2020 Square Dream Team

2021학년도 네모의꿈 직전 모의고사 주요문항 해설

Ⅰ. 제작자 소개

[출제 및 해설] UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈
김범호, 전승현, 김태중, 서민수

[검토] UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈
한성재, 공나빈, 방세훈, 조인규

Ⅱ. 이용안내

Do Your Best!

UNIST Math Mock Team
네모의꿈

14. 정답 : ⑤ (출제자 : 서민수, 방세훈)

[출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 로그방정식 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있으므로 점 C의 좌표를 $(t,\ t)$로 놓을 수 있다. (단, $t>0$)

점 A는 직선 $y=-x+3$과 x축의 교점이므로 $\mathrm{A}(3,\ 0)$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$에서 $(t-3)^2+t^2=45$를 얻고, 이를 풀면 $t=-3$ 또는 $t=6$이다. $t>0$이므로 $t=6$임을 알 수 있다.

따라서 곡선 $y=a\log_3(x+b)$는 $(0,\ 3)$과 $(6,\ 6)$을 지나므로 대입해서 정리하면 $2=\dfrac{\log_3(b+6)}{\log_3 b}$에서 $b^2=b+6$이고 로그의 진수 조건에서 $b>0$이므로 $b=3$이다. 따라서 $a=3,\ b=3$이므로 $a+b=6$이다.

15. 정답 : ② (출제자 : 김태중, 김범호)

[출제의도] 표본평균을 정규분포에 활용할 수 있는가?

[문항해설]

$X\sim \mathrm{N}(m,\ 4^2)$이므로 $\overline{X}\sim \mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$이다. 따라서 각 확률변수를 표준화하면 $Z=\dfrac{X-m}{4}$와 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{4/\sqrt{n}}$이므로 조건 (가)를 표준화변수를 이용하여 다시 쓰면

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{4-m}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{4}{4/\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{4-m}{4}\right)+\mathrm{P}(Z\ge \sqrt{n})=1$$

와 같다. 따라서 $\dfrac{4-m}{4}=\sqrt{n}$에서 $m=4(1-\sqrt{n})$임을 알 수 있다. m이 정수이므로 가능한 $(m,\ n)$의 순서쌍을 나열하면 다음과 같다.

m	n
0	1
-4	4
-8	9
$\vdots$	$\vdots$
$-4(k-1)$	k^2
$\vdots$	$\vdots$

이제, 조건 (나)를 보자. 주어진 확률을 위의 표를 이용하여 다시 써보면

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge -4)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{-4-m}{4/\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{-4+4(k-1)}{4/k}\right)=\mathrm{P}(Z\ge k(k-2)) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

와 같다. $0.1587<(*)<0.8413$이므로 주어진 표준확률분포표를 이용하여 다시 쓰면

$$\mathrm{P}(Z\ge 1)<\mathrm{P}(Z\ge k(k-2))<0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\mathrm{P}(Z\le 1)=\mathrm{P}(Z\ge -1)$$

임을 알 수 있다. 따라서 $-1<k(k-2)<1$이므로 가능한 자연수 k의 값은 2이다.

$\therefore m=-4,\ n=4$

16. 정답 : ⑤ (출제자 : 김범호)

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가?

[문항해설]
문제에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{S_k-1}=3+(-1)^{n+1}\times(2n+3) \qquad \cdots\cdots (*)$$

임이 주어졌으므로

$$\begin{aligned}\frac{4}{S_n-1}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{S_k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{S_k-1}\\&=\{3+(-1)^{n+1}\times(2n+3)\}-\{3+(-1)^{n}\times(2n+1)\}\\&=(-1)^{n+1}\times(2n+3)+(-1)^{n+1}\times(2n+1)\\&=(-1)^{n+1}\times(4n+4)\\&=4\times(-1)^{n+1}\times\boxed{n+1}\end{aligned}$$

에서 $\boxed{(가)}=n+1$ 이므로 $f(n)=n+1$이다.

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 수열의 합과 일반항 사이의 관계가

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

임을 이용하면, $S_n=1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$에서

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n}}{n}=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=(-1)^{n+1}\times\boxed{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$$

이다. 따라서 $\boxed{(나)}=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ 이므로 $g(n)=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$이다.

한편, 위에서 구한 a_n에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\dfrac{3}{2}$이므로 $a_n=(-1)^{n+1}\times\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ $(n\geq 1)$라 할 수 있다.

따라서 구하고자 하는 값은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\times k(k+1)$이다.

