Chapter 2 지수함수와 로그함수

1. 지수함수와 로그함수의 뜻

1) 지수함수

a가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x의 값에 대응하는 a^x의 값은 단 하나로 정해진다. 따라서

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

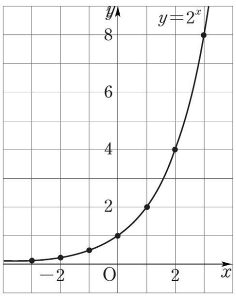
은 x를 a^x에 대응시키는 함수이다.

이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

[예] 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 그려 보자.

함수 $y=2^x$에서 실수 x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$



2) 로그함수

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

이때 로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$$

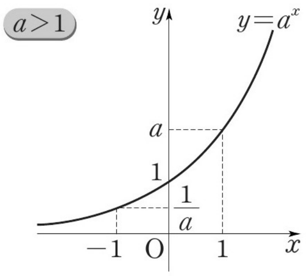
이므로 x와 y를 서로 바꾸면

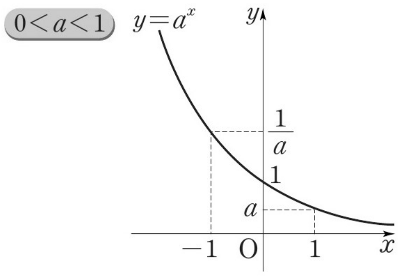
$$y=\log_a x$$

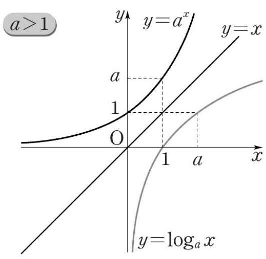
가 $y=a^x$의 역함수임을 알 수 있다.

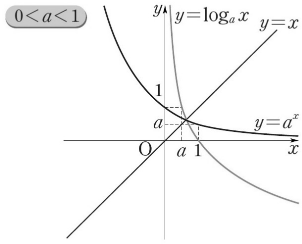
이 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

2. 지수함수와 로그함수의 성질





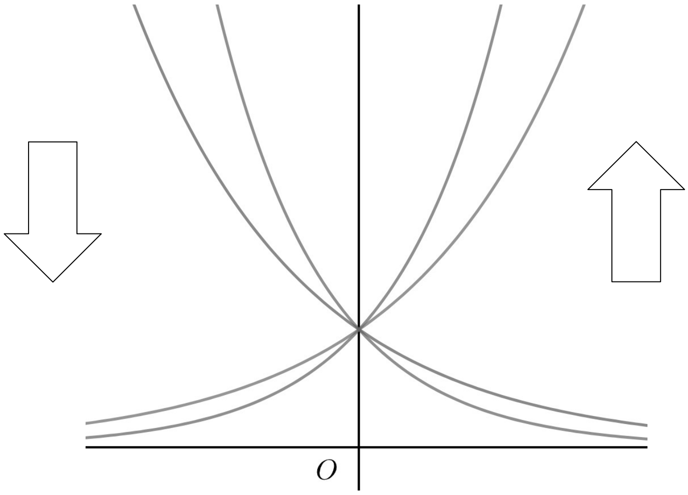




지수함수 $y=a^x$	로그함수 $y=\log_a x$
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.	① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.	② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
③ 그래프는 점 $(0, 1)$을 지난다.	③ 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다
④ x축을 점근선으로 갖는다.	④ y축을 점근선으로 갖는다.
⑤ 아래로 볼록하다.	⑤ 아래로 볼록하다.

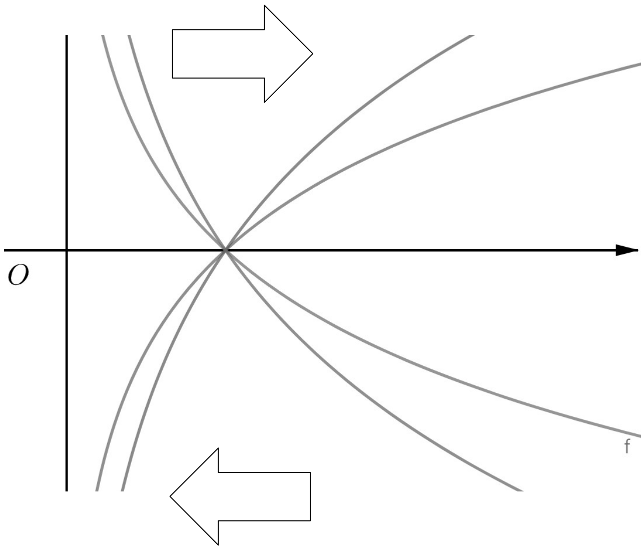
3. 밑의 크기에 따른 지수함수와 로그함수

1) 지수함수



① $a>1$일 때, a의 값이 클수록 그래프는 y축에 가깝다.
① $0<a<1$일 때, a의 값이 작을수록 그래프는 y축에 가깝다.

