一擊必殺 13가형 해설

1	④	9	⑤	17	④	25	51
2	②	10	③	18	①	26	7
3	③	11	①	19	⑤	27	23
4	②	12	④	20	②	28	40
5	②	13	④	21	⑤	29	16
6	①	14	③	22	14	30	573
7	①	15	⑤	23	28		
8	⑤	16	③	24	36		

1. 행렬의 연산

$2A+B=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 7입니다.

정답 ④

2. 삼각함수의 배각공식 이용하기

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

정답 ②

3. 내분점 공식 적용하기

두 점 $\mathrm{A}(a,1,3)$, $\mathrm{B}(a+6,4,12)$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2(a)+1(a+6)}{1+2},\ \frac{1(4)+2(1)}{1+2},\ \frac{1(12)+2(3)}{1+2}\right)$$

이고, 이것이 $(5,2,b)$와 같으므로

$a=3$, $b=6$입니다. 따라서 $a+b=9$

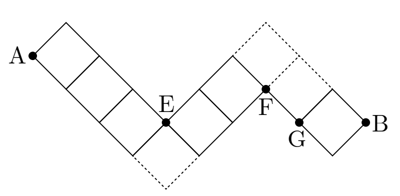
정답 ③

4. 치환을 이용한 무리방정식 해결

$x^2-2x=t$로 치환하면 주어진 무리방정식은 $t+2\sqrt{t}=8$이 됩니다. $t-8=-2\sqrt{t}$의 양변을 제곱하고 이항하면 $t^2-20t+64=0$을 얻고, 여기서 $t=4$, $t=16$을 얻습니다. 그런데 $t=16$은 무연근이므로 $t=4$만이 무리방정식의 해가 됩니다. 따라서 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 실근의 곱을 구하면 -4가 됩니다.

정답 ②

5. 같은 것을 포함한 순열의 최단경로 문제에의 적용



점선으로 표시된 영역을 지나가지 않으면서 A에서 B로 이동해야 합니다. A에서 E까지 이동하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{1!3!}=4$가지, E에서 F까지 이동하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{1!2!}=3$가지, G에서 B까지 이동하는 방법의 수는 $\dfrac{2!}{1!1!}=2$가지이므로 구하는 경우의 수는 $4\times3\times2=24$가지입니다.

정답 ②

6. 쌍곡선의 접선의 방정식

쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b,1)$에서의 접선의 방정식은 $bx-4y=a$입니다. 이 직선의 기울기는 $\dfrac{b}{4}$입니다. 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$입니다. 점근선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$ 또는 $-\dfrac{1}{2}$인데 이것들 중 하나와 $\dfrac{b}{4}$의 곱이 -1이 되어야 합니다. 그런데 $\dfrac{b}{4}$는 양수이므로 $-\dfrac{1}{2}$를 택해서 곱하면 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(\dfrac{b}{4}\right)=-1$에서 $b=8$을 얻습니다. $(8,1)$을 쌍곡선의 식에 대입하면 $a=60$을 얻습니다.

따라서 $a+b=68$

정답 ①

7. 로그의 실생활 문제에의 적용

문제에서 주어진 숫자들을 식에 잘 대입하기만 하면 됩니다. 첫 번째 상황을 식에 대입하면

$365=20+k\log\left(8\times\dfrac{9}{8}+1\right)=20+k$에서 $k=345$를 얻습니다. 두 번째 상황을 식에 대입하면

$710=20+k\log(8a+1)=20+345\log(8a+1)$에서

$\log(8a+1)=2$, $a=\dfrac{99}{8}$를 얻습니다.

정답 ①

8. 조건부 확률 이용하기

구하는 확률은

$$\frac{\text{버스로 등교한 학생이 지각할 확률}}{\text{학생이 지각할 확률}}$$

입니다. 버스로 등교한 학생이 지각할 확률과 걸어서 등교한 학생이 지각할 확률의 합이 분모에, 버스로 등교한 학생이 지각할 확률이 분자에 가면 됩니다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{0.6\times\frac{1}{20}}{0.6\times\frac{1}{20}+0.4\times\frac{1}{15}}=\frac{9}{17}\text{입니다.}$$

정답 ⑤

9. 합성변환의 행렬 구하기, 직선을 일차변환에 의해 옮기기

약간 계산이 복잡한 문항입니다.

