

시립대 오후 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 120분, 난이도 : normal ~ hard]

이름	김 기 대 T
----	---------

지원학과	수 학 과 / 예상합격컷 : 230~300점/400점 (과별 상이)
------	---------------------------------------

【 수험생 유의사항 】

1. 본 파일은 시립대 시험장 현장에서 본 시험지를 그대로 복기하였습니다.
2. 오후는 직접 현장응시했기 때문에, 복기와 풀이가 정확합니다.
3. 오전은 카더라에 의한 문제복기와 조교 풀이로 작성됐으므로, 다소 부정확할 수 있습니다.
오전 복기/ 해설 중 수정이 필요한 사항은 kidae6150@naver.com 으로 제보 바랍니다.



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (100점)

함수 $f(x) = x^4 + 2ax^3 - 3a^2x^2 + 4a^4 - 4a^3 + 1$ (단, $a > 0$)이 점 $(1, 1)$ 을 지나는 직선과 서로 다른 두 점에서 접한다고 할 때, 이 직선과 함수 $f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

[sol. 기대T 현장풀이]

점 $(1, 1)$ 을 지나는 직선을 $y = g(x)$ 라 하면 $g(x) = m(x - 1) + 1$ 로 나타낼 수 있다.

이 때, 함수 $y = f(x)$ 와 함수 $y = g(x)$ 가 두 점에서 접하므로, 접하는 두 점의 x 좌표를 $x = \alpha, x = \beta$ (단, $\alpha < \beta$)에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 = x^4 + 2ax^3 - 3a^2x^2 - mx + 4a^4 - 4a^3 + m$$

따라서 모든 계수들을 비교하면 다음과 같은 관계식을 이끌어낼 수 있다.

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = -2a \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = -3a^2 \\ 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 = m \\ \alpha^2\beta^2 = 4a^4 - 4a^3 + m \end{cases}$$

정리하면 $\alpha + \beta = -a$ 이고 $\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = a^2 + 2\alpha\beta = -3a^2$ 에 의해 $\alpha\beta = -2a^2$ 이므로 이 둘을 연립하면 $\alpha = -2a, \beta = a$ ($\because a > 0$)임을 알 수 있다.

(참고로 3번째 식을 정리하면 $m = 4a^3$ 임을 알 수 있으나 4번째 식에 모든 결과를 대입하면 a 에 대한 항등식이 나오게 되므로, a 의 값은 특정되지 않는다.)

$$\begin{aligned} (\text{넓이}) &= \int_{-2a}^a (x + 2a)^2(x - a)^2 dx \\ &= \int_0^{3a} x^2(x - 3a)^2 dx \\ &= \int_0^{3a} (x^4 - 6ax^3 + 9a^2x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}ax^4 + 3a^2x^3 \right]_0^{3a} \\ &= \frac{243}{5}a^5 - \frac{243}{2}a^5 + 81a^5 \\ &= \frac{81}{10}a^5 \end{aligned}$$

[문제 1 Comment]

항상 그랬듯 시립대의 1번은 자신감 고취용 문제이다. 적당히 쉬운 난이도.

다만 맘에 들지 않는 부분은, 왜 a 의 값이 특정 되지 않도록 했을까 하는 부분이다. 함수 $f(x)$ 의 상수항 부분을 조금만 다른 a 값으로 뺐으면 양수 a 의 값을 특정지을 수 있는데, 이 부분에서 나를 비롯한 많은 학생들이 의아해했다.

(이제라도까지 동원해서 a 가 특정되는지 확인해본건 안비밀)

[문제 2] (100점)

자연수 n ($n \geq 9$)에 대하여 집합 A_n 은 n 이하인 모든 자연수들을 원소로 갖는 집합이다.
 다음을 만족하는 함수 $f : A_n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 의 개수를 구하시오.

- (1) $\{k | f(k) = 0, k \in a_n\}$ 의 원소의 개수는 3이다.
 (2) $\{k | f(k) = 1, k \in a_n\}$ 의 원소의 개수는 3이다.
 (3) $\sum_{i=1}^k f(i) \geq k$

[sol]

조건(1), (2)를 통해, 함숫값이 2인 정의역의 원소의 개수는 $n-6$ 임을 알 수 있다.
 조건 (3)을 해석해보면, n 이하의 모든 자연수 k 에 대하여 함숫값의 평균이 항상 1 이상이 되도록 설정하라는 뜻이므로, 조건 (2)를 만족하는 k 의 위치는 상관이 없음을 알 수 있다.