2) 로그함수



① $a>1$일 때, a의 값이 클수록 그래프는 x축에 가깝다.
① $0<a<1$일 때, a의 값이 작을수록 그래프는 x축에 가깝다.

4. 지수함수와 로그함수의 대칭이동

1) 지수함수의 대칭이동

① 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대칭이동 시키면

$$y=a^{-x} \Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

x축에 대칭이동 시키면

$$y=-a^x$$

원점에 대칭이동 시키면

$$y=-a^{-x} \Leftrightarrow y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

② $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

2) 로그함수의 대칭이동

① 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대칭이동 시키면

$$y=-\log_a x \Leftrightarrow y=\log_{\frac{1}{a}} x$$

y축에 대칭이동 시키면

$$y=\log_a(-x)$$

원점에 대칭이동 시키면

$$y=-\log_a(-x) \Leftrightarrow y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$$

② $y=\log_a\left(\frac{1}{x}\right)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

5. 지수함수와 로그함수의 평행이동

지수함수 $y=a^{x-m}+n$	로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$
$y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. ① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 n보다 큰 실수 전체 집합이다. ② 그래프는 점 $(m,n+1)$을 지난다. ③ 직선$y=n$을 점근선으로 갖는다. ④ 아래로 볼록하다.	$y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. ① 정의역은 m보다 큰 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. ③ 그래프는 점 $(1+m,\ n)$을 지난다 ④ 직선$x=m$을 점근선으로 갖는다. ⑤ 아래로 볼록하다.

6. 그래프 그리기

① 점근선 확인
② 부호와 극한값 이용하여 그래프 개형을 그린다

[예1]

$y=-5\times2^{4-2x}+1$

[예2]

$y=-\log_3(4-3x)+7$

7. 지수함수와 로그함수의 닮음이동

닮음이동 자체는 교과과정 외이지만, 그럼에도 지수함수와 로그함수에서 많이 출제되기 때문에 정리하여 아는 것이 좋다.

1) 로그의 성질과 로그함수

[예]

$y=\log_2 x$ 와 $y=\log_8 x^3$

$y=\log_2 x$ 와 $y=\log_4 x^2$

$y=\log_2 |x|$ 와 $y=\log_4 x^2$

2) 밑

[예]

$y=\log_2 x$ 와 $y=\log_4 x$

$y=2^x$ 와 $y=8^x$

3) 닮음이동과 평행이동

① 지수함수 $y=ka^x$ $(k>0)$

지수함수 $y=ka^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_a k$만큼

평행이동한 것이다.

[예]

$y=3\times 2^x=2^{x+\log_2 3}$

② 로그함수 $y=\log_a kx$ $(k>0)$

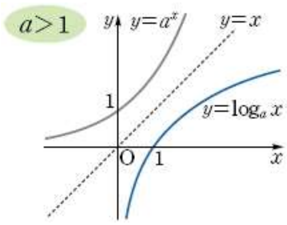
로그함수 $y=\log_a kx$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_a k$만큼

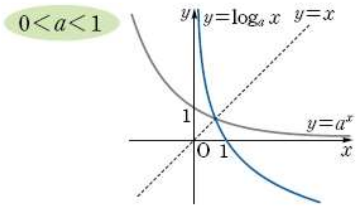
평행이동한 것이다.

[예]

$y=\log_2 3x=\log_2 x+\log_2 3$

8 지수함수와 로그함수는 역함수 관계이다.





① $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에서

로그의 정의에 의하여 $y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$

x와 y를 바꾸면 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$ 함수는 $y=a^x$의 역함수이다.

② $y=a^{x-n}+m(a>0,\ a\neq 1)$에서 로그의 정의에 의하여 $y=a^{x-n}+m \Leftrightarrow x=\log_a(y-m)+n$

x와 y를 바꾸면 $y=\log_a(x-m)+n$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 함수는 $y=a^{x-n}+m$의 역함수이다.