일차변환 f를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$이고 일차변환 g를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$입니다. 따라서 합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\text{입니다.}$$

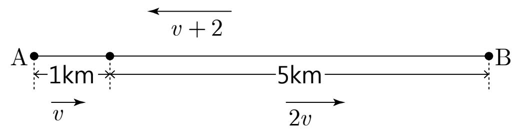
$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\\\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\end{pmatrix}$를 얻습니다. 여기서 얻은 x, y를 직선의 방정식에 대입하면 $\left(\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\dfrac{1}{2}y'\right)+5=0$을 얻고, 여기서 $'$을 없애면 변환된 직선의 방정식 $\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)y+5=0$을 얻습니다.

따라서 $a+2b=\dfrac{5}{2}$

정답 ⑤

10. 분수부등식의 실생활에의 적용



A에서 B까지 가는 속력을 v(km/s)라 하면 A에서 1km 지점까지 가는데 걸리는 시간은 $\dfrac{1}{v}$, 1km 지점에서 B까지 가는데 걸리는 시간은 $\dfrac{5}{2v}$, B에서 A로 돌아오는데 걸리는 시간은 $\dfrac{6}{v+2}$입니다. 따라서 부등식을 $\dfrac{1}{v}+\dfrac{5}{2v}+\dfrac{6}{v+2}\le\dfrac{5}{2}$로 세울 수 있습니다. $\dfrac{7}{2v}+\dfrac{6}{v+2}\le\dfrac{5}{2}$로 간단히 할 수 있고, 양변에 2를 곱하면 $\dfrac{7}{v}+\dfrac{12}{v+2}\le5$가 됩니다. 이것을 이항하고 통분하여 정리하면 $\dfrac{7(v+2)+12v-5v(v+2)}{v(v+2)}\le0$이 됩니다.

즉 $\dfrac{5v^2-9v-14}{v(v+2)}\ge0$, $\dfrac{(5v-14)(v+1)}{v(v+2)}\ge0$이고, v가 양수이므로 $v\ge\dfrac{14}{5}$를 얻습니다.

정답 ③

11. 곱의 법칙과 합의 법칙을 이용해서 확률 계산하기

두 공의 색이 다를 확률은 $\dfrac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$,

두 공의 색이 같을 확률은 $\dfrac{{}_3C_2+{}_4C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$

입니다. 동전을 세 번 던졌을 때 앞면이 2개 나올 확률은 ${}_3C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{8}$, 동전을 두 번 던졌을 때 앞면이 2개 나올 확률은 ${}_2C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$입니다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{28}$입니다.

정답 ①

12. 적분 계산하기

양변에 x를 곱하면 $xf(x)=xe^{x^2}+x\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt$가 됩니다. $\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt=a$로 치환하면 $xf(x)=xe^{x^2}+ax$입니다. 양변을 0에서 1까지 적분하면 좌변은 a가 되고 우변은

$$\int_0^1\left(xe^{x^2}+ax\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)+\frac{1}{2}a$$

가 됩니다. 따라서 $a=\dfrac{1}{2}(e-1)+\dfrac{1}{2}a$에서 $a=e-1$이 됩니다.

정답 ④

13. 정규분포를 따르는 확률변수의 성질과 평균, 분산과의 관계 이용하기

확률변수 X는 정규분포를 따르고

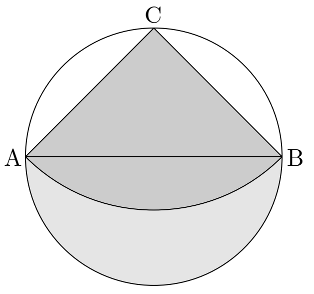
$\mathrm{P}(X \geq 64) = \mathrm{P}(X \leq 56)$이므로 $\mathrm{E}(X) = \dfrac{64+56}{2} = 60$

입니다. 또한 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 16$이므로 $\sigma = 4$입니다. 따라서 $\mathrm{P}(X \leq 68) = \mathrm{P}(X \leq m + 2\sigma)$ $= \mathrm{P}(X \leq m) + \mathrm{P}(m \leq X \leq m+2\sigma) = 0.9772$입니다.

정답 ④

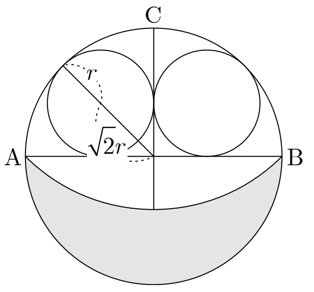
14. 무한등비급수의 도형에의 활용

먼저 첫 번째 도형의 넓이를 구해야 합니다.