<u>$(-1)^{n+1}$의 값은 n이 짝수일 때 음수, n이 홀수일 때 양수이므로 n의 경우를 나눠서 생각해야 한다.</u>

(i) $n=2m$

$$\sum_{k=1}^{2m}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}\times k(k+1)$$

에서 k가 홀수이면 $(-1)^{k+1}=1$이고 k가 짝수이면 $(-1)^{k+1}=-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}\times k(k+1)=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\times 2k-\sum_{k=1}^{m}2k\times(2k+1)=-\sum_{k=1}^{m}\boxed{4k}=-2m(m+1)$$

이다. $m=\dfrac{n}{2}$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}\times k(k+1)=-n\left(\frac{n}{2}+1\right)=-\frac{n(n+2)}{2}$가 된다.

따라서 $\boxed{(다)}=4k$ 이므로 $h(k)=4k$이다.

(ii) $n=2m+1$

$$\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k+1}\times k(k+1)$$

에서 k가 홀수이면 $(-1)^{k+1}=1$이고 k가 짝수이면 $(-1)^{k+1}=-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k+1}\times k(k+1)=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\times 2k-\sum_{k=1}^{m}2k\times(2k+1)+(2m+1)(2m+2)=2m^2+4m+2=2(m+1)^2$$

이다. $m=\frac{n-1}{2}$이므로 $\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k+1}\times k(k+1)=2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)^2}{2}$가 된다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_k}=\begin{cases}-\frac{n(n+2)}{2} & (n=2m)\\ \frac{(n+1)^2}{2} & (n=2m+1)\end{cases}$$

임을 구할 수 있다.

$f(9)=9+1=10$, $g(4)=\frac{9}{4\times 5}=\frac{9}{20}$, $h(3)=4\times 3=12$이므로 $f(9)\times g(4)\times h(3)=10\times\frac{9}{20}\times 12=54$이다.

17. 정답 : ③ (출제자 : 전승현)

[출제의도] 부분적분법과 치환적분법을 사용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

조건 (나)에서 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}}f'(x)f(\sqrt{4-x^2})\,dx&=\left[f(x)f(\sqrt{4-x^2})\right]_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}}f(x)f'(\sqrt{4-x^2})\times\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\&=\{f(\sqrt{2})\}^2-f(0)f(2)+\int_0^{\sqrt{2}}f(x)f'(\sqrt{4-x^2})\times\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\&=4+\int_0^{\sqrt{2}}f(x)f'(\sqrt{4-x^2})\times\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\&=\pi+2\end{aligned}$$

와 같다. 따라서

$$\int_0^{\sqrt{2}}f(x)f'(\sqrt{4-x^2})\times\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\pi-2$$

이다.

한편 $\sqrt{4-x^2}=t$로 치환하면 $x=\sqrt{4-t^2}$이고, $dt=(\sqrt{4-x^2})'dx=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$이므로

$$\int_2^{\sqrt{2}} f(\sqrt{4-t^2})f'(t)\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}dt=-\int_2^{\sqrt{2}} f(\sqrt{4-t^2})f'(t)dt=\int_{\sqrt{2}}^2 f(\sqrt{4-t^2})f'(t)dt=\pi-2.$$

따라서

$$\int_0^2 f'(x)f(\sqrt{4-x^2})dx=\int_0^{\sqrt{2}} f'(x)f(\sqrt{4-x^2})dx+\int_{\sqrt{2}}^2 f'(x)f(\sqrt{4-x^2})dx=(\pi+2)+(\pi-2)=2\pi.$$

[참고]
$f(x)=\sqrt{2}x$이다.

18. 정답 : ⑤ (출제자 : 전승현)

[출제의도] 최대·최소정리와 평균값 정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]
$\int_1^x g(t)dt=\int_0^{x^2} f(t)dt+\cos(\pi x)+2$에서, $x=0$을 대입하면
$\int_1^0 g(t)dt=\int_0^0 f(t)dt+\cos(0)+2=3$ 이므로 $\int_0^1 g(t)dt=-3$이다.

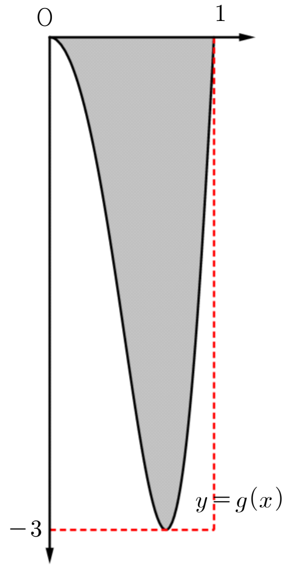
(ㄱ) : 참

$\int_1^x g(t)dt=\int_0^{x^2} f(t)dt+\cos(\pi x)+2$의 양변을 미분하면
$g(x)=2xf(x^2)-\pi\sin(\pi x)$이므로, $x=0$을 대입하면
$g(0)=0$임을 알 수 있다.