즉, 함수 $f(x)$를 x축으로 n만큼 y축으로 m만큼 평행이동 하면,
$f^{-1}(x)$는 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동 한다.

8. 함수의 기하적 관점 (대소관계)

$f(1)$ 자체가 어떤 관점에서 해석하는지에 따라서 의미가 달라집니다.

1) 넓이

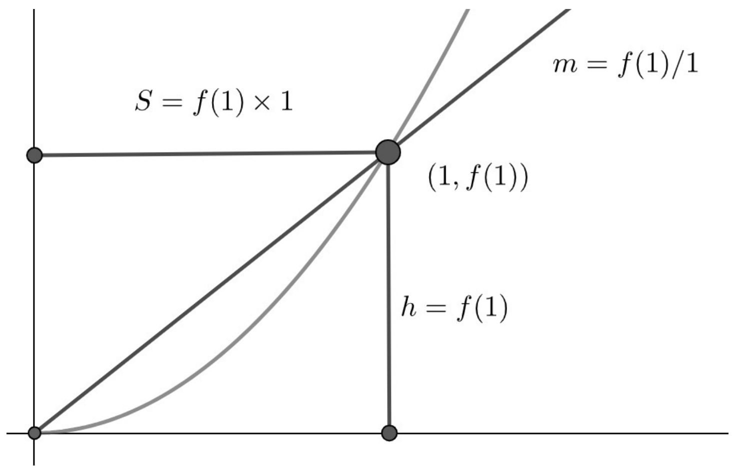
$f(1)\times 1$로 해석을 하면, 사각형의 넓이가 됩니다,

2) 길이 (함수)

$f(1)$ 자체로 해석하면, 함숫값이 되고, 길이로 표현할 수 있습니다.

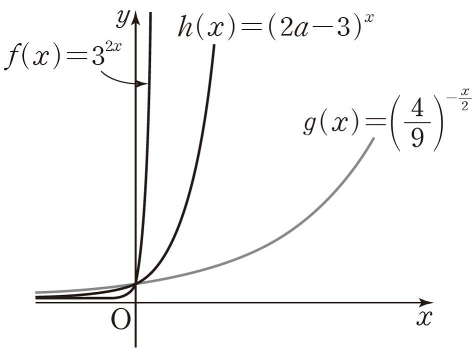
3) 기울기

$\dfrac{f(1)}{1}$로 해석을 하면 기울기로 표현할 수 있습니다,



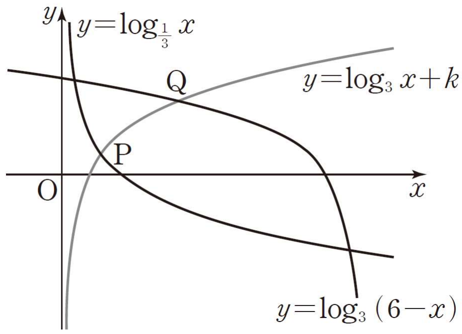
수능특강

1. 3이상의 자연수 a에 대하여 세 함수 $f(x)=3^{2x}$, $g(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$, $h(x)=(2a-3)^{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같도록 하는 모든 자연수 a의 개수는?



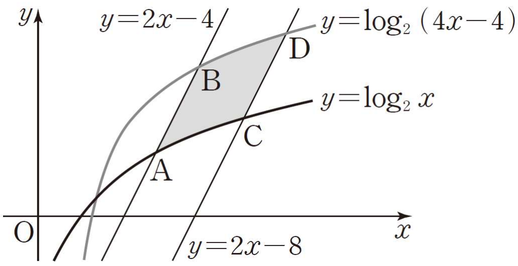
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

2. 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x+k$의 그래프가 두 함수
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$,
$y=\log_3(6-x)$
의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 값의 비가 1 : 3일 때, 실수 k의 값은? (단, $-3<k<3$)



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. 그림과 같이 제1사분면에서 직선 $y=2x-4$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2x-8$이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는?