첫 번째 도형은 반지름이 1인 원의 반쪽과 넓이가 1인 삼각형의 합(위 그림의 두 부분의 합)에서 부채꼴 CAB를 뺀 것이므로 그 넓이는

$\dfrac{\pi}{2} + 1 - \dfrac{\pi}{2} = 1$입니다.



도형이 줄어드는 비율을 구하기 위해 작은 원의 반지름을 구해야 합니다. 위 그림에서 $(1+\sqrt{2})r = 1$이므로 $r = \sqrt{2} - 1$입니다. 따라서 작은 원의 넓이는 큰 원 넓이의 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$배입니다. 이 원 내부에 큰 원에서 했던 것과 같은 방법으로 얻은 도형의 넓이도 $3 - 2\sqrt{2}$배가 됩니다. 그런데 도형의 개수가 시행을 반복할수록 2배로 늘어나므로 이 무한등비급수의 공비는 $2(3-2\sqrt{2})$입니다. 첫째항이 1이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1 - 2(3-2\sqrt{2})} = \dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$입니다.

정답 ③

15. 합성함수의 연속성

$g(f(x))$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = g(f(0))$이 돼야 하고, 여기서 $g(1) = g(0)$을 얻습니다. 마찬가지로 $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x)) = g(f(1))$이 돼야 하므로 $g(0) = g(-1)$을 얻습니다. 즉, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $g(0) = g(1) = g(-1) = 3$를 만족시킵니다. 따라서 $g(x) = x(x-1)(x+1) + 3$이므로 $g(3) = 27$

정답 ⑤

16. 행렬의 성질 이용하기

ㄱ. 첫 번째 조건식의 좌변을 A로 묶으면 $A(2A+B) = E$가 됩니다.
따라서 $A^{-1} = 2A + B$입니다. (참)

ㄴ. 첫 번째 식에서 ㄱ에 의해 A, $2A+B$가 서로 역행렬 관계이므로 교환법칙이 성립합니다.
따라서 $A(2A+B) = (2A+B)A$에서 $AB = BA$임을 이끌어낼 수 있고, 이것을 두 번째 식에 이용하면 $2AB = 2A + E$가 됩니다. E만 남기고 좌변으로 이항하고 A로 묶으면 $A(2B - 2E) = E$가 됩니다. 여기서 $A^{-1} = 2B - 2E$임을 알 수 있습니다.
ㄱ에서 구한 A^{-1}과 방금 구한 것이 같다고 놓으면 $2B - 2E = 2A + B$에서 $B = 2A + 2E$를 얻을 수 있습니다. (참)

ㄷ. 방금 ㄴ을 구하는 과정에서 $A^{-1} = 2B - 2E$를 얻었습니다. 즉, $(B-E)^2 = \dfrac{1}{4}(A^{-1})^2$입니다.
$(B-E)^2 = O$이면 $(A^{-1})^2 = O$입니다. 그런데 $(A^{-1})^2 = O$가 된다면 행렬 A^{-1}의 역행렬은 존재하지 않아야 합니다. 그런데 행렬 A^{-1}의 역행렬은 존재하므로 방금 설정한 가정은 틀렸습니다. 따라서 $(A^{-1})^2 \neq O$이고, $(B-E)^2 \neq O$입니다. (거짓)

정답 ③

17. 수열의 일반항 구하는 과정 이해하기

$a_{n+1} - a_n = \left(n\cdot 2^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k}\right) - \left((n-1)\cdot 2^{n-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{a_k}{k}\right)$

$= 2n \cdot 2^{n-1} - (n-1)2^{n-1} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{a_k}{k}\right)$

$= (n+1)\cdot 2^{n-1} + \dfrac{a_n}{n}$입니다.

따라서 (가)$= (n+1)2^{n-1}$입니다.
이것을 아래 식에 대입하면 $b_{n+1} - b_n = 2^{n-1}$을 얻습니다. 여기서 양변에 $n=2$, $n=3$, $\cdots$, $n = n-1$까지 대입한 것을 나열하면 아래와 같이

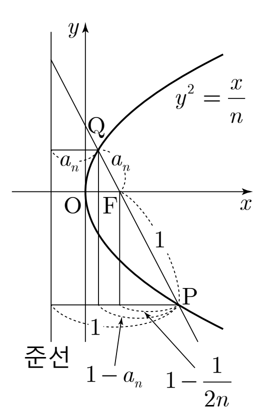
$b_3 - b_2 = 2^1$
$b_4 - b_3 = 2^2$
$\vdots$
$b_n - b_{n-1} = 2^{n-2}$

되고, 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하면 $b_n - b_2 = \sum\limits_{k=1}^{n-2} 2^k$가 되므로 $b_n = 2^{n-1} + 1 =$(나) 입니다.

