

제 2 교시

수학 영역 (가형)

포켓몬		도감 번호																	
-----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

오지게 만든 오지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (3, -1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+2x)}{1-e^{2x}}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

4. 함수 $f(x) = \log_2(3x)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ 1 ④ $\ln 2$ ⑤ $3\ln 2$

5. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 자연수 15의 분할 중 2와 3 외의 수를 사용하지 않은 분할의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ 일 때,

$P(A^c|B^c)$ 의 값은? [3점]

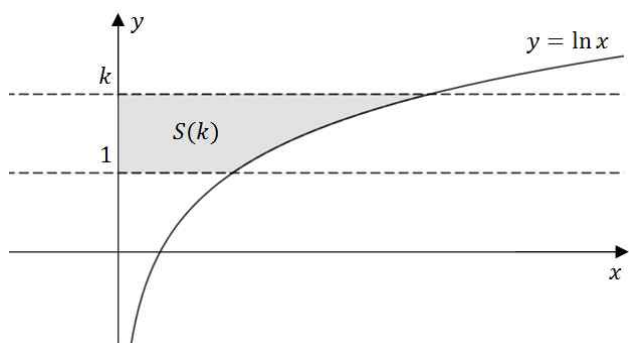
- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

8. $0 < x < 4\pi$ 일 때, 방정식 $|x \sin x| = \frac{1}{2}x$ 의 모든 실근의 개수는?

[3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

9. 곡선 $y = \ln x$ 와 y 축, 직선 $y = 1$, $y = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(k)$ 라고 하자. 부등식 $S(k) > e^5$ 를 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은? [3점]



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ 의 초점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a - b$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

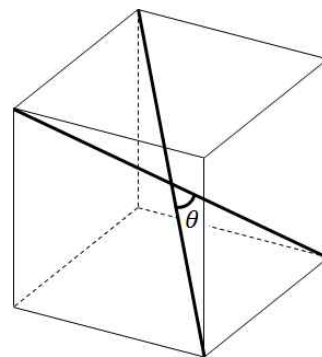
11. 함수 $f(x) = \sec x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$g'(3)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

12. 정육면체의 두 대각선이 이루는 각 θ 에 대하여 $\sin \theta$ 의 값은?

[3점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

13. 좌표공간의 점 A_n (n 은 자연수)을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1(1, 2, 4)$
 (나) $A_n(a, b, c)$ 에 대해 A_{n+1} 의 좌표는 $(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{a}{2})$ 이다.

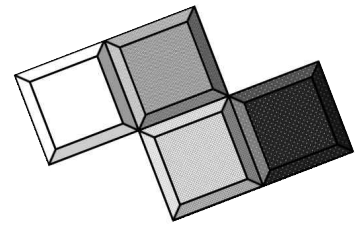
$|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| = l_n$ 일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 6 ⑤ 7

14. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^x (x-2t)f(t)dt$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. $f(0)=0$ 일 때 $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

15. 그림과 같이 모양이 같고 색이 다른 4개의 정사각형 타일을 하나로 이어 붙여 바닥에 놓는 경우의 수를 구하시오. (단, 타일은 변과 변이 일치하도록 붙이며, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.) [4점]



- ① 78 ② 90 ③ 102 ④ 114 ⑤ 120

16. 중심각의 크기가 x , 넓이가 y 인 부채꼴의 둘레의 길이를 $f(x, y)$ 라고 하자. 좌표평면에서 곡선 $f(x, y)=6$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는? [4점]

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

17. 다음은 길이가 10인 막대를 잘라 길이가 자연수인 막대 세 개를 만들 때, 가장 길이가 작은 막대의 길이의 평균을 구하는 과정이다.

막대를 자르는 경우의 수는 위치가 막대의 왼쪽 끝에서부터 1인 지점, 2인 지점, ..., 9인 지점 중 두 곳을 선택하는 경우의 수와 같으므로 9C_2 이다.

가장 길이가 작은 막대의 길이를 확률변수 X 라 하면

i) $X=1$ 인 경우

위치가 1인 지점이나 9인 지점을 선택한 경우,
 위치가 1인 지점이나 9인 지점을 선택하지 않으면서 선택한 두 지점의 위치의 차이가 1인 경우로 나눌 수 있으므로
 경우의 수는 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

ii) $X=2$ 인 경우

세 막대의 길이가 '6, 2, 2'인 경우, '5, 3, 2'인 경우, '4, 4, 2'인 경우로 나눌 수 있으므로 경우의 수는 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

iii) $X=3$ 인 경우

세 막대의 길이가 각각 '4, 3, 3'인 경우이므로 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$ 이다.

i), ii), iii)로부터 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ 를 이용하면 확률변수 X 의 평균은 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때

$\frac{a-b}{c}$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

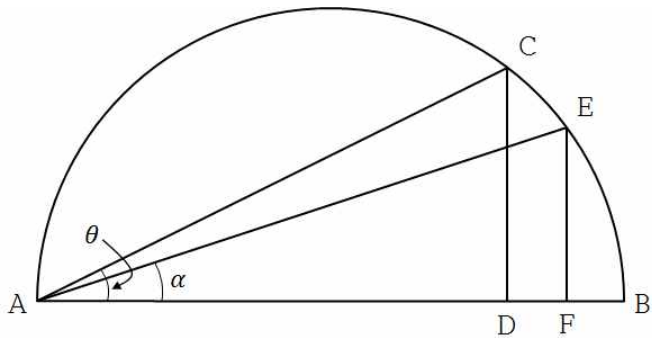
18. 좌표공간에서 xy 평면과 이루는 각이 45° 인 평면 α 위에 중심의 좌표가 $(0, 0, 3)$ 인 원 C_1 이 있다. C_1 의 xy 평면으로의 정사영을 C_2 , C_2 위의 임의의 점을 P 라 하면 \overrightarrow{OP} 와 x 축 사이 각도가 30° 일 때 $|\overrightarrow{OP}|$ 가 최대이다. 평면 α 의 방정식이 $x+ay+bz=c$ 일 때 $a^2+b^2+c^2$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

[4점]

- ① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

19. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 C 에 대하여 $\angle CAB = \theta$ 라 하고, 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 D 라 하자. 또 호 AB 위의 점 E 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 F 가 선분 DB 의 중점이 되도록 점 E 를 정할 때, $\angle EAB = \alpha$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\theta}$ 의 값은?

