[기출분석/퍼스펙티브 안내]

저자 한성은

hansungeun.com
 – 저자소개, 학습자료, 교재판매

교재판매와 유튜브활성화에 관심이 있습니다.

※ 본 광고지는 [기출분석+], [퍼스펙티브] 원고의 일부입니다.
smartstore.naver.com/hansungeun에서 구입 가능합니다.

CCL

[기출분석 가이드]

01 책의 구성과 특징

1. 수능 수학(가형)의 기출 문제들의 분석을 통해 공부하는 책입니다.
   [2019학년도 수능 20번]과 [2019학년도 수능 30번]의 해설을 첨부하니 확인해주세요.
   - 다양한 풀이, 접근하는 방법, 시험 때의 느낌을 담으려 노력했습니다.
   - 관련 기출문제, 심화 개념, 확인을 위한 변형문항을 첨부했습니다.
2. 이 책은 6평/9평/수능 수학(가형) 기출문제의 해설서입니다.
   - 1권은 2017학년도부터 2019학년도까지의 문항이 수록되어 있습니다.
   - 2권은 2014학년도부터 2016학년도까지의 문항이 수록되어 있습니다.
   - 미적분2과 확률과 통계에서 변별력이 있었던 문항은 모두 정리하였습니다.
   - 이전 기출(3권)과 기벡(4권)을 쓸 생각은 있기도 하고 없기도 합니다.
3. 굳이 고르라면 [2권]을 먼저 공부할 것을 권합니다.
   어차피 21번, 30번에 집중하게 된다고 봤을 때,
   최근 기출들 보다는 [2권]의 수록 문항들이 공부하기에 더 적합합니다.
4. 분량의 1/3 정도는 문제지, 2/3 정도는 해설지입니다.
   문제지에는 기출문제와 변형문제가 포함되어 있습니다.
   변형문제는 대부분 기출문제를 잘 이해하는 것에 초점을 맞추어 제작되었습니다.
   저질 문제는 아니지만 수준이 아주 높다고 말하기는 좀 민망합니다.
   그러니 이 책은 해설지(분석지라고 쓰고 싶습니다.)에 대부분의 가치가 있습니다.

02 대상

1. 수능 수학(가형)을 준비하는 학생.
2. 대강의 개념이 잡혀, 기출 문제를 공부해야 하는 학생.
3. 쉬운 책이 아니어서 2등급 이상이어야 수월하게 읽을 수 있습니다.

03 구매방법

1. 구매처
   smartstore.naver.com/hansungeun에서 구매합니다.
   hansungeun.com로 가시면 링크가 있습니다.
2. 가격정보
   1권 [238p] : 22000원
   2권 [160p] : 16000원
3. 정오표/추가자료
   hansungeun.com

[퍼스펙티브 가이드]

01 책의 구성과 특징

1. 이 책은 자연계 수리논술 대비를 위해 제작되었습니다.
   내용과 해설의 일부를 첨부하니 확인해주세요.
   개념파트 : 152p, 기출파트 : 160p, 161p, 해설파트 : 240p
   - 이 책의 해설지는 제 강의의 강의록입니다.
   - 이를 통해 학생 스스로 공부할 수 있도록 하려고 노력은 했습니다.

2. 이 책은 총 2권으로 이루어져 있습니다.
   - 1권의 강의 내용은 미적 중심입니다.
     [01강 수학적 귀납법] [02강 급수와 삼각함수] [03강 미분계수] [04강 평균값의 정리]
     [05강 함수의 그래프1] [06강 함수의 그래프2] [07강 다항함수] [08강 정적분의 연산] [09강 정적분과 넓이]
   - 2권의 강의 내용은 기벡과 확통 중심입니다.
     [10강 매개변수함수] [11강 절대부등식] [12강 이차곡선1] [13강 이차곡선2]
     [14강 벡터] [15강 공간도형] [16강 순열과 조합] [17강 확률] [18강 통계]
   - 2권은 3월쯤 나옵니당.

02 대상

1. 이과 수리 논술을 준비하는 학생.
2. 대강의 개념이 잡혀, 기출 문제를 공부해야 하는 학생.
3. 쉬운 책이 아니어서 2등급 이상이어야 수월하게 읽을 수 있습니다.

03 구매방법

1. 구매처
   smartstore.naver.com/hansungeun에서 구매합니다.
   hansungeun.com로 가시면 링크가 있습니다.

2. 가격정보
   1권 [238p] : 22000원
   2권 [240여p] : 22000원

3. 정오표/추가자료
   hansungeun.com

[기출분석]

[2019학년도 수능 20번]

디귿을 제대로 하기가 개 어렵다.

점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\,(x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

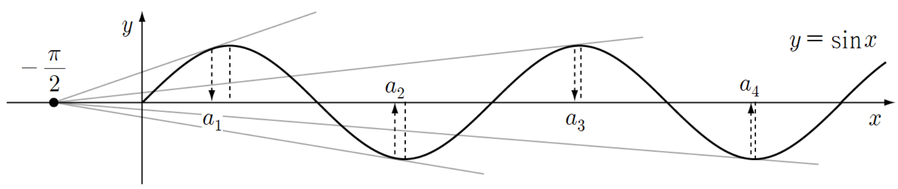
ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

01. 기역, 니은은 별 것 아닌데, 디귿이 진짜 개어렵다.
해설 여러 종류를 찾아봤는데, 대충 설명하고 잘못 설명하는 것이 태반이다.
답이 ⑤이기도 하고, 디귿의 분위기상 찍어서 맞추기도 좋아서 정답률은 높겠지만,

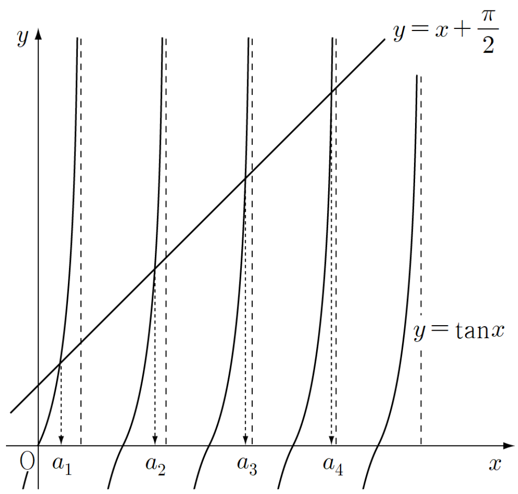
02. 상황은 다음과 같다.