따라서 $f(4) + g(7) = 40 + 65 = 105$입니다.

정답 ④

18. 포물선의 정의와 삼각형의 닮음



초점에서 준선까지의 거리는 $\dfrac{1}{2n}$이고 n이 자연수이므로 $\dfrac{1}{2n} < 1$입니다. 또한 점 P에서 준선까지의 거리는 1이므로 문제에서 제시한 상황은 왼쪽 그림과 같습니다.

Q에서 준선까지의 거리는 P에서 준선까지의 거리보다 작습니다.(즉, $a_n < 1$) 위 그림에서 선분 PQ를 빗변으로 하는 직각삼각형과 선분 PF를 빗변으로 하는 직각삼각형이 서로 닮음입니다.

따라서 $\dfrac{1-a_n}{1+a_n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2n}}{1}$이므로

$1 - a_n = (1+a_n)\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) = 1 + a_n - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{a_n}{2n}$을 얻고,

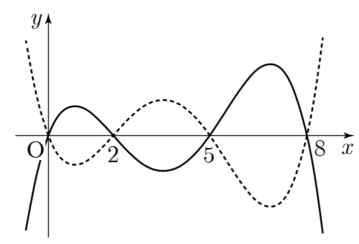
$\dfrac{1}{2n} = a_n\left(2 - \dfrac{1}{2n}\right)$을 얻습니다.

따라서 $\dfrac{1}{a_n} = 4n - 1$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{10} a_n = 210$입니다.

정답 ①

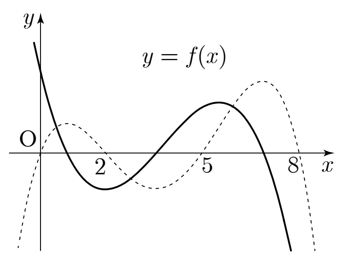
19. 적분과 미분과의 관계를 통해 함수의 그래프 추론하고 해석하기

ㄱ. $\int_0^x f(t)dt$는 삼차함수를 적분한 것이므로 $\int_0^x f(t)dt$는 사차함수가 됩니다. 그런데 이것에 절댓값을 씌운 그래프의 모양이 문제에 주어진 것과 같으므로, 함수 $y = \int_0^x f(t)dt$의 그래프는 아래 그림의 점선이나 실선 중 하나가 됩니다.



그래프로부터 함수 $\int_0^x f(t)dt$는 세 점에서 극값을 갖는다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 함수 $\int_0^x f(t)dt$의 도함숫값이 0이 되는 점은 세 개 존재합니다. 즉, 방정식 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = 0$은 서로 다른 세 실근을 갖습니다. (참)

ㄴ. 함수 $\int_0^x f(t)dt$의 $x=0$에서의 미분계수는 $f(0)$이고, 이 값은 문제 첫머리에서 주어진 $f(0) > 0$ 조건에 의해 양수가 됩니다.
따라서 함수 $y = \int_0^x f(t)dt$의 그래프는 위 그림의 두 가지 경우 중 $x=0$에서의 접선의 기울기가 양수인 것(실선)에 해당합니다.
(최고차항의 계수가 음수인 사차함수가 됩니다.) $\int_0^x f(t)dt$의 도함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



따라서 그래프로부터 $f'(0) < 0$입니다. (참)

ㄷ. 위 그래프로부터 생각할 수 있습니다. $x=1$ 근처에서 $f(x)$가 0이 되고, $x = 3.5$ 근처에서 또 0이 됩니다. 이 구간 내에서 $f(x)$는 음수이므로 $\int_1^3 f(t)dt < 0$입니다. 즉, $m=1$은 조건을 만족시키지 않습니다. $g(2) = g(5) = 0$이므로
$\int_0^5 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx = 0$입니다.
$f(2) < 0$이므로 $x=2$에서 2보다 약간 큰 구간까지의 정적분값은 음수가 됩니다. 그런데 2에서 5까지의 정적분값이 0이 되므로 2에서 4까지의 정적분값은 음수가 됩니다. 따라서 $m=2$도 조건을 만족시키지 않습니다.
2에서 3까지의 정적분값이 음수인 것은 그래프를 통해 직관적으로 알 수 있습니다. 2에서 3까지의 정적분값에 3에서 5까지의 정적분값을 더하면 0이 되므로 3에서 5까지의

정적분값은 양수가 되야 합니다. 따라서 $m=3$은 조건을 만족시킵니다. 4에서 6까지의 범위에서 $f(x)$는 양수이므로 이 구간에서의 정적분값도 양수이고, $m=4$도 조건을 만족시킵니다.