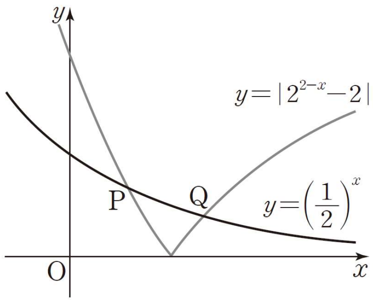


① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{3}$
④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

4. 그림과 같이 두 곡선

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y=\left|2^{2-x}-2\right|$$

가 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $x_1<1<x_2$　　ㄴ. $y_2>\frac{1}{2}$　　ㄷ. $x_1>\frac{1}{2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

5. 자연수 n에 대하여 직선 $y=t$ (t는 실수)와 두 곡선 $y=\log_3 x$, $y=\log_3(x-n)$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 R라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

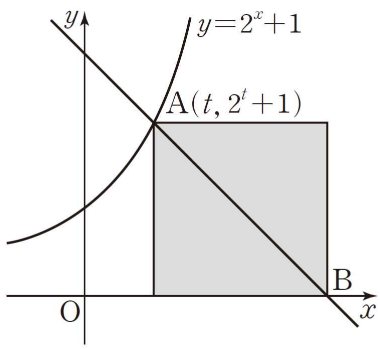
(가) $1 \leq n \leq 50$
(나) 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RQ}} \geq 20$이다.

6. 함수 $y=\log_2(2x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 직선 $y=2$일 때, $f(a-2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{5}{2}$　　② 3　　③ $\frac{7}{2}$

④ 4　　⑤ $\frac{9}{2}$

7. 함수 $y=2^x+1$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ 2^t+1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 선분 AB를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이가 16일 때, 점 B의 x좌표는 $\log_2 a$이다. 양수 a의 값을 구하시오. (단, t는 실수이다.)



수능완성 (나)

8. 부등식

$$\log_2|x|+\log_2(x+20)\le 6$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는?

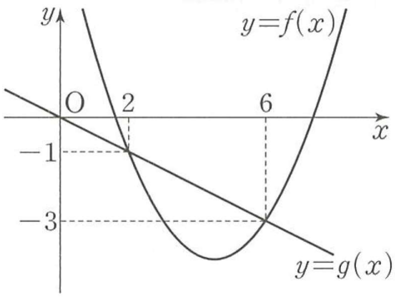
① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

9. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식

$$\log\{f(x)+2\}=\log\frac{f(x)\{g(x)\}^2+8}{\{f(x)\}^2-2f(x)+4}$$

의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오

(단, $f(2)=g(2)=-1$, $f(6)=g(6)=-3$



10. 함수 $f(x)=5^x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $ax+by+1=0$이다. $a+b$의 값은?

(단, k, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

11. 두 함수

$$f(x)=2^{x-a},\ g(x)=\log_2 x+a$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 교점 중 한 점의 x좌표가 4일 때, $f(8)+g(8)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

12. 두 함수

$$f(x)=3^{ax-2}+1,\ g(x)=\log_9(x-1)+1$$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=-x+12$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A의 x좌표가 2일 때, 선분 AB의 길이는? (단, a는 양수이다.)

① $6\sqrt{2}$ ② $7\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}$
④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

수능완성 (가)

13. 함수 $f(x)=5^{x-a}+\frac{23}{12}$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점 A, B에서 만나고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 5^a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

14. 두 집합

$A=\{(x, y) \mid y=9^x, x$는 실수$\}$

$B=\{(x, y) \mid y=\log_9 x, x>0\}$

에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

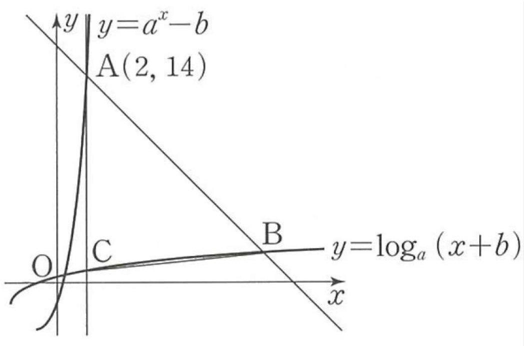
ㄱ. $(a, b)\in A$이고, $ab<0$이면 $a^2b>0$이다.

ㄴ. $(a, b)\in B$이면, $\left(\frac{b}{2}, \sqrt{a}\right)\in A$이다.

ㄷ. $(a, b)\in A$, $(b+6, 2a)\in B$이면, $a+b=\frac{7}{2}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $a>1$, $b>1$인 두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=a^x-b$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(2, 14)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 78일 때, $a\times b$의 값을 구하시오.



정답

1) [정답] ③

2) [정답] ③

3) [정답] ④

4) [정답] ⑤

5) [정답] 33

6) [정답] ①

7) [정답] 48

8) [정답] ①

9) [정답] 5

10) [정답] ②

11) [정답] 69

12) [정답] ③

13) [정답] 300

14) [정답] ⑤

15) [정답] 8