03. 접선 문제는 접점에서부터. 접선 $y=\cos a_n(x-a_n)+\sin a_n$이 점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$를 지나야 한다.

따라서 $0=\cos a_n\left(-\frac{\pi}{2}-a_n\right)+\sin a_n$이 성립한다. 정리하면 기역 되네.

04. a_n들은 두 함수 $y=\tan x$와 $y=x+\frac{\pi}{2}$의 교점의 x값들이다. [02]의 그래프와 대조해봐.



05. $\tan a_{n+2} - \tan a_n = a_{n+2} - a_n$이다.

그림에서 직선 기울기가 1인 것을 봐도 좋고,

기역을 그대로 적용해서 $\tan a_{n+2} - \tan a_n = \left(a_{n+2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a_n + \frac{\pi}{2}\right)$로 해도 좋고.

06. 이제 째려보면 니은도 알겠지?

a_n들이 $2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$로 수렴하는 것을 관찰하면 되겠다.

귀찮으니까 $n=1$일 때를 보자. $\frac{5\pi}{2} - a_3 < \frac{\pi}{2} - a_1$니까.

07. 디귿은 여러 풀이를 보여줄게. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$인데,

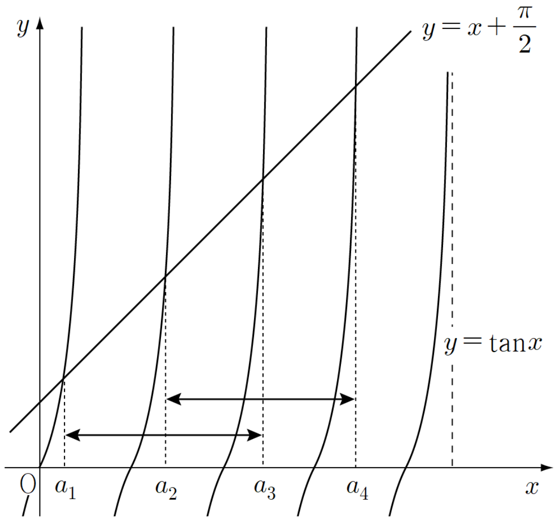
$n=1$일 때만 되면 되겠지? 뒤에는 같은 방법으로 될 거야.

문제를 $a_2 + a_3 > a_1 + a_4$로 바꿔서 풀게.

08. 우선 내가 처음 풀 때 했던 접근이다.

$a_3 - a_1 > a_4 - a_2$로 변형했다. 니은의 향기에..

아래 그림에서 두 간격을 비교하는 것이다. 되는 것 같은가?



09. 여담인데, 이 디귿은 내가 보기에 매우 까다롭다. 정확하게 이해하기는 30번보다 어려운 듯.

그런데, 10명 이상의 해설강의를 봤는데, 3명을 빼고는 다들 당연하다고 하더라. 학생들이 좀 불쌍했다.

해설을 하려면 제대로 이해하고 하든가. 아님 아직 연구가 덜 됐다고 솔직하게 말하면 좋을텐데.

10. 간격이 좁아지냐는 것인데, 전혀 당연하지 않다. 당연하다는 말은 니은에서 묻는 것과 착각했기 때문인 것 같다.

[2019학년도 9월 20번]에서 경험한 것도 있고 해서, 기울기를 적당히 비교하면 될 것 같았는데, 잘 안 되더라.

실제로 제대로 된 풀이를 만드는 것에 두 시간 이상을 투자했다. 나 머리 나쁜 거 아니야. 문제가 어려워.

11. 내가 처음에 맞다고 판단한 이유는 아래와 같다.

[06]에서 봤듯이 a_n들은 점근선들로 붙으니까, $a_{n+2} - a_n$은 2π으로 수렴한다.

$a_{n+2} - a_n$의 초항은 $a_1 - a_3 > 2\pi$인데 2π으로 수렴하니까 간격이 줄어드는 것이 맞다.

설마 오락가락하지는 않겠지?

12. 물론 엉터리다. 찍는 근거를 확인한 것이다.

그래도 합답형 ⑤번 많이 나오니까 ⑤번 찍는 것 보다는 낫다. 그렇지?

13. 디귿이 예쁘지는 않아도 올바르게 설명된 방법을 소개할게.

네 점 $\mathrm{P}(a_1,\ \tan a_1)$, $\mathrm{Q}(a_2,\ \tan a_2)$, $\mathrm{R}(a_3,\ \tan a_3)$, $\mathrm{S}(a_4,\ \tan a_4)$의 관계에서 설명해보자.

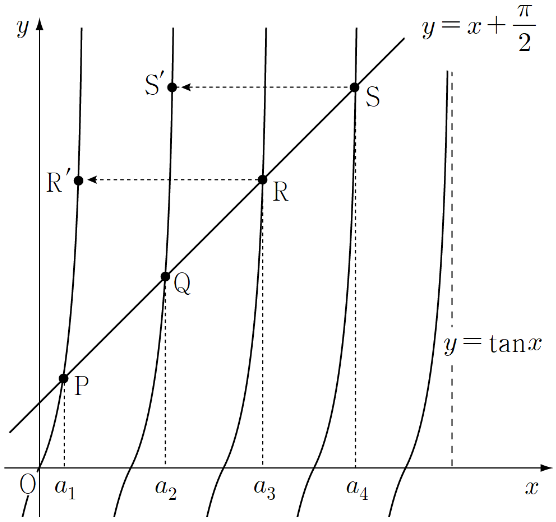
그런데 이 접근이 쉽지 않은 이유가 두 가지 있다.

① 두 구간 $[a_1,\ a_3]$와 $[a_2,\ a_4]$가 서로 겹치기 때문

② y값이 증가하는 간격이 일정하지 않기 때문

그래도 열심히 해 보자.