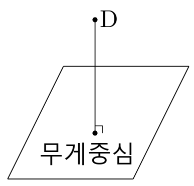
$g(5)=g(8)=0$이므로 $\int_5^8 f(x)dx=0$입니다.

5에서 7까지의 정적분값과 7에서 8까지의 정적분값을 더하면 0인데, 5에서 5보다 약간 큰 값까지의 정적분값은 양수이므로 5에서 7까지의 정적분값은 양수, 7에서 8까지의 정적분값은 음수입니다. 따라서 $m=5$도 조건을 만족시킵니다. 5에서 6까지의 정적분값은 양수이고, 이 값에 6에서 8까지의 정적분값을 더하면 0이므로 6에서 8까지의 정적분값은 음수입니다. $m>6$이면 m에서 $m+2$까지의 정적분값이 음수가 될 것이므로(함숫값이 계속 음수이므로) 더 이상 고려하지 않아도 됩니다. 따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$이 되도록 하는 자연수 m은 3, 4, 5의 3개입니다. (참)

정답 ⑤

20. 평면의 방정식과 직선의 방정식 이용하기

정사면체의 한 점에서 그 점을 포함하지 않는 점으로 수선의 발을 내리면 그 점이 무게중심입니다. 즉, 한 면의 무게중심을 지나고 그 면에 수직인 직선은 그 면에 포함되지 않은 정사면체의 다른 꼭짓점을 지나게 됩니다. 이 말은 무게중심 $(1, 1, 3)$을 지나고 평면 $2x-y+z=4$에 수직인 직선이 점 D를 지난다는 말입니다. 그런데 점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위의 점이므로, 앞에서 말한 직선과 평면 $x+y+z=3$의 교점이 점 D가 됩니다.



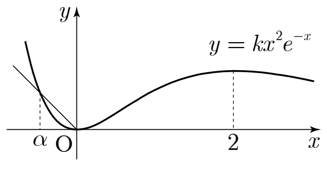
$2x-y+z=4$

$(1, 1, 3)$을 지나고 평면 $2x-y+z=4$에 수직인 직선의 방정식은 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}=t$ 에서 $x=2t+1$, $y=-t+1$, $z=t+3$입니다. 이것을 $x+y+z=3$에 대입하면 $t=-1$이 됩니다. 즉, 점 D의 좌표는 $(-1, 2, 2)$입니다. D에서 $(1, 1, 3)$에 이르는 거리는 $\sqrt{6}$입니다. 한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 한 꼭짓점에서 한 밑면에 내린 수선의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$이므로, $\frac{\sqrt{6}}{3}a=\sqrt{6}$에서 $a=3$입니다.

정답 ②

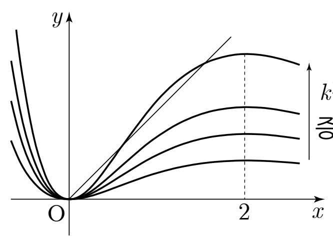
21. 새롭게 정의된 함수의 미분가능성, 조건을 만족시키는 접선의 방정식 구하기

$f'(x)=k(-x^2e^{-x}+2xe^{-x})$이고 $k>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대입니다. 여기서 얻은 정보를 바탕으로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같습니다.

