③ $-\dfrac{10}{3}$　④ -3　⑤ $-\dfrac{8}{3}$

15. 삼각형 ABC와 한 점 P는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$를 만족시킨다. 삼각형 PAB의 넓이가 6일 때, 삼각형 PCA의 넓이를 구하시오.

16. 그림과 같이 원점이 O인 좌표평면 위에 한 변의 길이가 2인 세 정삼각형 AOB, ABC, CBD와 정사각형 ACEF가 있다.



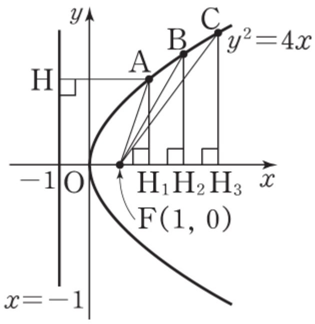
$\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?
(단, 두 점 B,D는 x축 위의 점이고 네 점 A, C, E, F는 제 1사분면 위의 점이다.)

① $1+\sqrt{3}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $1+2\sqrt{3}$　④ $2+2\sqrt{3}$　⑤ $3+2\sqrt{3}$

정답 및 해설

1) <답> ①

$y^2=4x=4\times1\times x$ 이므로 이 포물선의 초점은 F(1, 0), 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.
점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{AH}=2+\overline{FH_1}=3$ 이므로
$\overline{FH_1}=1$
같은 방법으로 $\overline{FH_2}=2$, $\overline{FH_3}=3$ 이므로 세 직각삼각형 AFH_1, BFH_2, CFH_3에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AH_1}=2\sqrt{2}$, $\overline{BH_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{CH_3}=4$ 이다.
따라서

$S_1=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $S_2=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$S_3=\frac{1}{2}\times3\times4=6$ 이므로

$$S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2=2+12+36=50$$

2) <답> 125

$x^2=ay=4\times\frac{a}{4}\times y$ 이므로 이 포물선의 준선의 방정식은

$y=-\frac{a}{4}$ 이다.

즉, $-\frac{a}{4}=-2$ 이므로 $a=8$

포물선 $x^2=8y$가 점 $(6,\ k)$를 지나므로

$6^2=8k$

$k=\frac{9}{2}$

따라서 $10(a+k)=10\left(8+\frac{9}{2}\right)=10\times\frac{25}{2}=125$ 이다.

3) <답> ③

포물선 $(y-1)^2=a(x+3)$ ⋯⋯ ㉠

은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=ax=4\times\frac{a}{4}\times x$ 의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$

이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4}-3,\ 1\right)$

포물선 $(x+2)^2=-8(y-b)$ ⋯⋯ ㉡

는 포물선 $x^2=-8y=4\times(-2)\times y$의 초점의 좌표는
$(0,\ -2)$
이므로 포물선 ㉡의 초점의 좌표는
$(-2,\ -2+b)$
두 포물선 ㉠,㉡의 초점이 일치하므로

$\frac{a}{4}-3=-2$, $1=-2+b$

$a=4$, $b=3$

따라서 $a+b=7$

4) <답> ⑤

두 초점이 $F(2\sqrt{3},\ 0)$, $F'(-2\sqrt{3},\ 0)$인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이라고 하자.

삼각형 $AF'B$가 정삼각형이므로

$\overline{AF'}=\frac{\overline{FF'}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$, $\overline{AF}=\overline{FF'}\times\tan\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=$

따라서 타원의 장축의 길이는

$2a=\overline{AF}+\overline{AF'}=4+8=12$ 이므로 $a=6$

이때 $b^2=a^2-(2\sqrt{3})^2=36-12=24$ 이고 $b>0$ 이므로

$b=2\sqrt{6}$

그러므로 타원의 단축의 길이는 $2b=4\sqrt{6}$ 이다.