따라서, 1을 3개 미리 배치한 후 $({}_n C_3)$
 3개의 0과 $n-6$ 개의 2를 조건에 맞게 배치하는 경우의 수(= N 이라 하자.)를 구하는 것으로 문제의 조건을 만족시키는 함수의 개수를 ${}_n C_3 \times N$ 으로 구할 수 있다.

① 적당한 case 분류를 통해 N 구하기 (기대T 현장 풀이)

1이 아닌 함숫값을 갖는 정의역의 원소를 작은 순서대로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 이라 하자.
 이 값들을 0 또는 2에 대응시키는 총 경우의 수는 ${}_{n-3} C_3$ 인데, 이 중 (3)의 조건을 만족시키지 않는 경우의 수를 빼는 방법으로 N 을 구하도록 하자.

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$f(a_4)$	$f(a_5)$	$f(a_6)$...
Ⓐ	0	${}_{n-4} C_2$ (남은 0 2개를 마음대로 고름)					
Ⓑ	2	0	0	${}_{n-6} C_1$ (남은 0 1개를 마음대로 고름)			
Ⓒ	2	0	2	0	0	1 (이후 전부 함숫값 2)	
Ⓓ	2	2	0	0	0	1 (이후 전부 함숫값 2)	

따라서 $N = {}_{n-3} C_3 - ({}_{n-4} C_2 + {}_{n-6} C_1 + 1 + 1) = \frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6}$ 이다.

② 0을 미리 분할하여 N 구하기 (조교 및 수강생 우수풀이)

2를 $n-6$ 개 배치한 후, 2의 양 끝과 사이사이에 조건에 맞게 0을 3개 집어넣는다. 0을 3개 집어넣는 개수를 분할하면 $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$, $\{3\}$ 이다.

i) $\{1, 1, 1\}$ 일 때, 총 $n-5$ 개의 칸 중에서 왼쪽 끝을 제외한 $n-6$ 개의 칸에 3개를 집어넣는 경우이므로,

$${}_{n-6}C_3 = \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{6} \text{ 이다.}$$

ii) $\{1, 2\}$ 일 때, $n-6$ 개의 칸에 2개를 집어넣었을 때, 왼쪽에서부터 첫 번째, 두 번째에 0이 각각 1개, 2개가 들어가는 경우를 제외하고 모두 만족하므로,

$${}_{n-6}C_2 - 1 = \frac{(n-6)(n-7)}{2} - 2 = \frac{n^2 - 13n + 40}{2} = \frac{(n-5)(n-8)}{2} \text{ 이다.}$$

iii) $\{2, 1\}$ 일 때, $n-6$ 개의 칸 중에서 왼쪽에서부터 첫 번째 칸에 0을 2개 집어넣으면 조건을 만족하지 않으므로, 왼쪽에서 두 번째 칸부터 집어넣어야 한다. 즉, $n-7$ 개의 칸에 2개를 집어넣는 경우이므로,

$${}_{n-7}C_2 = \frac{(n-7)(n-8)}{2} \text{ 이다.}$$

iv) $\{3\}$ 일 때, $n-6$ 개의 칸 중에서 왼쪽에서부터 첫 번째, 두 번째에 넣었을 때는 조건에 만족하지 않고, 세 번째부터 조건을 만족한다. 즉, $n-8$ 개의 칸에 1개를 집어넣는 경우이므로, ${}_{n-8}C_1 = n-8$ 이다.

i), ii), iii), iv)를 모두 더하면 0과 2를 조건에 맞게 배치한 경우는

$$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{6} + \frac{(n-5)(n-8)}{2} + \frac{(n-7)(n-8)}{2} + n-8 = \frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6} \text{ 이며, 이 값이 } N \text{이다.}$$

①, ② 방법에 따라 함수 f 의 개수는

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \frac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-8)}{36} \text{ 임을 알 수 있다.}$$

[문제 2 Comment]

이번 시립대 문제에서 제일 어려운 문항이 아니었을까 생각된다. 하지만 제일 영양가있는 문제이기도 하다.

