Chapter 4

삼각함수의 활용

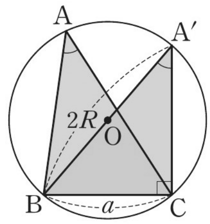
1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

[증명]

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R, 점 B와 중심 O를 지나는 직선이 원과 만나는 점을 A′이라고 할 때, ∠A의 크기에 따라 다음과 같이세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

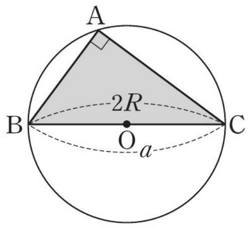


(i) $0<A<\frac{\pi}{2}$일 때,

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 원주각의 성질에 의하여

$A=A'$이고 $\angle \mathrm{BCA'}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin A=\sin A'=\frac{a}{2R}$

이다. 따라서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이다.

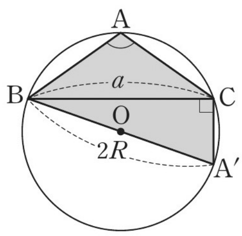


(ii) $A=\frac{\pi}{2}$일 때,

직각삼각형 ABC에서 $a=2R$이므로

$$\sin A=1=\frac{a}{2R}$$

이다. 따라서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이다.



(iii) $\frac{\pi}{2}<A<\pi$일 때,

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 사각형 ABA′C는

원에 내접하는 사각형이므로 $A=\pi-A'$이다. 이때

$\angle \mathrm{BCA'}=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin A=\sin(\pi-A')=\sin A'=\frac{a}{2R}$$

이다. 따라서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이다.

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립함을 알 수 있다.

같은 방법으로 하면 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$, $\dfrac{c}{\sin C}=2R$임을 확인할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 사인법칙이라고 한다.

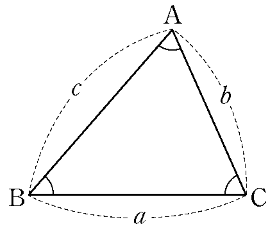
2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

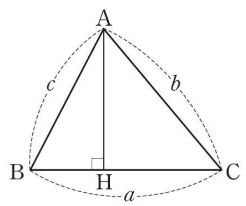
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



[증명]

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 대변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고 $B<\dfrac{\pi}{2}$일 때, $\angle$C의 크기에 따라 다음 세 가지 경우로 나누어 생각해보자.

(i) $0<C<\dfrac{\pi}{2}$일 때,



$\overline{AH}=b\sin C$,

$\overline{BH}=a-\overline{CH}=a-b\cos C$

이고, 삼각형 ABH는 직각삼각형이므로 $c^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$=(a-b\cos C)^2+(b\sin C)^2$

$=a^2+b^2(\sin^2 C+\cos^2 C)^2-2ab\cos C$

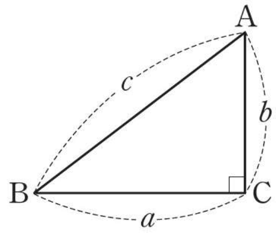
$=a^2+b^2-2ab\cos C$ 이다.

(ii) $C=\dfrac{\pi}{2}$일 때,

삼각형 ABC는 $\angle$C가 직각인 직각삼각형이고

$\cos C=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$이므로

$c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 이다.



(iii) $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$일 때,

$\overline{AH}=b\sin(\pi-C)=b\sin C$,

$$\overline{\mathrm{BH}} = a + \overline{\mathrm{CH}}$$
$$= a + b\cos(\pi - C) = a - b\cos C$$

이고, 삼각형 ABH는 직각삼각형이므로 $c^2 = \overline{\mathrm{BH}}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2$

$$= (a - b\cos C)^2 + (b\sin C)^2$$

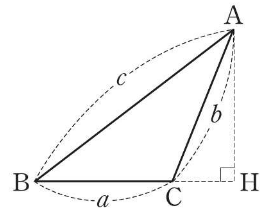
$$= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\angle \mathrm{C}$의 크기에 관계없이

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

가 성립함을 알 수 있다.