한편, ㄱ에서 $\int_0^1 g(t)dt=-3$이다.
최대·최소정리에 의하여 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에 함수 $g(x)$는 반드시 최솟값 m을 갖는다.

1) $m>-3$
$\int_0^1 g(t)dt\geq\int_0^1 m\,dt=m>-3$이므로, $\int_0^1 g(t)dt=-3$을 만족하지 않는다.

2) $m=-3$
$g(0)=0$이고, 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 -3이므로 $g(x)$는 그림과 같은 개형을 갖는다.



이 경우, $\int_0^1 g(t)\,dt$의 값은 -3보다 커야 하므로 'ㄱ'을 만족하지 않는다.
따라서 $m<-3$임을 알 수 있다.
(ㄴ) : 참

이제, $0<k\le 1$을 만족하는 실수 k에 대하여 $g(k)=m$라 하자.
함수 $g(x)$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(k,\ m)$을 지나고, 실수 전체에서 연속이며 미분가능하므로
평균값 정리에 의해 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $g'(c)=\dfrac{m-0}{k-0}=\dfrac{m}{k}$을 만족하는 실수 c가 존재한다.
이때 $m<-3$이고 $0<k\le 1$이므로,
열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $g'(c)=\dfrac{m}{k}<-3$인 실수 c가 존재한다.

한편, $g(x)=2xf(x^2)-\pi\sin(\pi x)$에서

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)f((-x)^2)-\pi\sin(\pi(-x)) \\ &= -2xf(x^2)+\pi\sin(\pi x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

이므로 $g'(x)=g'(-x)$이다.
따라서 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $g'(c)<-3$인 실수 c가 존재하므로, 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 $g'(b)<-3$을 만족하는 실수 b가 존재한다.

(ㄷ) : 참

19. 정답 : ③ (출제자 : 서민수)

[출제의도] 같은 것이 포함된 원순열의 경우의 수를 이용하여 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[문항해설]
6개의 공을 뽑는 경우는 각 색깔의 공을 $1+2+3$, $2+2+2$로 뽑는 경우이다.

(1) 각 색깔의 공을 1개, 2개, 3개 뽑는 경우

색을 결정하는 경우의 수는 $3!=6$가지이다. 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{\dfrac{6!}{1!2!3!}}{6}=10$가지이다.

따라서 총 경우의 수는 $6\times10=60$가지이다.

(2) 각 색깔의 공을 2개, 2개, 2개 뽑는 경우
'빨, 파, 노, 빨, 파, 노' (또는 '빨, 노, 파, 빨, 노, 파') 순서로 원형 배열되어 있는 경우는 회전주기가 3이다.

따라서 회전주기가 6인 경우와 3인 경우를 따로 세서 더해주면 $\dfrac{\dfrac{6!}{2!2!2!}-2\times3}{6}+\dfrac{2\times3}{3}=16$가지이다.

따라서 전체 경우의 수는 $60+16=76$가지이다.

(1)의 경우에서 같은 색의 공이 연속으로 배치되지 않는 경우는 같은 색인 3개의 공이 한 칸씩 떨어져서 배열되어야 한다. 색을 결정하는 경우의 수는 $3!=6$가지이다. 그리고 같은 색의 공이 연속으로 배치되지 않게 배열하는 경우의 수는 1가지이다. 따라서 $6\times1=6$가지이다.
그리고 (1)의 경우에서 빨간색 공과 파란색 공의 합이 4개 이상인 경우는 노란색 공이 3개인 경우를 제외해주면 된다. 노란색 공이 3개일 때, 빨간색 공과 파란색 공의 개수를 정하는 경우는 2가지, 원형으로 배열하는 경우는 $\dfrac{\dfrac{6!}{1!2!3!}}{6}=10$가지이므로 총 $2\times10=20$가지이고, 따라서 빨간색 공과 파란색 공의 합이 4개 이상인 경우의 수는 $60-20=40$가지이다.

마지막으로 같은 색의 공이 연속으로 배열되지 않고, 빨간색 공과 파란색 공의 개수의 합이 4이상인 경우를 세야 한다. 이 경우는 같은 색의 공이 연속으로 배열되지 않은 경우 중 노란색 공의 개수가 3개인 경우를 제외해주면 된다.
같은 색의 공이 연속으로 배열되지 않고, 노란색 공의 개수가 3개인 경우는 빨간색 공과 파란색 공의 개수를 정하는 경우 2가지, 원형으로 배열하는 경우는 1가지이므로 $2\times1=2$가지이다.
따라서, 같은 색의 공이 연속으로 배열되지 않고, 빨간색 공과 파란색 공의 개수의 합이 4이상인 경우의 수는 $6-2=4$가지이다.