기대T는 4문제의 풀이와 답안작성을 약 50분 걸쳐 끝내고 여유롭게 놀다가

종료 10분 전에 실수를 발견하는 바람에 실전에선 ①의 풀이로 허겁지겁 재작성하여 제출했지만,

②의 풀이 역시 수능 후 상위권 대학 논술에서 한 번쯤 사용될 법한 '쓸만한 풀이'이므로 꼭 봐둘 것.

근데 지금 보니, ①의 풀이가 ②의 풀이보다 엄청 비효율적이진 않았다. 오히려 심플하게 잘 푼 느낌ㅎㅎㅎ (난이도를 올린 변형문제를 연세대/한양대/이대 실전모의논술 중 한회분에 실을 예정이다.)

[문제 3] (100점)

(a) 미분가능한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 $f(x)$ 밖의 점 Q를 이은 선분 \overline{PQ} 가 다음을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직임을 보이시오.

곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점 X에 대하여 $\overline{PQ} \leq \overline{XQ}$ 이다.

[sol. 기대T 현장풀이]

점 P, Q, X를 각각 $(t, f(t)), (a, b)$ (단, $b \neq f(a)$), $(x, f(x))$ 라 하면

$$\overline{PQ} \leq \overline{XQ} \Rightarrow (t-a)^2 + (f(t)-b)^2 \leq (x-a)^2 + (f(x)-b)^2 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x) = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2$ 는 $x=t$ 에서 극소가 된다. (극소의 정의)

또한 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로, $g'(t) = 0$ 임을 알 수 있고

$$g'(t) = 2(t-a) + 2f'(t)(f(t)-b) = 0 \dots \textcircled{a}, f'(t) \times \frac{f(t)-b}{t-a} = -1 \text{ (단, } t \neq a \text{)임을 알 수 있다.}$$

이 때, $f'(t)$ 는 점 P에서의 접선의 기울기이며 $\frac{f(t)-b}{t-a}$ 는 직선 PQ의 기울기에 해당하므로 두 직선이 수직임을 알 수 있다.

한편, $t=a$ 일 때 \textcircled{a} 를 만족시키려면 $f'(t) = 0$ ($\because f(t) = f(a) \neq b$) 이어야 한다.

점 P에서의 접선이 x 축과 평행하며, 직선 PQ의 방정식은 $x=a$ 로 y 축과 평행하므로 이 경우에도 두 직선이 수직 관계에 있음을 알 수 있다.

(b) 곡선 $y = x^2$ 위의 점을 점 P, 곡선 $y = -(x-6)^2$ 위의 점을 점 Q라고 할 때 \overline{PQ} 의 최솟값을 구하시오.

[sol. 기대T 현장풀이]

곡선 $y = x^2$ 를 x 축 대칭시킨 후 x 축의 양의 방향으로 6만큼 평행이동시키면 곡선 $y = -(x-6)^2$ 이 나오므로, 두 곡선은 점 R(3, 0)에 대한 점대칭관계이다. (사실, 지금 보니 굳이 이 문장은 쓰지 않았어도 됐을 듯)

점 P(t_1, t_1^2)와 점 R(3, 0)에 대하여 $2t_1 \times \frac{t_1^2 - 0}{t_1 - 3} = -1$ 일 때 선분 PR의 길이가 최소일 수 있고, 이 때의 t_1 의 값은 1, 점 P는 (1, 1)이다.

점 Q($t_2, -(t_2-6)^2$)와 점 R(3, 0)에 대하여 $-2(t_2-6) \times \frac{-(t_2-6)^2 - 0}{t_2 - 3} = -1$ 일 때 선분 PQ의 길이가 최소일 수 있고, 이 때의 t_2 의 값은 5, 점 Q는 (5, -1)이다.

이 때, 점 P(1, 1), R(3, 0), Q(5, -1)은 모두 어떤 한 직선 위에 동시에 있음을 확인할 수 있으므로 선분 PQ의 최솟값은 $\sqrt{(1-5)^2 + (1-(-1))^2} = 2\sqrt{5}$ 이다.