3. 삼각형의 넓이

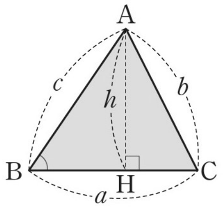
삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

[증명]

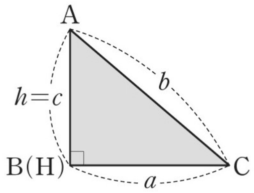
삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 대변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H,
$\overline{\mathrm{AH}}=h$라고 할 때, $\angle\mathrm{B}$의 크기에 따라 다음 세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

(ⅰ) $0<B<\frac{\pi}{2}$일 때,



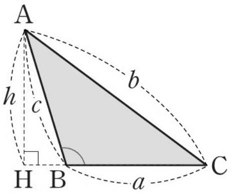
$h=c\sin B$

(ⅱ) $B=\frac{\pi}{2}$일 때,



$h=c=c\sin B$

(ⅲ) $\frac{\pi}{2}<B<\pi$ 일 때,



$h=c\sin(\pi-B)=c\sin B$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\angle\mathrm{B}$의 크기에 관계없이 $h=c\sin B$이므로 삼각형 ABC의 넓이
를 S라고 하면 $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin B$이다.

같은 방법으로 하면 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$도 성립함을 확인할 수 있다.

4. 기하를 해석하는 방법

기하문제는 크게 두 가지 방법이 있습니다.
(벡터는 제외..)

각, 길이, 넓이	직각○ : 피타고라스 / 삼각비 / 닮음 / 넓이
	직각× : 닮음 / 넓이 / 코사인법칙 / 사인법칙
좌표	도형의 방정식

문제 출제의도에 맞는 관점을 선택하는 것이 매우 중요합니다.

[예] 2020년도 9월 (가) 15번

함수 $y=e^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$
(나) $\angle\mathrm{AOB}=90°$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① e ② $\frac{3}{\ln 3}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$ ④ $\frac{5}{\ln 5}$ ⑤ $\frac{e^2}{2}$

만약 이 문제를 좌표를 잡고 풀면, 계산이 복잡할 수 있습니다.

(가) 조건을 거리공식으로,
(나) 조건을 기울기로 해석하여 계산하면

답이 나옵니다.

하지만, 이 문제를 풀기 전에

어떤 관점에서 해석할지

생각을 했다면,
계산이 복잡해서 시행착오를 겪고, 문제를 다른 관점에서 해석했다면

(가) 조건과
(나) 조건을 이용하여

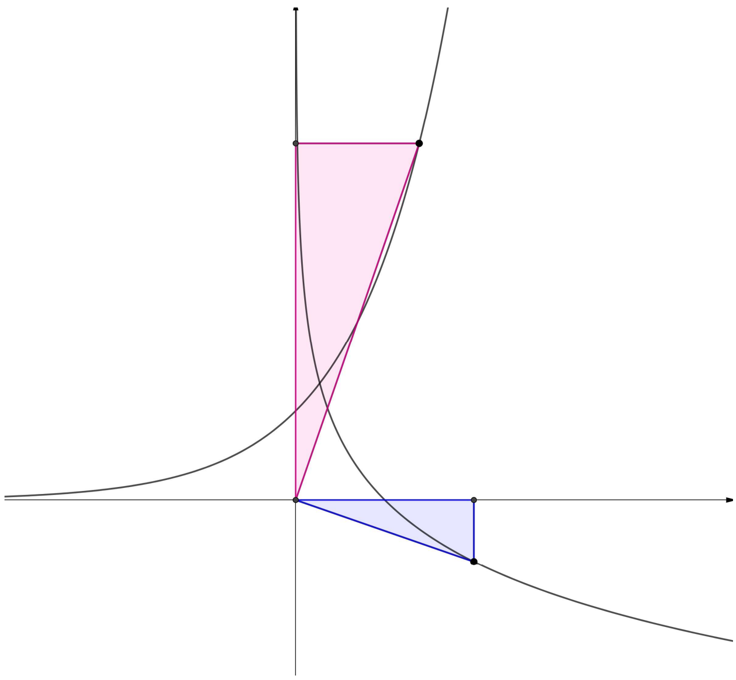
보조선 = 직각을 찾는다!