[4점]

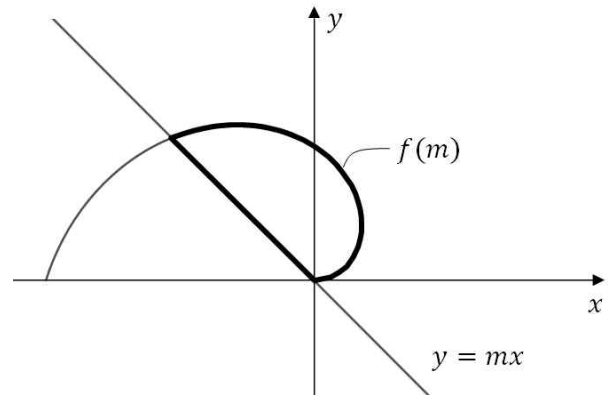


- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

20. 실수 m 에 대하여 매개변수 t 로 나타낸 곡선

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

과 직선 $y = mx$ 로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 $f(m)$ 이라 하자. $\lim_{m \rightarrow 0^+} f'(m) + \lim_{m \rightarrow 0^-} f'(m)$ 의 값은? [4점]



- ① $\sqrt{1+\pi^2}$ ② $\sqrt{1+\pi^2}+1$ ③ $\sqrt{1+\pi^2}+2$
 ④ $\sqrt{1+\pi^2}+3$ ⑤ $\sqrt{1+\pi^2}+4$

21. 자연수 n 에 대해 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f_n(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 2$ 일 때 $f_1(x) = \pi \sin \pi x$

(나) 자연수 k 에 대해 $0 \leq x < 2^k$ 일 때 $f_1(x+2^k) = -f_1(x)$

(다) $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

$f_n(x)$ 의 최댓값을 $g(n)$ 이라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f_2(9) = g(2)$ 이다.

ㄴ. $\sum_{i=2}^5 g(i) = 24$ 이다.

ㄷ. $n \geq 2$ 일 때 $g(n+1) = 2^{n-2}g(n)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단다하게 만든 단답형

22. 정수 n 에 대해 ${}_{10}P_n = {}_{10}C_n$ 일 때, 가능한 모든 ${}_{10}H_n$ 의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = \sqrt{2}(x-2)^{\sqrt{2}}$ 에 대하여 $f'(a)$ 가 자연수일 때, 자연수 a 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르는 확률변수 X 에 대하여 $E(X) = 10$, $\sigma(X) = 3$ 일 때 $n - V(2X)$ 의 값은? [3점]

25. 양수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x < a) \\ \tan(x-b) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 구간 $(0, a + \frac{\pi}{2})$ 에서 미분가능할 때, $\frac{20a+2b}{\pi}$ 의 최솟값은?

[3점]

26. 좌표평면 위의 점을 원소로 가지는 집합 S 를

$$S = \{(x, y) \mid x, y \text{는 정수}, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

로 정의할 때, S 의 서로 다른 두 원소 A, B 에 대해 직선 \overline{AB} 의 기울기의 가짓수를 구하시오. (단, 기울기가 없는 직선은 고려하지 않는다.) [4점]

27. 좌표평면 위의 두 점 F, F' 와 매개변수 t 로 나타낸 곡선

$$x = \sec t, y = \sqrt{3} \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

위의 임의의 점 P 에 대하여 $|\overrightarrow{PF}| - |\overrightarrow{PF'}| = k$ ($k > 0$ 인 상수)일 때, 점 F 의 x 좌표를 a 라고 하자. $10k+a$ 의 값을 구하시오.

[4점]

28. n 이 자연수일 때, n 차함수 $f(x)$ 와 1차함수 $g(x)$ 에 대해

$$f(x)g(x) = \int_0^x f(k)f''(k)dk \text{이다. } n \times \frac{f(6)}{g(1)} \text{의 값을 구하시오.}$$

[4점]

29. 좌표공간에 있는 도형 C 의 방정식이 $x^2 + (y-1)^2 = 1, z \geq 0$ 이다. x 축을 포함하는 평면 α 와 C 의 교선이 타원일 때, 이 타원의 두 초점을 P, Q 라 하자. $\overrightarrow{PQ} \cdot (0, 3, -1)$ 의 최댓값이 a 일 때 a^2 의 값을 구하시오. (단, 점 Q 는 점 P 보다 y 좌표가 크다.) [4점]

30. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, k 의 최솟값은 m 이다.

- (가) $|x| < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $f(x) = \tan x$
 (나) $f(x+\pi) = f(x) + k$
 (다) $f(x)$ 와 2회 이상 접하는 직선이 존재한다.

$k \geq m$ 인 k 에 대해, 어떤 직선과 $f(x)$ 가 서로 다른 두 점 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ 에서 접할 때 $|\alpha - \beta|$ 의 최솟값을 $g(k)$ 라 하자. $g(x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 할 때, $h\left(\frac{m}{3}\right) - h\left(\frac{m}{2}\right) = a\pi + \sqrt{b}$ 이다. 두 유리수 a, b 에 대해 ab 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 친구의 답안을 확인하시오.
- 자신의 멘탈을 확인하시오.