[문제 3 Comment]

제일 감점이 심할 것으로 예상되는 문제이다.

논술을 준비한 학생들과 준비하지 않은 학생들의 격차가 제일 많이 벌어질 문제로 판단된다.

감점의 대표적 예시로는

- ① a번 문제에서 극소 또는 최소라는 단어 없이 마구잡이 미분
- ② a번 문제의 상황을 그래프로 설명한 경우 (원 그리는 것 포함)
- ③ b번 문제에서 점 (3, 0)을 거쳐 논리를 이어나갈 경우, 세 점이 한 직선 위에 있음을 반드시 언급 필요 (최소+최소=최소의 논리를 쓸 때, 좌변의 최소가 동시에 벌어질 수 있음을 설명하는 장치에 해당하기 때문)

등등이 있다.

[문제 4] (100점)

함수 $y=f(x)$ ($x \geq 1$)는 다음을 만족한다.

모든 자연수 m 에 대하여 $64^{m-1} \leq x < 64^m$ 일 때, $f(x) = 8^m$

곡선 $y = \frac{1}{k^3}x^2$ 과 곡선 $y=f(x)$ 사이의 교점 개수를 a_k 라 하자. $n = 2^{300}$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 구하시오.

[sol. 1 기대T 현장풀이]

i) 곡선 $y = \frac{1}{k^3}x^2$ 이 꼭찬 점 $(64^{m-1}, 8^m)$ 을 지날 때, $k = 2^{3m-4}$ 이고

ii) 곡선 $y = \frac{1}{k^3}x^2$ 이 빈 점 $(64^m, 8^m)$ 을 지날 때, $k = 2^{3m}$ 이다.

($y=f(x)$ 그림 그리고, i)과 ii)에 맞도록 이차함수를 $k = 2^2, 2^3, 2^5, 2^6, 2^8, 2^9 \dots$ 일 때 그런 후 k 값이 커질수록 y 축 으로부터 멀어지는 이차함수임을 설명)

따라서

$2^0 \leq k < 2^2$ 일 때 $a_k = 1$, $2^2 \leq k < 2^3$ 일 때 $a_k = 2$,

$2^3 \leq k < 2^5$ 일 때 $a_k = 1$, $2^5 \leq k < 2^6$ 일 때 $a_k = 2$,

$2^6 \leq k < 2^8$ 일 때 $a_k = 1$, $2^8 \leq k < 2^9$ 일 때 $a_k = 2$, ... 임을 알 수 있으므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1 \times 2^{300} + (2^3 - 2^2) + (2^6 - 2^5) + (2^9 - 2^8) + \dots + (2^{300} - 2^{299})$$

$$= 2^{300} + \frac{4 \times (8^{100} - 1)}{8 - 1} = \frac{11}{7} \times 2^{300} - \frac{4}{7} \text{ 이다.}$$

[sol. 2 조교 및 수강생 우수풀이]

$y = \frac{1}{k^3}x^2$ 과 $f(x) = 8^m$ 이 만날 때 $\frac{1}{k^3}x^2 = 8^m$ 이 성립하며, 정리하면 $x = \sqrt{(2^m k)^3}$ ($\because x \geq 1$)이다. $64^{m-1} \leq x < 64^m$ 에 계산한 x 를 넣으면 $64^{m-1} \leq \sqrt{(2^m k)^3} < 64^m$ 이고, 각 항이 모두 양수이므로 각 항을 $\frac{2}{3}$ 제곱을 해주면 $4^{2(m-1)} \leq 2^m k < 4^{2m}$ 이다.

k 에 대해 부등식을 정리하면 $2^{3m-4} \leq k < 2^{3m}$ 이다. 즉, k 가 $2^{3m-4} \leq k < 2^{3m}$ 의 범위에서 $y = \frac{1}{k^3}x^2$ 과 $f(x) = 8^m$ 이 한 번 만난다.