따라서 (1)의 경우에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $6+40-4=42$가지이다.
(2)의 경우, 무조건 빨간색 공과 파란색 공 개수의 합이 4이상이므로 조건을 만족한다.

따라서 조건을 만족시킬 확률은 $\dfrac{42+16}{60+16}=\dfrac{29}{38}$이다.

20. 정답 : ①   (출제자 : 김태중)

[출제의도] 함수의 개형을 그리고 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

$\int_0^{\left|\frac{2k}{t}\right|}(g(x)+tx)\,dx=0$에서 $g(x)=f(f(x))+k$이므로

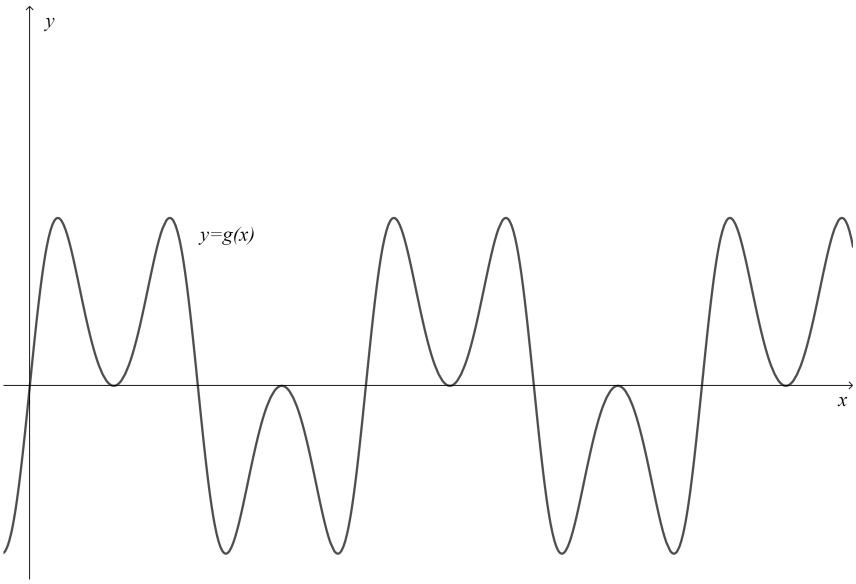
$$\int_0^{\left|\frac{2k}{t}\right|}(f(f(x))-(-tx-k))dx=0$$

로 둘 수 있다.

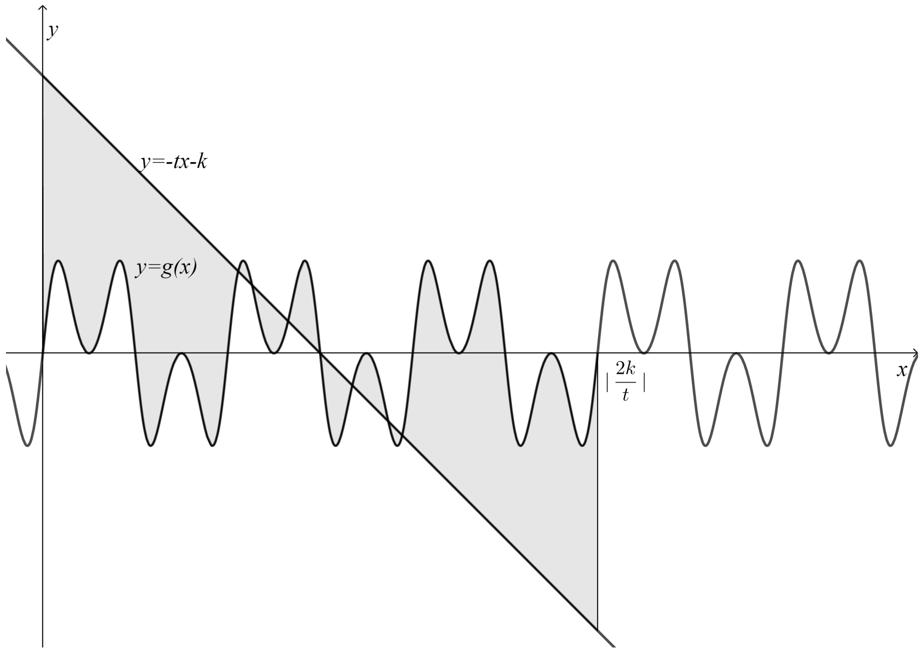
함수 $f(f(x))$의 주기는 2이고 $g'(x)=\pi^2\cos(\pi\sin(\pi x))\cos(\pi x)$이다. 즉 $\sin(\pi x)=\pm\frac{1}{2}$ 또는