14. 일단 적당히 옮기자. R과 S를 $(-2\pi,\ 0)$만큼 평행이동시킨 점을 각각 R', S'이라 하자.



15. 증명하고자 하는 부등식 $a_3-a_1>a_4-a_2$를 $(a_3-2\pi)-a_1>(a_4-2\pi)-a_2$로 변형하면,

R'과 P의 x값 차이와 S'과 Q의 x값 차이의 대소관계 문제가 된다.

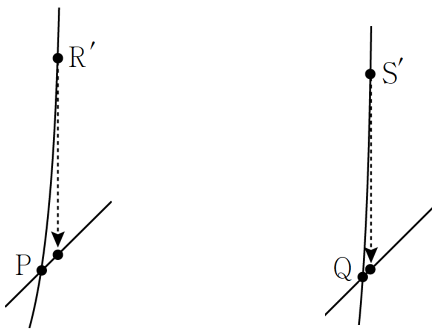
16. 사실 자꾸 당연한 것 같은 느낌이 든다. 스스로에게 엄밀해질 필요가 있다.

점 R'을 $(0,\ -2\pi)$만큼 평행이동하면 직선 $y=x+\frac{\pi}{2}$ 위에 놓인다.

여기서 직선 $y=x+\frac{\pi}{2}$을 따라서 P로 간다고 생각하자.

17. 이 과정을 같은 방법으로 S'에서 Q로 가는 것과 비교한다. 탄젠트의 기울기가 증가한다는 것에서

R'과 P의 x값 차이가 S'과 Q의 x값 차이보다 큰 것을 확인할 수 있다. 아래 그림 참고.



18. 내 기준으로 처음으로 풀렸다는 느낌이 든 풀이이다. 여기까지만 해도 30번보다 오래 걸렸다.

설명되는 모양을 보면

① $\tan x$의 기울기가 증가한다. (아래로 볼록)

② 구간에서 $\tan x$의 기울기가 1 이상(?)

등이 쓰였다. ②에 (?)를 쓴 것은 진짜로 정확하게 모르겠어서이다.

어쨌든 ①만으로는 설명되지 않기 때문에 뭔가 더 필요하다.

19. 여전히 찝찝한 부분이 남아 있다.

① 풀이가 누더기 기운 것처럼 조악하다.

② 식으로 딱 보여주기가 힘들다.

⇒ 구간이 겹쳐서 평균값의 정리가 들어오기 힘들고 [18]의 ①과 ②가 뭔가 복합적으로 적용되기 때문.

20. 그래서 다른 풀이를 보여줄게.

$a_2+a_3>a_1+a_4$를 $a_3-a_1>a_4-a_2$가 아니라 $a_2-a_1>a_4-a_3$로 바꾼다.

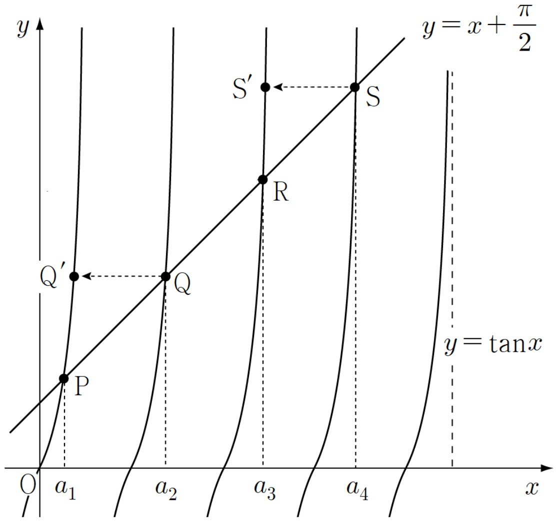
여기가 내 입장에서는 사고의 전환이었다. 왜냐면 [18]의 ①이 해결되기 때문.

21. 사실 가만 보면 이쪽이 더 쉬운 식인데 왜 저쪽으로 갔었는지 보면, ㄴ은 때문이다.

ㄴ은에서 n값 2간격을 강조하다 보니까 자연스럽게 ㄷ글의 변형도 그렇게 갔던 것이다.

그러니까 이렇게 해서 쉽게 풀린다면 욕 나오겠져?

22. Q과 S를 $(-\pi,\ 0)$만큼 평행이동시킨 점을 각각 Q$'$, S$'$이라 하자.



23. 두 점 P와 Q$'$ 사이의 기울기는 $\dfrac{\tan(a_2-\pi)-\tan a_1}{(a_2-\pi)-a_1}$이다.

$\dfrac{\tan(a_2-\pi)-\tan a_1}{(a_2-\pi)-a_1}=\dfrac{\tan a_2-\tan a_1}{(a_2-\pi)-a_1}$이고,

기역 $\tan a_n=a_n+\dfrac{\pi}{2}$를 적용하면 $\dfrac{a_2-a_1}{a_2-a_1-\pi}$로 나타낼 수 있다.

24. 마찬가지로 두 점 R과 S$'$ 사이의 기울기는 $\dfrac{a_4-a_3}{a_4-a_3-\pi}$이다.

25. 기울기 비교해서 $\dfrac{a_2-a_1}{a_2-a_1-\pi}<\dfrac{a_4-a_3}{a_4-a_3-\pi}$는 되지?

엄밀하게는 평균값의 정리를 치면 된다. 문제로서의 본질은 기울기 모양을 잡아낼 수 있냐지만.

이 부분은 [2019학년도 9월 20번]과 같이 보면 좋겠다.