$2^{3m-4} \leq k < 2^{3m}$ 을 만족하는 자연수 k 의 개수는 $2^{3m} - 2^{3m-4}$ 로 구할 수 있으며, $\sum_{k=1}^n a_k$ 는 $m=1$ 부터 $k=2^{300}$ 을 부등식 범위에 포함시키는 m 까지의 값을 구하여 $2^{3m} - 2^{3m-4}$ 를 모두 더해 주는 것으로 구할 수 있다. 이 때, $k=1$ 일 때, $2^3 - 2^{-1}$ 이므로 자연수의 개수는 $2^3 - 1$ 로 구할 수 있다. 또한, $n=2^{300}$ 에서 $m=101$ 에서도 만족하는 자연수 k 의 개수를 구해주어야 하며 이는 $2^{300} - 2^{299} + 1$ 이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = (2^3 - 1) + \sum_{m=2}^{100} (2^{3m} - 2^{3m-4}) + (2^{300} - 2^{299} + 1)$$

등비수열의 합 공식에 의해 식을 정리하면

$$\begin{aligned} (\text{위의 식}) &= (2^3 - 1) + \frac{15}{14}(2^{300} - 2^3) + (2^{300} - 2^{299} + 1) \\ &= 2^{300} \left(\frac{15}{14} + 1 - \frac{1}{2} \right) + 2^3 \left(1 - \frac{15}{14} \right) \\ &= \frac{1}{7}(11 \cdot 2^{300} - 4) \end{aligned}$$

[문제 4 Comment]

개수세기가 수리논술에 나오는 몇 안되는 학교인데, 올해 모의논술에 이어 오후 기출에 기어코 나왔다.

그 놈의 경향성..★

물론 이번 문항은 개수세기 특유의 멍멍스러운 노가다가 특출난 아이디어는 필요없었다.

차분하게 잘 세면 되는 문항으로, 역대 기출 중 제일 할만한 개수세기에 해당한다. (또는, 이 문항을 개수세기로 생각하지 않은 학생들이 있을 수 있다.)

노파심에 얘기하지만, 수능 후 학교의 기출을 분석할 때 개수세기가 한 번이라도 나왔던 학교라면, 반드시 그 학교의 개수세기 경향성을 파악하고 시험에 들어가자.

[EBS 우수문항 배포]

EBS 주요문항과 문항별 Comment가 적힌 파일을 11/1부터 순차적으로 배포합니다.

[수능 후 논술 Final 시간표]

수능 후 논술 Final 시간표의 윤곽이 잡혔습니다. 자세한 시간표 및 일정 그리고 수업장소는 11/11 확정되며, EBS 선별 배포와 11/11 확정된 논술 Final 시간표는 다음 QR코드에서 확인할 수 있습니다.



논술 Basic (논술 생초보들을 위한 4시간짜리 수리논술 압축강의) : 12/3 (목) PM 6:00~10:00

한양대 : 12/4 (금) AM 9:00~PM 10:00 (총 4회, 밥 시간 有)

건국대 : 12/4 (금) PM 1:00~4:30 + PM 5:30~9:00 (총 2회)

서울과기대 : 12/5 (토) PM 2:00~6:00 + 12/6 (일) AM 9:00~PM 1:00, PM 2:00~6:00 (총 3회)

연세대 : 12/6 (일) PM 6:00~10:00 + 12/7 (월) AM 9:00~PM 10:00 (총 4회)

중앙대 : 12/8, 9, 10, 11 PM 6:00~10:00 (총 4회)

이화여대 : 12/9, 10 AM 9:00~PM 1:00 (총 2회)

아주대 : 12/11, 12 AM 9:00~PM 1:00 + 12/12 PM 2:00~6:00 (총 3회)

광운대, 세종대 : 12/8~12/11 광운 4회 세종 5회, 시간 미정

에리카 : 12/13 (일) AM 9:00~PM 10:00 (총 3회)

인하대 : 12/14(월)~12/19(토) 6회 (점심반/저녁반 동일수업 진행)

시립대 오전 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 120분, 난이도 : normal]

이름	김 기 대 T
----	---------

지원학과	예상합격컷 : 250~320점/400점 (과별 상이)
------	-------------------------------

【 수험생 유의사항 】

1. 본 파일은 시립대 시험장 현장에서 본 시험지를 그대로 복기하였습니다.
2. 오후는 직접 현장응시했기 때문에, 복기와 풀이가 정확합니다.
3. 오전은 카더라에 의한 문제복기와 조교 풀이로 작성됐으므로, 다소 부정확할 수 있습니다.
오전 복기/ 해설 중 수정이 필요한 사항은 kidae6150@naver.com 으로 제보 바랍니다.