직각을 포함한 보조선을 생각하면,

직각삼각형을 포함한 삼각형의 닮음을 이용하여.
좌표를 간단하게 잡을 수 있습니다.

물론, 대칭을 이용하여 한 번에 좌표의 관계를 볼 수 있지만,

현실적으로 이 직각삼각형을 그리는 것이 맞다고 봅니다.



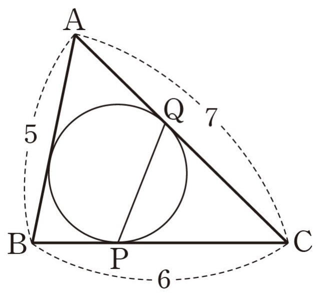
작년까지는 제2 코사인과 사인법칙이 출제범위에 들어가지 않아, 직각만 찾으면 되었지만, 이제는 직각을 찾지 않아도 도형을 해석하는 방법을 배웠습니다.

수능특강

1. 그림과 같이

$\overline{AB}=5, \overline{BC}=6, \overline{CA}=7$

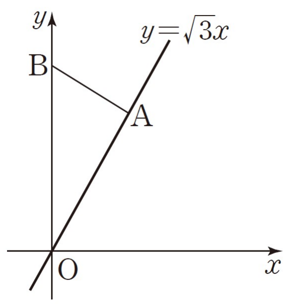
인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 CA와 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?



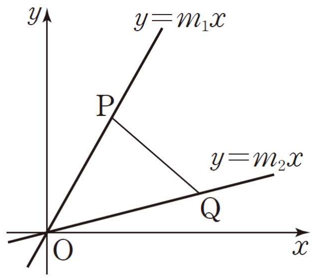
① $\frac{6\sqrt{7}}{7}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

④ $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

2. 그림과 같이 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 제 1사분면의 점 A와 y좌표가 양수인 y축 위의 점 B가 있다. $\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족시키는 좌표평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AB}=3$일 때, 선분 OP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



3. 두 양수 m_1, m_2에 대하여 그림과 같이 직선 $y=m_1x$ 위의 제 1사분면의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.)



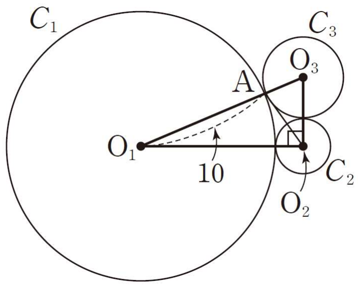
(가) 두 직선 $y=m_1x$, $y=m_2x$가 이루는 예각의 크기는 45°이다.

(나) $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

선분 OP의 길이의 최댓값이 M일 때, M^2의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

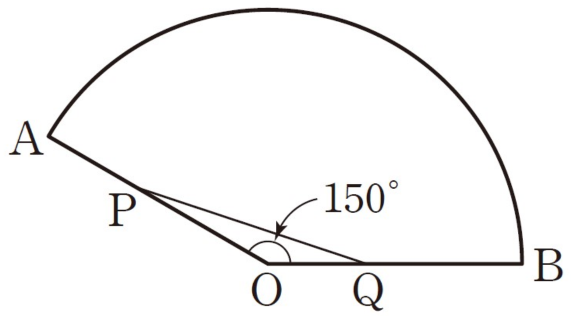
4. 그림과 같이 넓이가 30이고, $\angle O_1O_2O_3=90^\circ$ 인 직각삼각형 $O_1O_2O_3$이 있다. 중심이 O_1인 원 C_1과 중심이 O_2인 원 C_2가 선분 O_1O_2 위의 한 점에서 만나고, 원 C_2와 중심이 O_3인 원 C_3이 선분 O_2O_3 위의 한 점에서 만난다. 두 원 C_1, C_3이 선분 O_1O_3 위의 한 점 A에서 만나고, $\overline{O_1A}=10$일 때, $\overline{O_2A}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



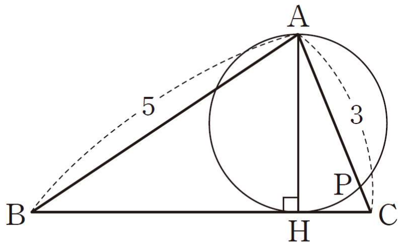
5. 그림과 같이 중심각의 크기가 150°인 부채꼴 AOB에서 선분 OA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BQ}}$
(나) 부채꼴 AOB의 넓이와 삼각형 POQ의 넓이의 비는 $125\pi : 18$이다.