26. $a_2-a_1=A$, $a_4-a_3=B$라 하면 $\dfrac{A}{A-\pi}<\dfrac{B}{B-\pi}$인데, $A-\pi$나 $B-\pi$는 양수이므로

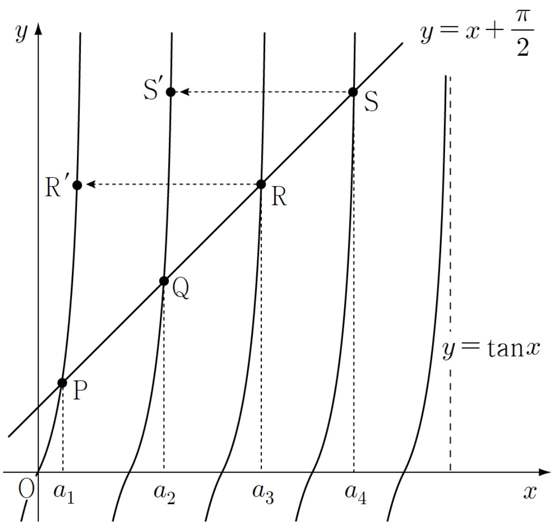
$A(B-\pi)<B(A-\pi)$, 정리하면 $B<A$이다.

27. $\dfrac{x}{x-\pi}$가 $x>\pi$에서 감소하는 함수라는 것을 이용해도 좋다. 그게 그거.

28. 이 풀이가 그래도 나은 점은 정확하게 풀렸다는 것이다.
핵심은 구간이 겹치지 않아서 평균값의 정리를 쓸 수 있었다는 사실.

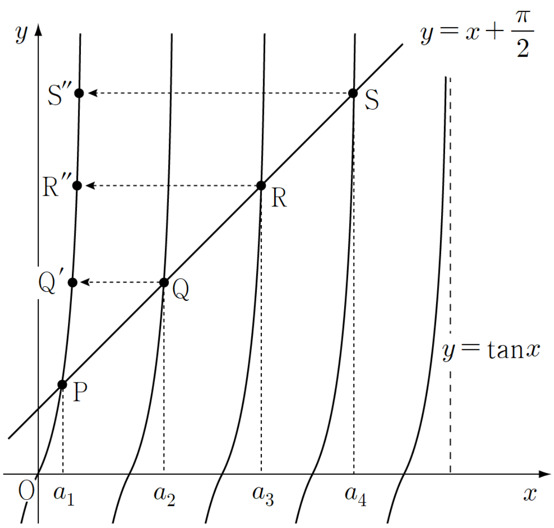
29. 기울기를 비교하는 것에서 탄젠트가 아래로 볼록임을 사용했고
[18]의 ②에 대응되는 뭔가가 작용된 것 같다.

30. 또 다른 풀이를 해 볼게. 역시 니은을 이용하고 싶다. [14]의 그림을 다시 가져와보자.

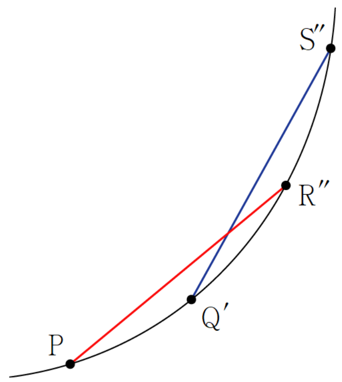


31. 여기서 두 점 P, R′ 사이의 기울기와 두 점 Q, S′ 사이의 기울기에 주목해보자.
분위기상 PR′의 기울기보다 QS′의 기울기가 커 보이지? 증명해볼게.

32. 모두 왼쪽으로 가져와서 비교해도 되겠지?
아래 [그림1]에서 PR″의 기울기와 Q′S″의 기울기를 비교하면 된다.
[그림2]는 알아보기 좋게 과장한 그림이다.

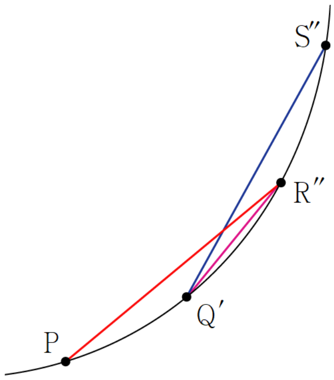


[그림1]



[그림2]

33. 앞에서부터 두 세번 언급했는데,
구간의 겹치는 부분이 있기 때문에 증명이 어려웠던 것이다.
그런데 초등적인 아이디어를 이용하여 보일 수 있다.



34. PR″의 기울기와 Q′S″의 기울기를 직접 비교하기는 어렵지만,
사이에 Q′R″의 기울기를 끼워넣으면
(PR″의 기울기) < (Q′R″의 기울기) < (Q′S″의 기울기)
인 것을 간단하게 알 수 있다.

35. 사족. 이 아이디어는 유튜브 김기현선생님의 해설강의에서 본 것이다.
2014학년도부터 6년치 기출분석 작업 중에 유일한 남의 아이디어이다.
남의 강의가 대단하다고 느끼는 일은 잘 없는데, 잘하시더라.

36. 나머지는 [23]~[26]의 논의와 같은 과정을 밟으면 된다.
두 점 P와 R′ 사이의 기울기는 $\dfrac{\tan(a_3-2\pi)-\tan a_1}{(a_3-2\pi)-a_1}$인데, 정리하면 $\dfrac{a_3-a_1}{a_3-a_1-2\pi}$이다.

37. 따라서 $\dfrac{a_3-a_1}{a_3-a_1-2\pi}<\dfrac{a_4-a_2}{a_4-a_2-2\pi}$이다.

$a_3-a_1=A$, $a_4-a_2=B$라 하면 $\dfrac{A}{A-2\pi}<\dfrac{B}{B-2\pi}$에서
$A(B-2\pi)<B(A-2\pi)$, 정리하면 $B<A$이다.

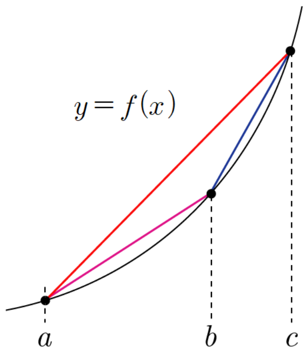
38. 이 풀이가 멋있는 이유는 [36]에서 기역, [37]에서 니은을 사용했기 때문이다.
합답형은 원래 이런 식이었다는 것을 생각하면 출제자의 의도가 이쪽인 것 같다.