5) <답> ④

$x^2-3xy+y^2=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(3xy)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(5)$

$2x-\left(3y+3x\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$

$(2y-3x)\frac{dy}{dx}=3y-2x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-2x}{2y-3x}$ (단, $2y\neq3x$)

따라서 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3y-2x}{2y-3x}$에

$x=1$, $y=-1$을 대입한 값과 같으므로

$\frac{-3-2}{-2-3}=1$ 이다.

6) <답> ④

$ax^2+\sqrt{y}=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2ax+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0$ (단, $y\neq 0$)

$\dfrac{dy}{dx}=-4ax\sqrt{y}$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$-4a\sqrt{4}=-2$에서

$a=\dfrac{1}{4}$

또 점 $(1,\ 4)$가 곡선 $ax^2+\sqrt{y}=b$ 위의 점이므로

$a+2=b$

$b=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{5}{2}$

7) <답> ②

$x^2-2y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{2\times 2}=\dfrac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\dfrac{3}{4}(x-3)$

즉, $3x-4y-1=0$

따라서 $a=3,\ b=-4$이므로

$a+b=-1$

8) <답> ②

$y^2=8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=8,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{4}{4}=1$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y-4=1\times(x-2)$, 즉 $y=x+2$이다.

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

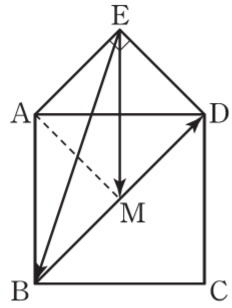
한편, $y^2=8x=4\times 2x$이므로 이 포물선의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

따라서 삼각형 PQF의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2+2)\times 4=8$이다.

[참고] $y^2=8x=4\times 2x$이므로 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2\times 2(x+2)$, 즉 $y=x+2$

9) <답> ②



정사각형 ABCD에서

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overline{\mathrm{BD}}|=2$이므로

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라고 하면 $a^2+a^2=2^2$에서

$a=\sqrt{2}$

직각이등변삼각형 ADE에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DE}}=b$라고 하면

$b^2+b^2=(\sqrt{2})^2$에서 $b=1$

삼각형 EBD에서 $\angle\mathrm{BDE}=45^\circ+45^\circ=90^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{EB}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{EB}}|=\sqrt{5}$

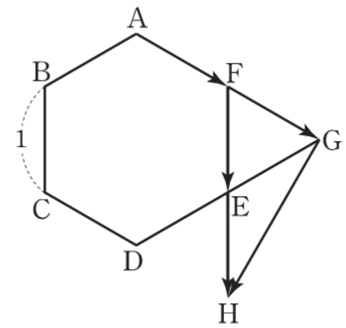
직각삼각형 EMD에서 $\overline{\mathrm{ED}}=1,\ \overline{\mathrm{MD}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{EM}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{\mathrm{EM}}|=\sqrt{2}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{EB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|=\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$

10) <답> ③

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$와 같은 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$와 같은 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$는 그림과 같다.



이때 $\angle\mathrm{EGF}=60^\circ$이고

이등변삼각형 EHG에서 $\angle\mathrm{GEH}=120^\circ$이므로

$\angle\mathrm{EGH}=30^\circ$

$\angle\mathrm{FGH}=60^\circ+30^\circ=90^\circ$

따라서 직각삼각형 FHG에서

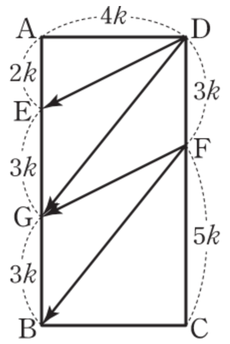
$|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{FH}}|=2$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

11) <답> **61**

$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{DF}}=2:3$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=2k,\ \overline{\mathrm{DF}}=3k\ (k>0)$로 놓을 수 있다.