$\overline{\mathrm{OP}} > \overline{\mathrm{OQ}}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



6. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$이고, $\cos(\angle CAB)=\frac{1}{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는?

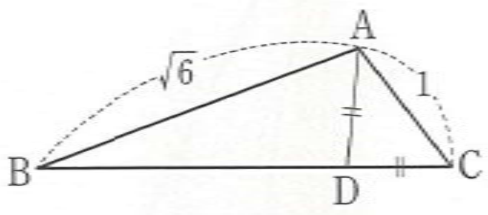


① $\frac{18}{7}$ ② $\frac{37}{14}$ ③ $\frac{19}{7}$

④ $\frac{39}{14}$ ⑤ $\frac{20}{7}$

수능완성 (나)

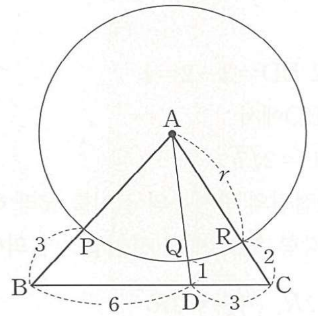
7. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=1$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=\overline{CD}$일 때, 선분 BC의 길이는?



① $\frac{8}{3}$　　② $\frac{17}{6}$　　③ 3

④ $\frac{19}{6}$　　⑤ $\frac{10}{3}$

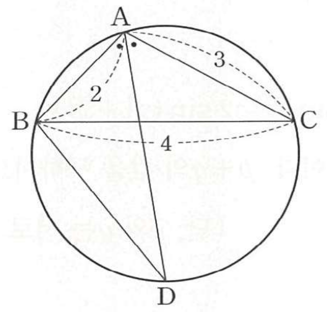
8. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=3$이다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 세 선분 AB, AD, AC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, $\overline{PB}=3$, $\overline{QD}=1$, $\overline{RC}=2$이다. r의 값은?



① $\frac{7}{2}$　　② 4　　③ $\frac{9}{2}$

④ 5　　⑤ $\frac{11}{2}$

9. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 원 위의 한 점 D가 $\angle BAD=\angle DAC$를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



| 보기 |

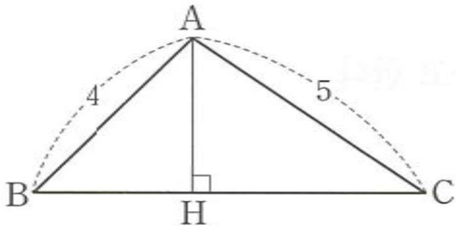
ㄱ. $\cos(\angle BAC)=-\dfrac{1}{4}$

ㄴ. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$이다.

ㄷ. $\overline{BD}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{5}$일 때, 선분 AH의 길이는?



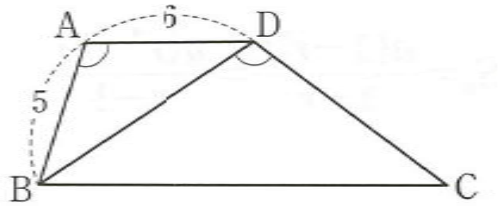
① $\frac{8\sqrt{2}}{7}$　　② $\frac{8\sqrt{3}}{7}$　　③ $\frac{16}{7}$

④ $\frac{8\sqrt{5}}{7}$　　⑤ $\frac{8\sqrt{6}}{7}$

11. 그림과 같이 사각형 $ABCD$가

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AD}=6,\ \cos(\angle BAD)=\cos(\angle BDC)=-\frac{1}{3}$$

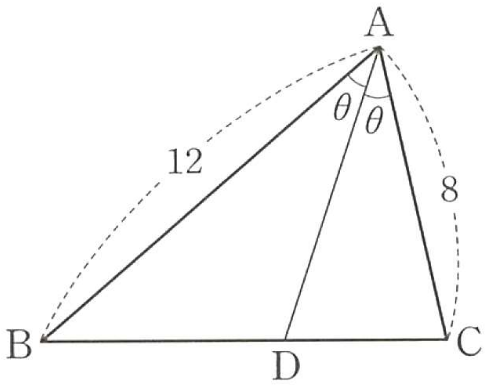
을 만족시킨다. 사각형 $ABCD$의 넓이가 $35\sqrt{2}$일 때, 선분 CD의 길이는?