39. [34]의 내용을 수식으로 증명할 수 있다. 혹시 궁금할까봐.
오른쪽 그림에서 다음 세 조건은 모두 서로 동치이다.

① $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

② $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

③ $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$



증명하기 쉬운 것은 ①이다. 각각의 구간에서 평균값의 정리를 치면 되겠지?
①에서 ②만 증명해줄게. 아래 식을 잘 째려봐.

$$(c-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<(c-b)\frac{f(c)-f(b)}{c-b}+(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

볼록성에 따른 기울기의 증감은 논술에서는 가끔 보이는 내용이니 확인해두자.

40. [34]의 발상을 비유하자면, $\sqrt{8}$과 π의 크기비교를 하라는 문제에서 3을 생각해내는 것과 같다.
이런 종류의 발상은 원래 어렵다. 생각해 내는 것과 풀이를 이해하는 것은 천지차이.

41. 위에 나온 풀이를 정리해볼게.
[07]~[11] : 시험장에서 찍는 방법. 제대로 된 풀이는 아니다.
[13]~[17] : 확인은 할 수 있었지만, 수식으로 풀이가 안 돼서 찝찝하다.
[20]~[27] : 제대로 푼 방법. 기역과 니은을 무시해야 하기에 찝찝하다.
[30]~[37] : [20]~[27]과 본질적으로 같지만 더 복잡한 풀이. 출제자가 이것을 생각한 듯.

[기출분석]

[2019학년도 수능 30번]

합성함수의 극대/극소

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\frac{1}{2+\sin(f(x))}$$

이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \ge 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\frac{2}{5}$이다.

(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)}=\frac{1}{g(\alpha_2)}+\frac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하여라. (단, $0<f(0)<\frac{\pi}{2}$)

01. 합성함수의 증감이라는 점에서 [2019학년도 9월 30번]이 연상된다.
평가원/수능에서 합성함수의 그래프가 요구된 문제는 [2019학년도 9월 30번]이 처음이다.
내년에는 중요한 주제로 보고 공부해야겠지. 수능 진짜 막장이네. 곧 없어지나?

02. 난이도는 물론 높지만, 시험지의 최고난이도 문항으로서는 최근 문제들인
[2019학년도 6월 21번], [2019학년도 9월 21번], [2018학년도 수능 30번]
보다는 쉽다. 객관식 문제와 정답률을 비교할 수는 없지만.

03. $g(x)$가 극대 또는 극소인 점을 찾기 위해서는 $g'(x)=0$을 풀어야겠다.
α_n들은 모두

$$g'(x)=\frac{\cos(f(x))\times f'(x)}{\{2+\sin(f(x))\}^2}=0$$

의 근이므로 $\cos(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$의 근과 같다.

04. 여기서 $\cos(f(\alpha_n))=0$이면 $\sin(f(\alpha_n))$의 값은 ± 1이고,
$g(\alpha_n)=\frac{1}{2+\sin(f(\alpha_n))}$의 값은 1 또는 $\frac{1}{3}$이 된다.

05. (가)에서 $\cos(f(\alpha_1))=0$이라면 $g(\alpha_1)=\frac{2}{5}$가 될 수 없다.
따라서 $f'(\alpha_1)=0$이다. 그리고 $\sin(f(\alpha_1))=\frac{1}{2}$이다.

06. $\alpha_1=0$이므로 $f'(0)=0$이다.
또, $\sin(f(0))=\frac{1}{2}$인데, $0<f(0)<\frac{\pi}{2}$이므로 $f(0)=\frac{\pi}{6}$이다.

07. (나)에서 $\cos(f(\alpha_2))=0$이며 $\cos(f(\alpha_5))=0$일 수 없다. [04]를 째려보고

$$\frac{1}{1}\ne\frac{1}{1}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1}\ne 3+\frac{1}{2},\quad 3\ne\frac{1}{1}+\frac{1}{2},\quad 3\ne 3+\frac{1}{2}$$

인 것을 확인하자.

08. 따라서 $f'(\alpha_2)=0$ 또는 $f'(\alpha_5)=0$이다.

09. [06]까지는 킬러문항에 도전한다면 기본이라 보고,
[07], [08]을 눈치챌 수 있는지가 첫 번째 기점인 것 같다.

10. $f'(x)=0$의 근은 최대 2개다.
하나는 0이므로 다른 하나가 α_2 또는 α_5이다.

11. 만약 $f'(\alpha_2)=0$라 하면 $g(\alpha_5)$의 값은 1 또는 $\frac{1}{3}$이다.

여기서 $g(\alpha_5)=1$이면 $g(\alpha_2)=2$, $\sin(f(\alpha_2))=-\frac{3}{2}$인데, 사인값의 범위에서 아웃이다.

따라서 $g(\alpha_5)=\frac{1}{3}$인데, 이때 $g(\alpha_2)=\frac{2}{5}$, $\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$이다.

12. 만약 $f'(\alpha_5)=0$라 하면 $g(\alpha_2)$의 값은 1 또는 $\frac{1}{3}$이다.

여기서 $g(\alpha_2)=\frac{1}{3}$이면 $g(\alpha_5)=\frac{6}{5}$, $\sin(f(\alpha_5))=-\frac{7}{2}$이니까 아웃.

따라서 $g(\alpha_2)=1$인데, 이때 $g(\alpha_5)=\frac{2}{3}$, $\sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$이다.

13. [11]의 경우나 [12]의 경우 중 하나가 맞고 하나가 틀릴 것이다. 정리하면

[11]의 경우 : $f'(\alpha_2)=0$, $\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$, $\sin(f(\alpha_5))=1$

[12]의 경우 : $f'(\alpha_5)=0$, $\sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$, $\sin(f(\alpha_2))=-1$

14. 여기까지를 예쁘게 추려내는 것이 좀 귀찮았을 것이다.
이제 두 케이스를 따져서 [11]은 안 되고 [12]가 맞다는 것을 보이면 된다.