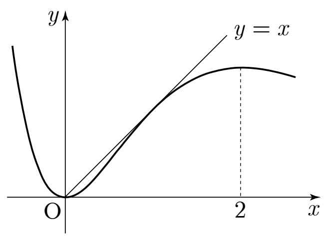


$(t, f(t))$에서 x축까지의 거리는 $|f(t)|$, y축까지의 거리는 $|t|$입니다. 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 제 2사분면에서 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $t=\alpha$ 근방에서 $g(t)=\begin{cases}|t| & (t\le\alpha)\\ |f(t)| & (t>\alpha)\end{cases}$입니다. 그런데 $\alpha<0$이고, 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\ge0$이므로 $t\le0$일 때 $g(t)=\begin{cases}-t & (t\le\alpha)\\ f(t) & (t>\alpha)\end{cases}$입니다. $t=\alpha$에서 미분가능하려면 $f'(\alpha)=-1$이어야 하는데 평균값의 정리에 의해 열린구간 $(\alpha, 0)$에 $f'(c)=1$인 c가 존재하고, t가 작아질수록 $f'(t)$의 값도 작아지므로 ($f'(t)$가 $t<0$에서 단조증가하므로) $f'(\alpha)=-1$일 수 없습니다. 따라서 $g(t)$는 양수 k값에 관계없이 항상 $t<0$인 어떤 t에서 미분가능하지 않습니다.

k값이 커지면 곡선은 그림처럼 위로 상승합니다.



k값이 커지다가 직선 $y=x$와 두 점에서 만나게 되면 함수 $g(t)$가 $t>0$에서 미분가능하지 않은 점이 두 개 더 생기게 됩니다. 따라서 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않으려면 곡선 $y=f(x)$의 $x>0$인 부분이 직선 $y=x$의 아래쪽에 있어야 합니다. 즉, 다음과 같은 상황이 될 때까지 k의 값이 커질 수 있습니다.



이제 원점을 지나는 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 k의 값을 찾으면 됩니다. 곡선 위의 점 $(a, f(a))\,(a>0)$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이고, 이 접선이 원점을 지난다는 조건에서 $f(a)=af'(a)$를, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 $(a, f(a))$에서 만난다는 조건에서 $f(a)=a$를 얻습니다. 두 조건으로부터 얻어지는 두 식 $ka^2e^{-a}=-ka^3e^{-a}+2ka^2e^{-a}$, $ka^2e^{-a}=a$를 연립해서 a를 구해야 합니다. $ka^2e^{-a}=a$를 첫 번째 식에 대입하면 $a=-a^2+2a$이므로 $a=1\,(\because a>0)$을 얻습니다. 따라서 $x=1$에서의 접선은 k값에 관계없이 항상 원점을 지납니다. $f'(1)=\frac{k}{e}=1$이 되는 k의 값을 찾으면 $k=e$입니다.

정답 ⑤

22. 미분 계산하기

$f'(x)=1+\ln x+13$이므로 $f'(1)=14$

정답 14

23. 삼각함수의 덧셈정리, 최대·최소

$f(x)=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\sin x$

$=\cos x+3\sqrt{3}\sin x$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{28}$입니다. 따라서 $a^2=28$

정답 28

24. 일차변환과 행렬

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$이고

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$이므로

$A^4=9E=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$입니다. 따라서 행렬 A^4가 나타내는 일차변환에 의해 점 $(5, -1)$은 $(45, -9)$로 옮겨집니다. $\therefore a+b=36$

정답 36

25. 모평균의 추정

신뢰구간의 양 끝점의 평균이 표본평균이므로 $m=\frac{100.4+139.6}{2}=120$입니다. 표본의 크기를 n이라 할 때, 모평균을 95%의 신뢰도로 추정하면 $120-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le 120+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$입니다.

따라서 $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.6$이므로 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$입니다.

모평균을 99%의 신뢰도로 추정하면

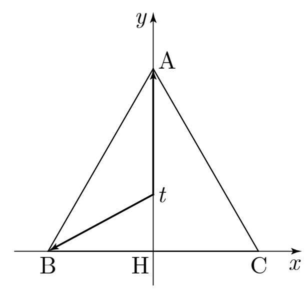
$120-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le 120+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$94.2\le m\le 145.8$이 됩니다. 따라서 95부터 145까지의 자연수의 개수를 구하면 $145-95+1=51$입니다.

정답 51

26. 벡터의 성분을 이용한 내적의 최대·최소 구하기

정삼각형 ABC를 가장 간단하게 좌표평면에 나타내면 A가 $(0, \sqrt{3})$, B는 $(-1, 0)$, C는 $(1, 0)$으로 놓을 수 있습니다. 이때, H는 $(0, 0)$이 됩니다.