① 8　　② $\frac{25}{3}$　　③ $\frac{26}{3}$　　④ 9　　⑤ $\frac{28}{3}$

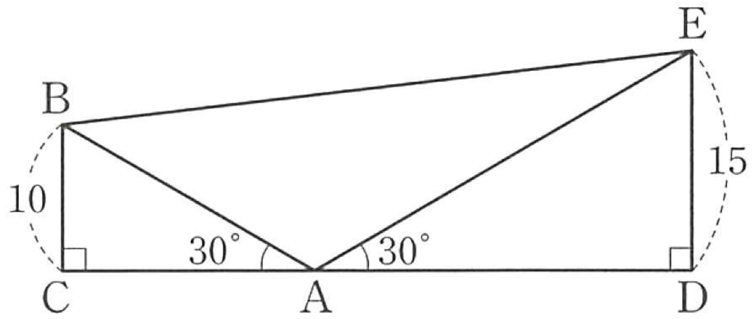
수능완성 (가)

12. 그림과 같이 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=8$을 만족시킬 때, $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하고, $\angle DAB=\theta$라 하자. $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{8}{5}$일 때, 선분 AD의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



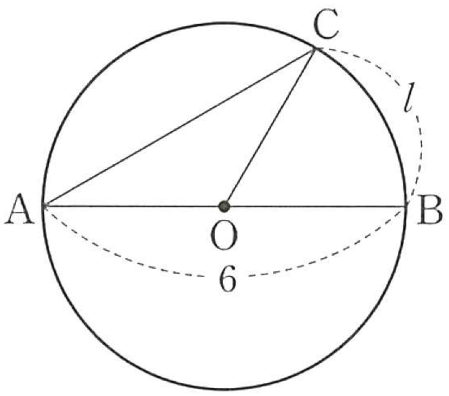
13. 그림과 같이 두 직각삼각형 ABC와 ADE가 한 꼭짓점 A를 공유하고, 세 점 C, A, D 가 한 직선 위에 있도록 놓여 있다.

$\overline{BC} = 10$, $\overline{DE} = 15$이고, $\angle CAB = \angle EAD = 30°$일 때, 선분 BE의 길이는?



① 40　② $10\sqrt{17}$　③ $30\sqrt{2}$　④ $10\sqrt{19}$　⑤ $20\sqrt{5}$

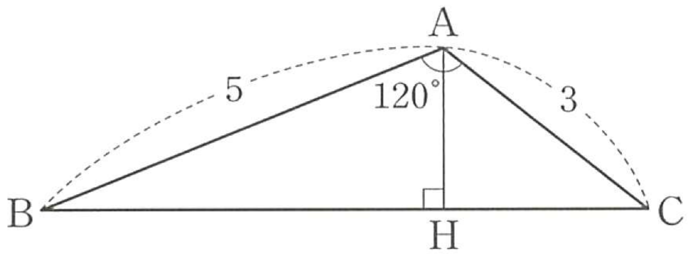
14. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 6이고 중심이 O인 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}^2 = 18 + 9\sqrt{2}$일 때, 부채꼴 OBC에서 호 BC의 길이를 l이라 하자. l의 값은?
(단, 부채꼴 OBC의 중심각의 크기는 90°보다 작다.)



① $\frac{2}{3}\pi$　　② $\frac{3}{4}\pi$　　③ $\frac{4}{5}\pi$　　④ $\frac{5}{6}\pi$　　⑤ $\frac{6}{7}\pi$

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$, $\angle A=120°$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 HC의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



정답

1) [정답] ③

2) [정답] 3

3) [정답] 32

4) [정답] 305

5) [정답] 8

6) [정답] ①

7) [정답] ③

8) [정답] ④

9) [정답] ⑤

10) [정답] ⑤

11) [정답] ②

12) [정답] 217

13) [정답] ④

14) [정답] ②

15) [정답] 47