15. 그런데 사실 $g(x)$를 보면 $2+\sin(f(x))$의 역수이므로
$2+\sin(f(x))$가 극대일 때 극소, 극소일 때 극대가 된다.
또 $\frac{1}{g(\alpha_5)}=\frac{1}{g(\alpha_2)}+\frac{1}{2}$라는 식도 $\sin(f(\alpha_5))=\sin(f(\alpha_2))+\frac{1}{2}$로 보는 것이 편하다.
그러니까 문제에서 귀찮게 장난쳤는데 놀아난 느낌이 좀 들더라.

16. 어쨌든, [11]의 경우는 대충 봐도 아니지 않냐?
$f'(\alpha_1)=0$이면서 $f'(\alpha_2)=0$이면 너무 가깝잖아.

17. 왜 아니냐면, $f'(\alpha_1)=0$이면서 $f'(\alpha_2)=0$이면 $\sin(f(\alpha_1))=\frac{1}{2}$이면서 $\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$인데,

이 사이에 $\sin(f(x))=\pm1$의 근이 반드시 존재하겠지?
그때가 $\cos(f(x))=0$이고 $g(x)$의 극값이 되니까 α_1과 α_2 사이에 α_n이 하나 있어야 된다. 망했네.

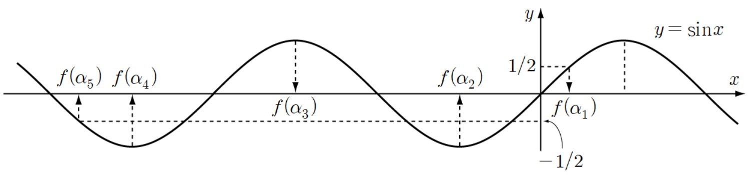
18. 그래서 [12]의 경우가 맞다.

19. $f(x)$는 3차함수이고, $f'(\alpha_1)=0$, $f'(\alpha_5)=0$이다.

$f(x)$는 구간 $[\alpha_1, \alpha_2]$에서 감소하고 $\sin(f(\alpha_1))=\frac{1}{2}$, $\sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$이다.

그리고 α_2, α_3, α_4에서 $\cos(f(x))=0$, $\sin(f(x))=\pm1$이어야 한다.

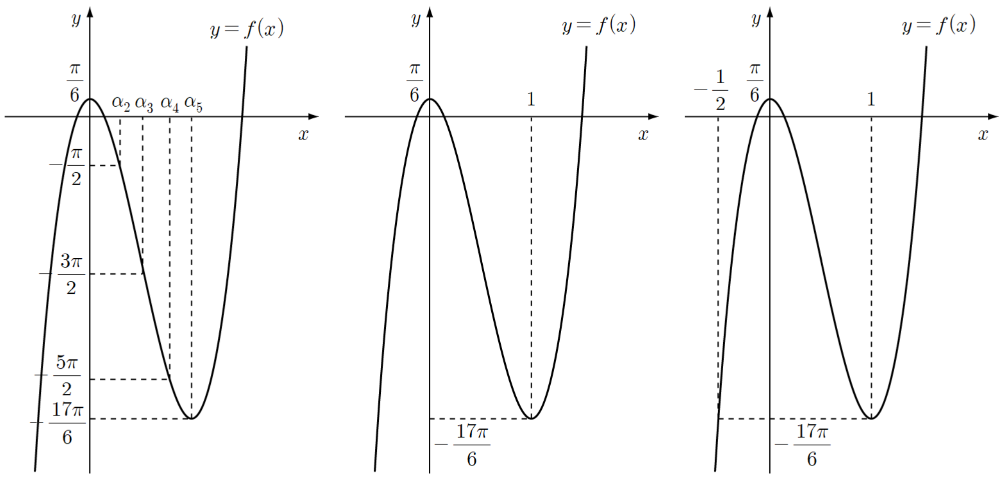
20. 이를 $y=\sin x$의 그래프에서 살펴보면 다음과 같다.



21. 따라서 $f(\alpha_5)=-\dfrac{17\pi}{6}$이다.

22. 별로 필요하지 않지만 $f(\alpha_2)=-\dfrac{\pi}{2}$, $f(\alpha_3)=-\dfrac{3\pi}{2}$, $f(\alpha_4)=-\dfrac{5\pi}{2}$이다.

23. 지금까지를 $y=f(x)$에 나타내면 아래의 [그림1]과 같다.
[그림2], [그림3]은 뒤에 필요하다. 여백 때문에.



[그림1] [그림2] [그림3]

24. 이제 $f(x)$를 가지고 풀면 된다.

$x=0$, $x=\alpha_5$에서 극값을 가지고, $f(0)=\dfrac{\pi}{6}$, $f(\alpha_5)=-\dfrac{17\pi}{6}$이다.

여기서 $\alpha_5=1$임을 알 수 있는데, [25]은 일반적인 풀이, [26]은 스킬을 이용한 풀이이다. 둘 다 해보자.

25. $f'(0)=0$, $f(0)=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $f(x)=6\pi x^3+kx^2+\dfrac{\pi}{6}$이다.

$f'(x)=18\pi x^2+2kx=0$에서 $\alpha_5=-\dfrac{k}{9\pi}$이다.

$f(\alpha_5)=-\dfrac{17\pi}{6}$을 풀면 $k=-9\pi$이고 $\alpha_5=1$이다.

26. 삼차함수의 두 극값의 차가 $\dfrac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$인 것 알아?

얘를 알면 $\dfrac{6\pi}{2}(\alpha_5-0)^3=\dfrac{\pi}{6}-\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$에서 $\alpha_5=1$ 바로 나온다.

27. [26]는 삼차함수에서 꽤 요긴한 스킬이다.
극값의 차이가 도함수와 x축으로 둘러싸인 넓이이므로
도함수 $3ax^2+\cdots$에서 혓바닥공식 $\dfrac{|3a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 친 것이다.

28. 어쨌든 $\alpha_5=1$이다. $y=f(x)$의 그래프는 [23]의 [그림2]와 같다.

29. 저 위에 $g(x)$ 미분해놨지?

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2+\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2}$$

라서 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$와 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$를 구하면 되겠당.

