2013학년도 대학수학능력시험 수리영역 공통 30번 문항 해설

(가) 조건에서 x좌표와 y좌표가 서로 같다고 하였으므로 문제에 주어진 부등식에서 y대신 x를 대입합니다.

두 함수 $y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 역함수 관계입니다. 그러면 $2^x-n \le x$와 $x \le \log_2(x+n)$은 서로 동치관계임을 알 수 있습니다. 따라서 지수함수와 로그함수 어느 한 쪽만을 이용하여 풀어도 됩니다.

저는 지수함수를 이용하여 풀겠습니다.

$2^x \le x+n$**이므로, $x>-n$입니다. ($\because 2^x>0$) 따라서 x의 최솟값은 $-n+1$이 됩니다.**

이제 문제는 x의 최댓값을 구하는 것입니다. 이 때, x의 최댓값을 미리 정하고, 이를 만족하는 n의 범위를 구합니다. 예를 들어, x의 최댓값이 k라면 $2^k \le k+n$이고 $2^{k+1}>k+1+n$이어야 합니다.

1부터 30까지의 자연수 n에 대하여

(1) x의 최댓값이 1인 경우

$2 \le 1+n$, $4>2+n$**이므로 이를 만족하는 n=1**

$\therefore a_1=2$

(2) x의 최댓값이 2인 경우

$4 \le 2+n$, $8>3+n$**이므로 이를 만족하는 n=2, 3, 4**

이때 a_n은 $-n+1$부터 2까지의 정수의 개수이므로 $a_n=n+2\,(2 \le n \le 4)$

(3) x의 최댓값이 3인 경우

$8 \le 3+n$, $16>4+n$**이므로 이를 만족하는 n은 5~11**

이때 a_n은 $-n+1$부터 3까지의 정수의 개수이므로 $a_n=n+3\,(5 \le n \le 11)$

(4) x의 최댓값이 4인 경우

$16 \le 4+n$, $32>5+n$**이므로 이를 만족하는 n은 12~26**

이때 a_n은 $-n+1$부터 4까지의 정수의 개수이므로 $a_n=n+4\,(12 \le n \le 26)$

(5) x의 최댓값이 5인 경우

$32 \le 5+n$, $64>6+n$**이므로 이를 만족하는 n=27, 28, 29, 30**

이때 a_n은 $-n+1$부터 5까지의 정수의 개수이므로 $a_n=n+5\,(27 \le n \le 30)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = 573$$