$x=\frac{m}{2}$ (단, m은 홀수)에서 극값을 가진다. 즉 $0\le x\le 2$에서 $x=\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{2}$일 때, 각각 극댓값 $1, 1, 0$을 가지고

$x=\frac{1}{2},\ \frac{7}{6},\ \frac{11}{6}$ 일 때, 각각 극솟값 $0,\ -1,\ -1$을 가진다. 개형을 그려보면,



이렇게 나타난다. 그리고 $\int_0^{\left|\frac{2k}{t}\right|}(f(f(x))-(-tx-k))dx=0$에서 $-tx-k$를 축으로 하여 정적분했을 때, 값이 0이라는 의미로 해석할 수 있다. 이를 다시 그래프로 나타내면,



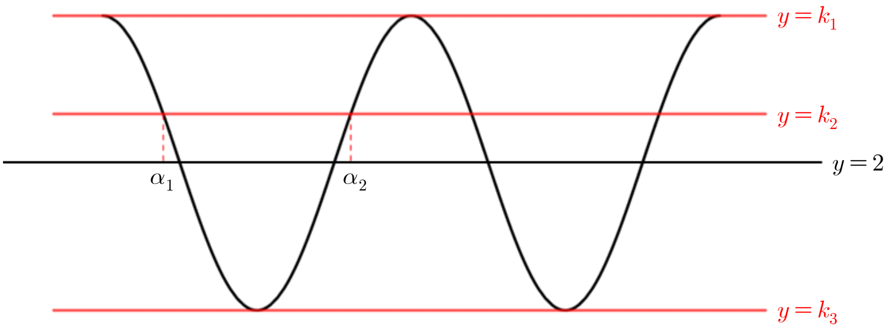
와 같이 적분 차를 생각할 수 있다. 또한, $-\frac{2k}{t}$는 방정식 $-tx-k=0$의 근의 두 배이므로 가능한 t의 값은 $a_n=-\frac{k}{n}$ 형태임을 알 수 있다. $a_4=8$이므로 $k=-32$이다. 즉, $a_8-k=4-(-32)=36$이다.

21. 정답 : ① (출제자 : 전승현)

[출제의도] 삼각함수 대칭성을 이용하여 삼각방정식의 해의 개수를 추론할 수 있는가?

[문항해설]

주어진 삼각함수 $f(x)=a\cos(bx)+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다. 삼각함수에서 $y=k$가 해를 갖는 경우는 다음과 같이 3가지 경우로 볼 수 있다.



(1) $k=k_1$ $(k=2+a)$

$x=0,\ \frac{2\pi}{b},\ \frac{4\pi}{b},\ \cdots,\ \frac{4b\pi}{b}=4\pi$에서 근을 가지므로 모든 근의 합은

$$\sum_{i=0}^{2b}\frac{2i\pi}{b}=\frac{2\pi}{b}\sum_{i=1}^{2b}i=\frac{2\pi}{b}\times\frac{2b(2b+1)}{2}=(4b+2)\pi$$

이다.

(2) $k=k_2$ $(2-a<k<2+a)$

구간 $\left[0,\ \frac{2\pi}{b}\right]$에서 두 근 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$를 갖는다. 삼각함수 대칭성에 의하여 $\alpha+\beta=2\times\frac{\pi}{b}=\frac{2\pi}{b}$임을 알 수 있다.

이러한 대칭축은 $\frac{\pi}{b},\ \frac{3\pi}{b},\ \cdots,\ \frac{(4b-1)\pi}{b}$에서 발생하므로 모든 근의 합은

$$\sum_{i=1}^{2b}2\times\frac{(2i-1)\pi}{b}=\frac{2\pi}{b}\sum_{i=1}^{2b}(2i-1)=\frac{2\pi}{b}\times\left\{2\times\frac{2b(2b+1)}{2}-2b\right\}=8b\pi$$

이다.

(3) $k=k_3$ $(k=2-a)$

$x=\frac{\pi}{b},\ \frac{3\pi}{b},\ \cdots,\ \frac{(4b-1)\pi}{b}$에서 근을 가지므로 모든 근의 합은

$$\sum_{i=1}^{2b}\frac{(2i-1)\pi}{b}=\frac{\pi}{b}\sum_{i=1}^{2b}(2i-1)=\frac{\pi}{b}\times\left\{2\times\frac{2b(2b+1)}{2}-2b\right\}=4b\pi$$

이다.

방정식 $f(x)(f(x)-5)=0$를 풀면 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=5$이므로 가능한 조합의 수를 따져보면 다음과 같다.
(단, $\bullet$은 해를 갖지 않는 경우이다.)