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (100점)

동전 5개가 앞면이 2개, 뒷면 3개가 보이도록 놓여 있다. 이 동전 5개 중 임의로 하나를 선택하여 뒤집는 시행을 동전이 모두 같은 면이 되어 멈출 때까지 한다. 멈출 때까지 총 시행횟수를 확률변수 X 라 한다. X 가 4 이하인 사건을 A , 첫 시행에서 앞면이 보이는 동전을 선택하는 사건을 B 라 하자. $P(B|A)$ 의 값을 구하시오.

[sol]

i) 사건 A

1) $P(x=1)$ 일 때, 1번 시행하여 동전이 모두 같은 면이 되지 않는다.

2) $P(x=2)$ 일 때, 처음 시행에 앞면을 고르고, 두 번째 시행에 앞면을 고르면 된다. $P(x=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$

3) $P(x=3)$ 일 때, 처음, 두 번째, 세 번째 시행에 모두 뒷면을 고르면 된다.

$$P(x=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$

4) $P(x=4)$ 일 때, 처음, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행에서 각각 앞면, 뒷면, 앞면, 앞면을 고르거나 뒷면, 앞면, 앞면, 앞면을 고르면 된다.

$$P(x=4) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{625} + \frac{18}{625} = \frac{34}{625}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{25} + \frac{6}{125} + \frac{34}{625} = \frac{114}{625}$$

ii) 사건 $A \cap B$

i)에서 처음 시행에 앞면을 고르는 사건은 $x=2$ 일 때와 $x=4$ 일 때 처음, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행에서 각각 앞면, 뒷면, 앞면, 앞면을 고르는 경우이다.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{25} + \frac{16}{625} = \frac{66}{625}$$

$$i) \text{과 } ii) \text{에서 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{66}{625}}{\frac{114}{625}} = \frac{11}{19} \text{이다.}$$

[문제 2] (100점)

다음 조건을 만족하는 $f(x)$ 를 구하시오.

(1) $f(0) = 0$

(2) 상수 $0 < a < 1$ 에 대해 $\int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos a - \cos 1 \cos x}{\sin^2 x} dx = 2 \sin f(a)$

[sol]

$$\begin{aligned} \int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos a - \cos 1 \cos x}{\sin^2 x} dx &= \int_{1-a}^{1+a} (\csc^2 x \cos a - \cos 1 \csc x \cot x) dx \\ &= [-\cos a \cot x + \cos 1 \csc x]_{1-a}^{1+a} \\ &= -\cos a (\cot(1+a) - \cot(1-a)) + \cos 1 (\csc(1+a) - \csc(1-a)) \end{aligned}$$

여기서 \cot 와 \csc 함수를 \sin 과 \cos 으로 이루어진 분수 꼴로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{-\cos a \{\cos(1+a)\sin(1-a) - \sin(1+a)\cos(1-a)\} + \cos 1 \{\sin(1-a) - \sin(1+a)\}}{\sin(1+a)\sin(1-a)}$$

여기서 $\cos(1+a)\sin(1-a) - \sin(1+a)\cos(1-a) = \sin(-2a) = -\sin(2a)$ 이고,
 $\sin(1-a) - \sin(1+a) = (\sin 1 \cos a - \cos 1 \sin a) - (\sin 1 \cos a + \cos 1 \sin a)$
 $= -2 \sin a \cos 1$

이므로, 정리하면

$$\begin{aligned} \text{(위의 식)} &= \frac{\cos a \sin(2a) - 2 \sin a \cos^2 1}{\sin(1+a)\sin(1-a)} \\ &= \frac{2 \sin a \cos^2 a - 2 \sin a \cos^2 1}{\sin(1+a)\sin(1-a)} \\ &= \frac{2 \sin a (\cos^2 a - \cos^2 1)}{\sin(1+a)\sin(1-a)} \\ &= \frac{2 \sin a (\cos^2 a - \cos^2 1)}{\cos^2 a - \cos^2 1} \\ &= 2 \sin a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\because \sin(1+a)\sin(1-a) &= (\sin 1 \cos a + \cos 1 \sin a)(\sin 1 \cos a - \cos 1 \sin a) \\ &= \sin^2 1 \cos^2 a - \cos^2 1 \sin^2 a \\ &= (1 - \cos^2 1) \cos^2 a - \cos^2 1 (1 - \cos^2 a) \\ &= \cos^2 a - \cos^2 1) \end{aligned}$$