$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FG}$이므로 사각형 DEGF는 평행사변형이고

$\overline{EG}=\overline{DF}=3k$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{FB}$이므로 사각형 DGBF는 평행사변형이고

$\overline{GB}=\overline{DF}=3k$

$\overline{AB}=2k+3k+3k=8k$이므로

$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4k$

$\overline{FC}=8k-3k=5k$

따라서

$|\overrightarrow{DE}|^2=(4k)^2+(2k)^2=20k^2$,

$|\overrightarrow{FB}|^2=(4k)^2+(5k)^2=41k^2$

이므로

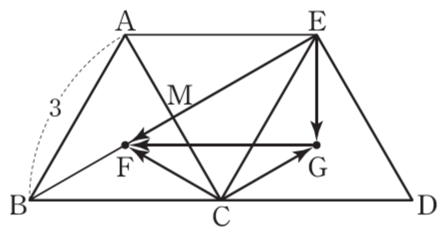
$$\frac{|\overrightarrow{DE}|^2}{|\overrightarrow{FB}|^2}=\frac{20k^2}{41k^2}=\frac{20}{41}$$

따라서 $m+n=41+20=61$

12) <답> ②

$\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GF}$이므로

$$\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF}$$



두 삼각형 ABC, ACE는 정삼각형이고, 선분 AC의 중점을 M이라고 할 때, 네 점 B, F, M, E는 한 직선 위에 있다.

정삼각형 ABC에서 $\overline{BM}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{3}\times\overline{BM}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{EM}=\overline{BM}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 $|\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EG}|=|\overrightarrow{EF}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

13) <답> ②

점D는 선분 CM을 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{BD}=\frac{5\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{BC}}{5+2}=\frac{5}{7}\overrightarrow{BM}+\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}\ \cdots\cdots ㉠$$

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$이므로 ㉠에 대입하면

$$\overrightarrow{BD}=\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=-\frac{5}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{9}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m=-\frac{9}{14}$, $n=\frac{2}{7}$이므로

$m+n=-\frac{9}{14}+\frac{2}{7}=-\frac{5}{14}$

14) <답> ③

점P 는 선분BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2+1}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$$

점Q는 선분BC를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{2-1}$$

$$=2\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)+(2\vec{b}-\vec{a})=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{8}{3}$이므로 $m-n=-\frac{10}{3}$

15) <답> 4

$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{PC}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3}\ \cdots\cdots ㉠$$

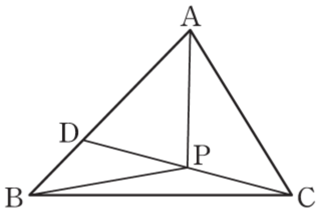
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라고 하면

$$\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3}\ \cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠,㉡에서

$\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분 CD의 중점이다.

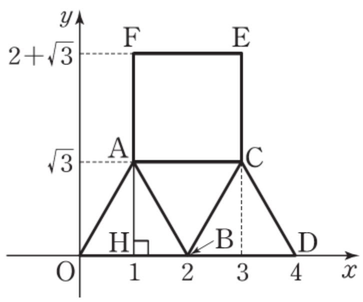


삼각형 PBD의 넓이를 S라고 하면 세 삼각형 PAD, PBC, PCA의 넓이는 각각 $2S$, S, $2S$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$S+2S=3S$이고 $3S=6$에서 $S=2$

따라서 삼각형 PCA의 넓이는 $2S=4$

16) <답> ④



점 B의 좌표는 $(2,\ 0)$, 점 D의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라고 하면

점 H의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$이므로 점 A의 좌표는 $(1,\ \sqrt{3})$이다.

또한 $\overline{\mathrm{AF}}=2$이므로 점 F의 좌표는 $(1,\ 2+\sqrt{3})$이고, $\overline{\mathrm{FE}}=2$이므로 점 E의 좌표는 $(3,\ 2+\sqrt{3})$이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$=(3,\ 2+\sqrt{3})-(2,\ 0)=(1,\ 2+\sqrt{3})$ $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$=(1,\ 2+\sqrt{3})-(4,\ 0)=(-3,\ 2+\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=(1,\ 2+\sqrt{3})+(-3,\ 2+\sqrt{3})$

$=(-2,\ 4+2\sqrt{3})$

따라서 $a=-2$, $b=4+2\sqrt{3}$이므로

$a+b=2+2\sqrt{3}$