1) $(0,\ 5)=(\bullet,\ \bullet)$
해가 존재하지 않으므로 고려할 필요가 없다.

2) $(0,\ 5)=(k_3,\ \bullet)$
이 경우 (3)의 경우만 해당하므로 모든 해의 합은 $4b\pi$이다. $4b=170$을 만족하는 자연수 b는 존재하지 않으므로 불가능하다.

3) $(0,\ 5)=(k_2,\ k_1)$
이 경우 (1), (2)의 경우에 해당하므로 모든 해의 합은 $(4b+2)\pi+8b\pi=(12b+2)\pi$이다. $12b+2=170$에서 $b=14$이다.

4) $(0,\ 5)=(k_2,\ k_2)$
이 경우 (2)의 경우만 해당하므로 모든 해의 합은 $8b\pi+8b\pi=16b\pi$이다. $16b=170$을 만족하는 자연수 b는 존재하지 않으므로 불가능하다.

따라서 오직 3)의 경우만 가능하므로 $b=14$이고, 이 때 $a=3$이므로 $a+b=17$이다.

26. 정답 : 50 (출제자 : 전승현)

[출제의도] 등차수열의 등차중항을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

풀이 1)

$S_{50+n}-S_{50-n}=\dfrac{a_n}{a_5}+20n$에서 $a_n=a_5(S_{50+n}-S_{50-n}-20n)$이므로

$a_1=a_5(S_{51}-S_{49}-20)=a_5(a_{51}+a_{50}-20)$

$a_2=a_5(S_{52}-S_{48}-40)=a_5(a_{52}+a_{51}+a_{50}+a_{49}-40)=2a_5(a_{51}+a_{50}-20)$

$a_3=a_5(S_{53}-S_{47}-60)=a_5(a_{53}+a_{52}+a_{51}+a_{50}+a_{49}+a_{48}-60)=3a_5(a_{51}+a_{50}-20)$

$\vdots$

첫째항이 $a_1=a_5(a_{51}+a_{50}-20)$이고 공차가 $a_5(a_{51}+a_{50}-20)$이므로 $a_n=na_5(a_{51}+a_{50}-20)$ 임을 알 수 있다.

한편 $S_{50+n}-S_{50-n}=\dfrac{a_n}{a_5}+20n$에서

$n=5$일 때, $(a_{55}+a_{54}+a_{53}+\cdots+a_{47}+a_{46})=5(a_{51}+a_{50})=\dfrac{a_5}{a_5}+100=101$이므로 $a_{50}+a_{51}=\dfrac{101}{5}$이다.

따라서 $a_n=na_5(a_{51}+a_{50}-20)=na_5\left(\dfrac{101}{5}-20\right)=\dfrac{1}{5}na_5$이다.

또, $a_{50}+a_{51}=\dfrac{50}{5}a_5+\dfrac{51}{5}a_5=\dfrac{101}{5}a_5=\dfrac{101}{5}$이므로 $a_5=1$이다.

$a_n=\dfrac{1}{5}na_5=\dfrac{1}{5}n$이므로 $a_k=10$을 만족하는 자연수 k는 50이다.

풀이 2)

수열의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하자.

등차수열의 합 공식을 이용하여 $S_{50+n}-S_{50-n}=\dfrac{a_n}{a_5}+20n$의 양변을 정리하면..

$2na_1+99nd=\dfrac{a_n}{a_5}+20n$ ← 풀이 1에서는 계산 없이 바로 알아낼 수 있다.

$n=1$일 때 : $2a_1+99d=\dfrac{a_1}{a_5}+20$

$n=2$일 때 : $4a_1+198d=\dfrac{a_2}{a_5}+40$

두 식을 빼면,

$2a_1+99d=\dfrac{a_2-a_1}{a_5}+20=\dfrac{d}{a_5}+20$

이다. 이때 $2a_1+99d=\dfrac{a_1}{a_5}+20$이므로 $\dfrac{a_1}{a_5}+20=\dfrac{d}{a_5}+20$이고, $a_1=d$이다.

즉 $a_n=nd$이므로 $2na_1+99nd=101nd=\dfrac{nd}{5d}+20n=\dfrac{101}{5}n$에서 $d=\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $a_n=\dfrac{1}{5}d$이므로 $a_k=10$을 만족하는 자연수 k는 50이다.

27. 정답 : 1 (출제자 : 김범호)

[출제의도] 확률의 정의와 기본성질을 이해하고 있는가?