이때, \sin 은 주기가 2π 인 함수로 $2 \sin a = 2 \sin(a + 2n\pi)$ (단, n 은 정수)로 표현할 수 있다.
 조건 (2)에 의해 $f(x) = x + 2n\pi$ 로 나타낼 수 있고, 조건 (1)에 의해 $f(x) = x$ 이다.

[문제 3] (100점)

한 변의 길이가 $3+2\sqrt{2}$ 인 정사각형 ABCD가 있다. 원 C_1 과 원 C_2 는 한점에서 만난다. 원 C_1 은 선분 \overline{AB} 와 선분 \overline{AD} 에 동시에 접하며, 원 C_2 는 선분 \overline{DC} 와 선분 \overline{BC} 에 동시에 접한다. $\overline{BE} > \overline{BF}$ 를 만족하는 점 E와 점 F에 대하여, $\overline{BF} = x$, $\square BEGF = f(x)$ 라 할 때, 다음을 구하시오.

- (a) $f(x)$ 를 구하시오.
- (b) $f(x)$ 의 미분가능함을 보이시오.

[sol]

3번의 경우, x 의 값이 r_1, r_2 와의 대소관계에 따라 함수 $f(x)$ 가 2구간별함수가 될지, 3구간별함수가 될지 결정됩니다. 하지만 현재 인터넷 복기본들이 다 뒤죽박죽이라 명확한 솔루션을 제공하기 힘들 것 같아 미입력하였습니다.

[문제 3 Comment]

다만, (b)에서 미분가능성을 보일 때 많은 학생들이 잘못된 논술답안을 작성하는 경우가 있습니다.

가령 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x > a) \\ h(x) & (x \leq a) \end{cases}$ 의 미분가능성을 따질 때에는

- ① $x = a$ 를 제외한 나머지 x 에서 $g(x), h(x)$ 가 미분가능한 함수인지에 대한 언급
 - ② $x = a$ 에서의 $f(x)$ 의 미분가능성을 언급
- 이 두 가지 언급을 모두 해주어야만 합니다.

①도 많이 빼먹지만, ②가 더더욱 중요한데요,

②에 대한 설명을 $\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h'(x)$ 로 해서는 **절대 안됩니다.**

항상 미분가능성은 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$ 로 보여주셔야 합니다.

이 때, 연속성은 굳이 보이지 않아도 좋습니다. 만약 연속성이 깨지는 함수였다면, 위의 두 극한값 중 하나는 존재하지 않게 되거든요.

즉, 논술에서 나오는 미분가능성 문제는 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$ 로 미가성과 연속성을 동시에 보이는 것. 이 이외의 답안은 허용되지 않음을 명심하시기 바랍니다.

수능에서는... 맘대로 하세요.. 저는 도함수 극한 비추합니다.

틀릴 가능성이 적다고 반박하면 할 말 없습니다만, 제 점수 아니니 오지랴는 부리지 않겠습니다.

[문제 4] (30점)

자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오.

- (1) $1 \leq a < b < c \leq 6n$
 (2) $a + c = 2b$
 (3) $\sin\left(\frac{\pi a}{6n}\right) < \sin\left(\frac{\pi b}{6n}\right) < \sin\left(\frac{\pi c}{6n}\right)$

[sol]

i) $b \geq 3n$ 일 때, $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi b}{6n} < \frac{\pi c}{6n}$ 에서 $\sin\left(\frac{\pi b}{6n}\right) > \sin\left(\frac{\pi c}{6n}\right)$ 로 조건 (3)에 모순이다.

ii) $b < 3n$ 일 때, $\frac{\pi b}{6n} < \frac{\pi}{2}$ 이고, $\frac{\pi b}{6n} < \frac{\pi c}{6n}$ 이다. 이 때, \sin 함수의 성질에 의해, $x = \frac{\pi b}{6n}$ 와 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭 관계에 있는 $x = \frac{\pi(6n-b)}{6n}$ 에 대하여, $\frac{\pi b}{6n} < \frac{\pi c}{6n} < \frac{\pi(6n-b)}{6n}$ 이 성립한다.