30. [25]에서 $f(x)=6\pi x^3-9\pi x^2+\frac{\pi}{6}$이므로 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{17\pi}{6}$이고

$f'(x)=18\pi x^2-18\pi x$에서 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27\pi}{2}$이다.

31. 여기서도 스킬을 이용하면 약간의 득을 볼 수 있다.

삼차함수의 $2:1$ 알지? [23]의 [그림3]을 째려보면 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{17\pi}{6}$가 자동이다.

$f'(x)=18\pi x(x-1)$에서 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27\pi}{2}$를 구하면 되고..

32. 얻은 값을 $\dfrac{\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2+\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2}$에 대입하면 답 27이래.

33. 다항함수 스킬이 평가원/수능에서 자주 쓰이네.

다항함수 자체로 출제되지는 않지만, 문제를 꼬다보면 다항함수를 넣게 돼서.
[2019학년도 9월 30번], [2018학년도 9월 30번], [2017학년도 수능 30번]이 대표적이다.
사설에서도 많이 쓰인다. 킬러문항에 도전하고 있다면 익혀두는 것이 좋겠다.

34. [변형문제] 최고차항의 계수가 $-\frac{\pi}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\frac{1}{1+|\sin(f(x))|}$$

이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha\geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2. α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\frac{2}{3}$이다.

(나) $g(\alpha_2)+g(\alpha_6)=\frac{5}{3}$

$f(1)+f(3)$의 값은? (단, $0<f(0)<\pi$)

① $\frac{4\pi}{3}$ ② 2π ③ $\frac{8\pi}{3}$

④ $\frac{10\pi}{3}$ ⑤ 4π

35. 원본 문제의 일차원적 변형. 못 풀겠다면 원본 문제 복습을 다시 하자.

특별한 일이 없다면, 함수 $g(x)$는 정수 n에 대하여 $f(x)=\frac{n\pi}{2}$에서 극값을 가진다.

그리고 이 때의 $|\sin(f(x))|$ 값이 0 또는 1이므로 $g(x)$의 값은 1 또는 $\frac{1}{2}$이다.

36. 분위기 보니까 α_1하고 α_6가 $f'(x)=0$의 두 근이네.

조합이 $g(\alpha_2)=1$, $g(\alpha_6)=\frac{2}{3}$, 즉, $\sin(f(\alpha_2))=0$, $\sin(f(\alpha_6))=\frac{1}{2}$만 가능하다.

37. $\sin(f(\alpha_1)) = \frac{1}{2}$에서 $f(\alpha_1)$이 $\frac{\pi}{6}$와 $\frac{5\pi}{6}$이 가능하다.

그런데 $f(\alpha_1) = \frac{\pi}{6}$이면 $\sin(f(\alpha_2))$ 값이 1이 돼서 아웃이다.

조금 숨기려고 $f(0)$의 범위 늘려봤어.

38. 나머지는 원본과 똑같이. $f'(x) = 0$의 두 근은 0과 2 나온다.

대칭성으로 $f(1) = \frac{11\pi}{6}$이고, $2:1$로 $f(3) = \frac{5\pi}{6}$이다. 답은 ③이야.

39. [변형문제] 최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = x^2 e^{-x}$에 대하여 함수

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

이 $x = \alpha$에서 극대 또는 극소일 때, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_n이라 하자. $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\alpha_2 = 0$이고 $f(\alpha_2) = f'(\alpha_2) = 0$이다.
> (나) α_4와 α_7은 방정식 $h(x) \times \{h(x) - g(2)\} = 0$의
> 근이 아니며 $\alpha_4 : \alpha_7 = 1:3$이다.

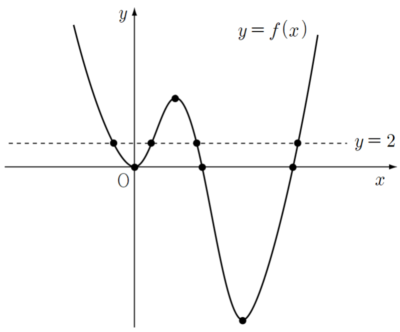
$f(\alpha_3) + 3 = f(\alpha_4)$일 때, $n + f(\alpha_4) + f(\alpha_5)$의 값을 구하여라.

40. (나)가 좀 뻔한가? α_4, α_7이 $g'(f(x)) = 0$의 근이 아니라 $f'(x) = 0$의 근이 된다.

$\alpha_4 = a$, $\alpha_7 = 3a$라 두면 $f'(x) = 12x(x-a)(x-3a)$이고 $f(x) = 3x^4 - 16ax^3 + 18a^2x^2$이다.

41. 분위기 보면 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다. 점으로 표시한 지점이 $h(x)$가 극값이 될 때이다.

$f'(x) = 0$인 곳들과 $g'(f(x)) = 0$, 즉, $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 2$인 곳들의 합집합이다.



42. $f(\alpha_4) = 5 \Leftrightarrow f(a) = 5$를 풀자

$a = 1$이고 $n = 9$, $f(\alpha_4) = 5$, $f(\alpha_5) = 2$이다.

답은 16이다.

매개변수

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 실수 t에 대하여 $x=f(t),\ y=g(t)$로 나타내어질 때, t를 x와 y의 매개변수라 한다.

개념1

자취의 방정식

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$를 만족할 때, t를 소거한 x와 y의 관계식을 점 P의 자취의 방정식이라 한다.

001.

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 좌표가 매개변수 t의 함수

$$x=\sqrt{2}\cos t,\ y=2+\sin t\ (\text{단, } 0\le t<2\pi)$$

로 나타내어진다고 할 때, 점 P가 만드는 도형의 방정식 $f(x,\ y)$를 구하여라.

[광운대2017]

002.

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에 대하여 $2a+3b$의 최댓값을 구하여라.