점 P는 $(0, t)\,(0\le t\le\sqrt{3})$으로 놓을 수 있습니다. 그러면 $\overrightarrow{PA}=(0, \sqrt{3}-t)$, $\overrightarrow{PB}=(-1, -t)$가 되고, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=|t^2-\sqrt{3}t|$입니다. 주어진 범위에서 $t^2-\sqrt{3}t<0$이므로 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\sqrt{3}t-t^2$

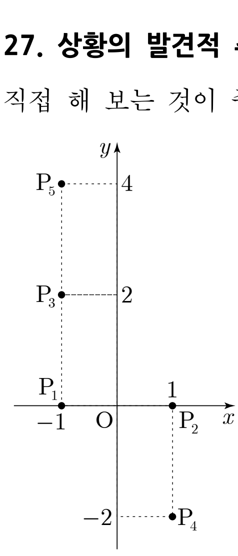
$=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$에서 최댓값 $\frac{3}{4}$을 얻습니다.

$\therefore p+q=7$

정답 7

27. 상황의 발견적 추론

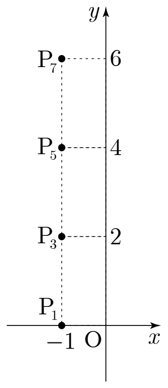
직접 해 보는 것이 중요한 문제입니다.



P_1, P_2의 중점은 원점이므로 P_3, P_4의 중점도 원점이 됩니다. 따라서 P_4의 좌표는 $(1, -2)$입니다.

P_2, P_3의 중점은 $(0, 1)$이므로 P_4, P_5의 중점이 $(0, 1)$이 되게 하는 P_5의 좌표는 $(-1, 4)$입니다.

P_3, P_4의 중점은 원점이므로 P_5, P_6의 중점이 원점이 되게 하는 P_6의 좌표는 $(1, -4)$입니다. P_4, P_5의 중점은 원점이므로 P_6, P_7의 중점이 원점이 되게 하는 P_7의 좌표는 $(-1, 6)$입니다.

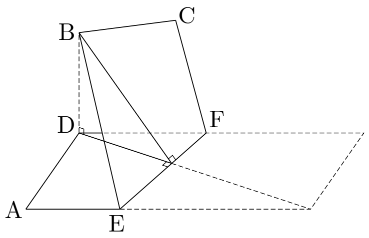


이것들을 좌표평면에 나타내 보면 n이 홀수일 때 P_n의 규칙을 찾을 수 있습니다. P_1에서 P_3이 될 때 x좌표는 변하지 않고 y좌표만 2만큼 증가했습니다. P_3에서 P_5가 될 때와 P_5에서 P_7이 될 때도 마찬가지입니다. 이로부터 n이 홀수일 때 P_n의 좌표는 $(-1, n-1)$임을 추론할 수 있습니다.

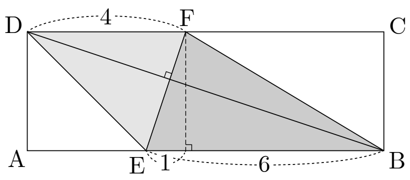
따라서 P_{25}의 좌표는 $(-1, 24)$입니다. $\therefore a+b=23$

정답 23

28. 삼수선의 정리 이용하기



점 F에 대한 정보는 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 D라는 것으로부터 알 수 있습니다.
직선 BD와 평면 AEFD가 수직이므로 점 B에서 직선 EF에 내린 수선의 발은 점 D에서 직선 EF에 내린 수선의 발과 일치합니다.



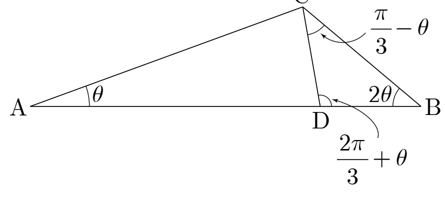
따라서 점 F는 직선 BD와 직선 EF가 수직이 되게 잡으면 됩니다. 그러면 $\overline{DF}=4$가 됩니다.
두 평면이 이루는 각은 평면 BEF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기와 같고, 삼각형 BEF의 평면 AEFD 위로의 정사영이 삼각형 DEF이므로

$\cos\theta=\dfrac{\text{삼각형 DEF의 넓이}}{\text{삼각형 BEF의 넓이}}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$입니다.

$\therefore 60\cos\theta=40$

정답 40

29. 도형과 삼각함수의 극한



$\angle ACB=\pi-3\theta$이므로 $\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}-\theta$,

$\angle BDC=\dfrac{2\pi}{3}+\theta$입니다. 삼각형 ABC에서

사인법칙을 쓰면 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$이므로

$\overline{BC}=\dfrac{\overline{AB}\times\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$입니다. 삼각형

BCD에서 사인법칙을 쓰면 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin D}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin B}$이므로

$$\overline{CD}=\frac{\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin2\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}=\frac{\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}$$ 입니다.