정리하면, $b < c < 6n - b$ 이다. 조건 (1)과 (2)에 의하여, 다음이 성립한다.

$$1 \leq a < b \Rightarrow 1 \leq 2b - c < b \Rightarrow b < c \leq 2b - 1$$

1) $6n - b = 2b - 1$ 에서 $b = 2n + \frac{1}{3}$ 이고, b 는 자연수이므로 등식이 성립하지 않는다.

2) $6n - b < 2b - 1$ 일 때, $b > 2n + \frac{1}{3}$ 즉, $b \geq 2n + 1$ 이다. ($\because b$ 는 자연수)

$b < c < 6n - b$ 을 만족하는 자연수 c 의 개수는 $6n - 2b - 1$ 개다. 정리하면, $2n \leq b < 3n$ 을 만족하는 자연수 b 에 대해 총 $6n - 2b - 1$ 개의 자연수 c 가 존재한다. 이때, 조건 (2)에 의해 자연수 b 와 자연수 c 가 정해지면 자연수 a 도 정해지게 된다. 순서쌍의 개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{b=2n+1}^{3n-1} (6n - 2b - 1) &= \sum_{b=1}^{3n-1} (6n - 2b - 1) + \sum_{b=1}^{2n} (6n - 2b - 1) \\ &= (6n^2 - 7n + 1) - (5n^2 - 5n) \\ &= (n - 1)^2 \end{aligned}$$

3) $6n - b > 2b - 1$ 일 때, $b < 2n + \frac{1}{3}$ 즉, $b \leq 2n$ 이다. ($\because b$ 는 자연수)

$b < c \leq 2b - 1$ 을 만족하는 자연수 c 의 개수는 $b - 1$ 개다. 이때, 조건을 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 2이다. 즉, $2 \leq b \leq 2n$ 을 만족하는 자연수 b 에 대해 총 $b - 1$ 개의 자연수 c 가 존재한다. 순서쌍의 개수는 다음과 같다.

$$\sum_{b=2}^{2n} (b - 1) = \sum_{b=1}^{2n-1} b = \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$$

ii)에 의해 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $(n - 1)^2 + 2n^2 - n = 3n^2 - 3n + 1$ 이다.

[EBS 우수문항 배포]

EBS 주요문항과 문항별 Comment가 적힌 파일을 11/1부터 순차적으로 배포합니다.

[수능 후 논술 Final 시간표]

수능 후 논술 Final 시간표의 윤곽이 잡혔습니다. 자세한 시간표 및 일정 그리고 수업장소는 11/11 확정되며, EBS 선별 배포와 11/11 확정된 논술 Final 시간표는 다음 QR코드에서 확인할 수 있습니다.



논술 Basic (논술 생초보들을 위한 4시간짜리 수리논술 압축강의) : 12/3 (목) PM 6:00~10:00

한양대 : 12/4 (금) AM 9:00~PM 10:00 (총 4회, 밥 시간 有)

건국대 : 12/4 (금) PM 1:00~4:30 + PM 5:30~9:00 (총 2회)

서울과기대 : 12/5 (토) PM 2:00~6:00 + 12/6 (일) AM 9:00~PM 1:00, PM 2:00~6:00 (총 3회)

연세대 : 12/6 (일) PM 6:00~10:00 + 12/7 (월) AM 9:00~PM 10:00 (총 4회)

중앙대 : 12/8, 9, 10, 11 PM 6:00~10:00 (총 4회)

이화여대 : 12/9, 10 AM 9:00~PM 1:00 (총 2회)

아주대 : 12/11, 12 AM 9:00~PM 1:00 + 12/12 PM 2:00~6:00 (총 3회)

광운대, 세종대 : 12/8~12/11 광운 4회 세종 5회, 시간 미정

에리카 : 12/13 (일) AM 9:00~PM 10:00 (총 3회)

인하대 : 12/14(월)~12/19(토) 6회 (점심반/저녁반 동일수업 진행)