[문항해설]
주어진 조건

$$|\mathrm{P}(X=k)-\mathrm{P}(Y=5-k)|=\frac{1}{2} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

에서 X에 대한 확률값이 Y에 대한 확률값보다 큰 경우가 2개, 작은 경우가 2개라는 점이 바로 보인다면 직관력이 좋다고 할 수 있다. 그렇지만 우리는 직관에 의존할 수 없으니 k값을 대입하여 확률분포표를 만들어보자.
우선 X가 취할 수 있는 값 i에 대하여 확률을 각각 p_i라 하면 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

이제 $(*)$을 이용하여 Y의 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$p_4\pm\frac{1}{2}$	$p_3\pm\frac{1}{2}$	$p_2\pm\frac{1}{2}$	$p_1\pm\frac{1}{2}$	1

확률의 총합은 항상 1이어야 하므로 Y의 확률의 총합도 여전히 1이 되어야하고, $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$이므로

$\mathrm{P}(Y=j)$가 취해야 하는 값은 $p_{5-j}-\frac{1}{2}$가 2개, $p_{5-j}+\frac{1}{2}$가 2개가 됨을 알 수 있다. (단, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$)

따라서 $p_{5-j}-\frac{1}{2}$의 형태를 갖는 Y를 $n_1,\ n_2$라 하고 다른 경우를 $n_3,\ n_4$라 하면

X	n_1	n_2	n_3	n_4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$p_1{}'$	$p_2{}'$	$p_3{}'$	$p_4{}'$	1

Y	n_1	n_2	n_3	n_4	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$p_4{}'-\frac{1}{2}$	$p_3{}'-\frac{1}{2}$	$p_2{}'+\frac{1}{2}$	$p_1{}'+\frac{1}{2}$	1

와 같이 놓을 수 있다.
확률은 항상 0이상이라는 사실을 이용하면

$$p_3{}'\geq\frac{1}{2},\ p_4{}'\geq\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\ (**)$$

을 얻는다. 또한, 확률의 총합은 여전히 1이 되어야 하므로, $\sum_{i=1}^{4}p_i{}'=1$이다.

그런데, $(**)$ 역시 만족하고 있으므로 $p_1{}'=p_2{}'=0$ 그리고 $p_3{}'=p_4{}'=\frac{1}{2}$임을 얻을 수 있다.

$\mathrm{E}(X)=2$에서 $\frac{1}{2}(n_3+n_4)=2$이므로 $n_3+n_4=4$임을 알 수 있다. 가능한 순서쌍 $(n_3,\ n_4)$를 찾으면 $(1,\ 3),\ (3,\ 1)$임을 알 수 있고, 두 경우는 대칭적이므로 $n_3<n_4$라 해도 일반성을 잃지 않는다.

따라서 Y의 확률분포표는 최종적으로 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}(2+4)=3$, $\mathrm{E}(Y^2)=\frac{1}{2}(2^2+4^2)=10$이므로 $\mathrm{V}(Y)=10-3^2=1$이다.

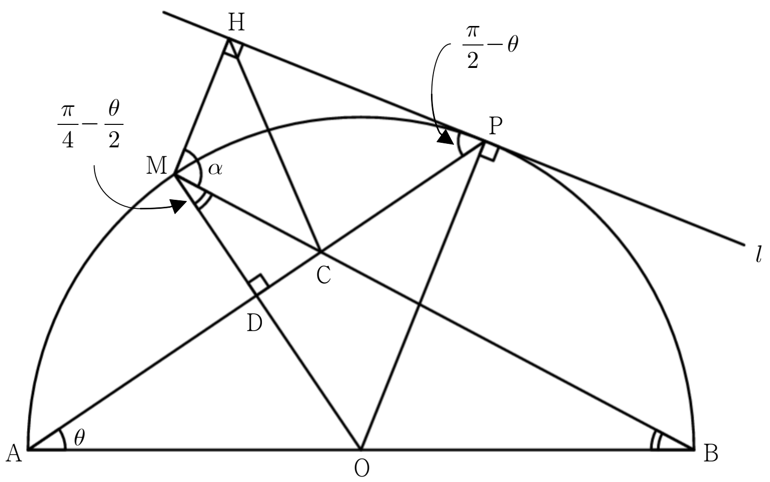
28. 정답 : 15 (출제자 : 김범호)

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여 삼각함수의 극한의 도형에의 활용 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

점 M이 호 AP의 중점이므로 반원의 중심 O와 연결하면 선분 OM은 선분 AP와 수직이다.

(점 M의 정의에서 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{PM}}$이므로 삼각형 AMP는 이등변삼각형이다. 마찬가지로 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$이므로 삼각형 OAP도 이등변삼각형이다. 따라서 점 M에서 선분 AP에 내린 수선의 발은 곧, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발과 같다.) 편의상 두 선분 OM과 AP가 만나는 점을 D라 하자. 그러면, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{PD}}=\frac{1}{2}\cos\theta$임을 알 수 있다.