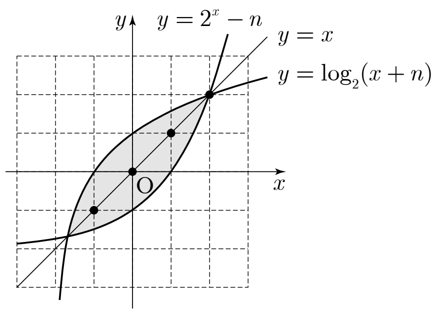
따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta\sin2\theta}{\theta\sin3\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$

입니다. $\therefore 27a^2=27\times\dfrac{16}{27}=16$

정답 16

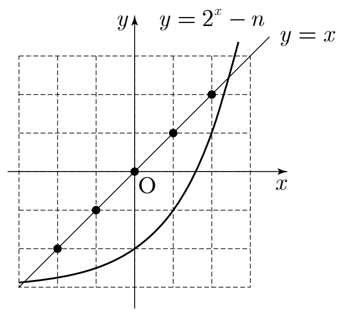
30. 지수로그 함수의 그래프와 조건을 만족시키는 점의 개수 세기

$y=2^x-n$에서 x와 y를 바꾸고 y에 대하여 정리하면 $y=\log_2(x+n)$입니다. 따라서 두 곡선 $y=2^x-n$, $y=\log_2(x+n)$은 서로 직선 $y=x$에 대하여 대칭입니다.



$n=2$일 때

집합 $\left\{(x, y)\,\middle|\,2^x-n\le y\le\log_2(x+n)\right\}$은 그림과 같이 두 곡선으로 둘러싸인 어두운 부분(경계 포함)에 속하는 점들의 집합이고, 구해야 하는 것은 이것들 중에서 x좌표와 y좌표가 같고(직선 $y=x$ 위에 있는) x좌표와 y좌표가 같은 점들의 개수입니다. 함수 2^x-n은 증가함수이므로 두 곡선의 교점은 곡선 $y=2^x-n$와 직선 $y=x$의 교점과 같습니다. 따라서 구해야 하는 점들은 곡선 $y=2^x-n$과 직선 $y=x$의 두 교점을 잇는 선분 위의 점들 중에서 x좌표와 y좌표가 정수인 것들입니다.



$n=3$일 때, $a_3=5$

$n=3$일 때는 위 그림과 같습니다. $n=2$일 때에 비해 $x<0$인 지점에서 조건을 만족시키는 점의 개수가 하나 늘었습니다. n이 1씩 커지면 조건을 만족시키는 점의 개수는 $x<0$인 부분에서 한 개씩 늘어날 것입니다. 따라서 $a_4=6$입니다.
그런데 n이 커지면서 $x>0$인 부분에서도 조건을 만족시키는 점의 개수가 변할 수 있습니다.
$n=5$이면 곡선 $y=2^x-n$이 $(3, 3)$을 지나는데, $(3, 3)$이 문제의 조건을 모두 만족시키기 때문에 구해야 하는 점에 포함됩니다. 따라서 $a_5=8$입니다. $(4, 4)$를 지나게 하는 n은 12, $(5, 5)$를 지나게 하는 n은 27입니다. 즉, 이 n들을 기준으로 $x>0$인 곳에서 점이 하나씩 더 생기면서 규칙이 바뀝니다. (각각 n이 $4\to5$, $11\to12$, $26\to27$로 변할 때) 이 정보를 바탕으로 a_n의 각 항을 나열해 보면 다음과 같습니다.

n	a_n	
1	2	
2	4	
3	5	
4	6	2증가
5	8	
6	9	
⋮	⋮	
11	14	2증가
12	16	
13	17	
⋮	⋮	
26	30	2증가
27	32	
28	33	
29	34	
30	35	

n이 1씩 커지면서 a_n도 1씩 커지는 게 일반적인데 어느 경우에는 n이 1 커질 때 a_n은 2만큼 증가합니다.
30항까지의 숫자들을 관찰해 보면 1부터 35까지의 수 중에서 1, 3, 7, 15, 31이 빠져 있음을 알 수 있습니다. 따라서 1에서 35까지의 자연수의 합에서 $1+3+7+15+31=57$을 뺀 것이 답입니다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n=\frac{35\times36}{2}-57=573$ 입니다.

정답 573