003.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가

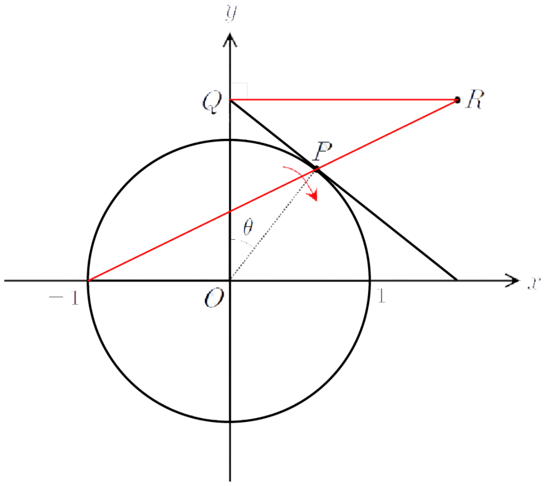
$$x=\frac{2\cos\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta},\ y=\frac{-\sin\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta}$$

를 만족한다. 점 P의 자취의 방정식을 구하여라. (단, $0<\theta<\pi$)

[고려대2015]

01 서울대학교 2014기출

아래 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 점 P가 점 (0, 1)을 출발하여 원호를 따라 시계방향으로 점 (1, 0)을 향해 움직인다. 점 P에서 원의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q를 지나며 x축에 평행한 직선과 점 $(-1, 0)$과 점 P를 지나는 직선이 만나는 점을 R이라고 하자. 이 때, R의 자취에 대하여 다음 물음에 답하여라.



[문제1] $\angle$POQ를 θ라고 할 때, 점 R(x, y)의 자취를 θ에 관한 함수로 나타내어라. 즉,

$$x=g(\theta),\quad y=h(\theta)\quad \left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

의 꼴로 나타내어라.

[문제2] 점 R(x, y)의 자취의 방정식을 $y=f(x)$의 꼴로 나타내어라.

[문제3] [문제2]에서 구한 함수 $y=f(x)$의 최솟값과 그 그래프의 변곡점을 구하고, 그래프의 개형을 그려라.

[Raison : 근거]

[10강] [매개변수함수]

[학습목표]

1. 자취의 방정식을 구하고 곡선의 매개화를 할 수 있다.
2. 매개변수 함수의 미적분을 할 수 있다.
3. 곡선의 길이에 관련된 문제를 풀 수 있다. [중요]

01. [8p] 시각 t에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 $(x,\ y)$를 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타낸 것을 매개변수함수라 한다.

⇒ 방정식의 그래프(식을 만족하는 모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 모음)와 비교해서 점이 움직인다는 것에 신경 써 보자.

→ 예를 들어서 $y=x^2$의 그래프는 자리를 잡고 가만히 있지만, $(t,\ t^2)$이라는 점은 이 곡선 위를 움직인다.

→ 곧바로 속도, 이동거리 등 움직임과 관련된 용어들을 다루게 된다.

※ 매개변수가 항상 시각일 필요는 없지만, 논의의 단순화를 위해서 일단 시각으로 제한하자. 이 후 매개변수는 t를 의미한다.

※ 평면운동이 교과범위가 아닐 때도 논술에서는 중요한 단원이었다. 그런데 교과범위에 들어오니 묘하게 덜 나오는 듯 ㅎㅎ

02. [8p] 어떤 그래프를 방정식으로 나타낸 것과 매개변수를 이용하여 나타낸 것 사이를 왔다갔다 할 수 있어야 한다.

⇒ 매개변수함수에서 x와 y가 만족하는 방정식을 구하는 것을 일반적으로 자취의 방정식을 구한다고 한다.

→ 자취의 방정식을 구하기 위해서는 매개변수를 ★소거해야 한다.

⇒ 방정식 위를 움직이는 점을 잡는 과정을 일반적으로 곡선을 매개화한다고 한다.

03. [8p01번] 점 P가 그리는 곡선 C의 (자취의) 방정식?

⇒ x와 y의 관계식을 구하야한다.

⇒ t를 소거 해야겠다.

⇒ $\cos t=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin t=y-2$를 제곱해서 더한당.

04. [8p02번] 아래 풀이들을 다 확인해두자.

① 일반적인 풀이는 $2x+3y=k$라 두고 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{k}{3}$이므로 타원에 접하는 기울기 $-\dfrac{2}{3}$인 접선 그어서..

② 코쉬슈바르츠로 풀 수 있으면 훌륭한데, 별로 기대는 안 한다. 확인은 해 둬. $\left\{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b^2\right\}(4^2+3^2)\ge(2a+3b)^2$

③ 이야기 하고 싶은 것은 매개화이다. 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점은 $(2\cos t,\ \sin t)$로 매개화 할 수 있다.

구하려는 식 $2a+3b$는 $4\cos t+3\sin t$이므로 합성에 의해 풀린다.

※ 묘하게 세 가지 풀이가 다 교과과정을 살짝살짝 위반하고 있는데, 입장을 정리해 두자.

①의 기울기가 주어진 이차곡선의 접선은 필수적으로 알아둬야 한다. 개인적 의견으로는, 수능 준비할 때도 필수. 더 나아가서 논술을 생각하면, 증명하는 과정까지도 확실하게 연습해 둘 필요가 있다.

②의 코쉬슈바르츠는 출제되더라도 제시문에서 설명될 것이기 때문에 보일 때마다 적용되는 방식을 확인해두는 정도.

③의 삼각함수 합성은 미분으로 대체할 수 있긴 하지만 계산의 편의상 익혀두도록 하자.

논술에서 써도 되냐고? 똑 부러지게 답할 수는 없는데, 웬만하면 써도 된다고 해둘게. 그런데 문제 사이즈 보고..

05. [14p01서울대2014] 어렵지 않은 자취 문제. 서울대 문제를 풀었다는 자부심을 가져보자.

[문제1] $\mathrm{P}(\sin\theta,\ \cos\theta)$라 두고 직선의 방정식 구하고 $y=1$과의 교점을 구한다.

⇒ 안 풀리면 서울대학교라는 이름을 지우고 풀어보자.

[문제2] $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}$을 $x=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$에 대입해도 좋고, 각각의 식을 $\sin\theta=\dfrac{x}{x+1}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{y}$로 정리해서 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용해도 좋다. 핵심은 θ를 소거해서 x와 y만의 관계식을 띄우겠다는 방향성이다.

[문제3] 별 것 아님.