점 P에서 직선 l과 반원이 접하므로 선분 OP를 연결하면 선분 OP와 직선 l은 수직이다.

또한, $\angle\mathrm{APO}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{APH}=\frac{\pi}{2}-\theta$임을 알 수 있다. 이등변삼각형 OMB에서 두 각 $\angle\mathrm{OMB}$, $\angle\mathrm{OBM}$은 같고, 그 합은 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 각각은 $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이다.

최종적으로 구하고자 하는 것은 $\overline{\mathrm{CH}}$이므로 삼각형 MCH에 초점을 두고 살펴보자.
(결국 코사인법칙을 활용하게 될 것임을 추측해볼 수 있다.)

$\angle\mathrm{CMH}=\alpha$라 하면 사각형 MDPH에서 $2\pi=\alpha+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\times2+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{3\theta}{2}$이다.

이제 필요한 정보는 $\overline{\mathrm{MH}}$와 $\overline{\mathrm{MC}}$이다.

$\overline{\mathrm{MD}}=\frac{1}{2}-\overline{\mathrm{OD}}$이고, $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{MD}}=\frac{1}{2}(1-\sin\theta)$이다.

따라서 삼각형 MDC에서

$$\overline{MC}=\frac{\overline{MD}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1-\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

이다.

호 AM에서 원주각의 성질을 이용하면 $\angle MPA=\angle MBA=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\angle MPH=\angle APH-\angle MPA=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

이다. 즉, 사각형 MDPH에서 두 삼각형 MDP와 MHP는 RHA합동이다.

($\because$ 선분 MP가 빗변으로 공통이고, $\angle MDP=\angle MHP=\frac{\pi}{2}$, $\angle MPD=\angle MPH=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이다.)

따라서 $\overline{MH}=\overline{MD}=\frac{1}{2}(1-\sin\theta)$이다.

삼각형 MCH에서 코사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\overline{CH}^2&=\left\{\frac{1-\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\right\}^2-2\times\frac{1-\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\times\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(1-\sin\theta)^2\times\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}+1-2\times\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right]\end{aligned}$$

이다.

또한,

$$\overline{PM}^2=\overline{DP}^2+\overline{DM}^2=\left\{\frac{1}{2}\cos\theta\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\right\}^2=\frac{1}{2}(1-\sin\theta)$$

이다.

$t=\frac{\pi}{2}-\theta$라 치환하면 $\overline{CH}$에 있는 각 항을 다음과 같이 변환할 수 있다.

㉠ $1-\sin\theta=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=1-\cos t$

㉡ $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)=\cos\frac{t}{2}$

㉢ $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3t}{2}\right)\right)=\cos\left(\pi-\frac{3t}{2}\right)=-\cos\frac{3t}{2}$

㉠~㉢을 $\overline{CH}$에 적용하면

$$\overline{CH}^2=\frac{1}{4}(1-\cos t)^2\times\left[\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}+1+2\times\frac{\cos\frac{3t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right]$$

이고, ㉠을 $\overline{PM}$에 적용하면 $\overline{PM}^2=\frac{1}{2}(1-\cos t)$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{\mathrm{CH}}\times\overline{\mathrm{PM}}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)^{3/2}}{t^3}\times\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}+1+2\times\frac{\cos\frac{3t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\times\sqrt{1+1+2}=\frac{1}{4}$$

이다. 따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$이므로 $60\alpha=15$이다.

29. 정답 : 896

(출제자 : 서민수)

[출제의도] 중복조합을 활용하여 같은 것을 포함한 순열의 수를 구할 수 있는가?

[문항해설]

공이 4개 들어있는 상자를 A, 공이 3개 들어있는 상자를 B, 공이 1개 들어있는 상자를 C라 하자.
각 상자에서 꺼내는 횟수를 $(p,\ q,\ r)$라 할 때,
각 상자에서 시행마다 꺼내는 공의 개수를 $(a_1,\ \cdots,\ a_p)$, $(b_1,\ \cdots,\ b_q)$, $(c_1,\ \cdots,\ c_r)$라 하고, 상자에서 공을 꺼내는 순서를 고려하여 경우의 수를 세면 된다.

8개의 공을 꺼내는데 걸리는 횟수는 상자가 3개이므로 최소 3번, 공이 8개이므로 최대 8번이다.
홀수 번 만에 공을 모두 꺼내므로 케이스를 아래와 같이 3가지로 분류할 수 있다.

(1) 3번 만에 공을 모두 꺼내는 경우
$p+q+r=3$에서 $(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$만 가능하다.
$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$일 때 $a_1=4$, $b_1=3$, $c_1=1$이고 A, B, C 배열을 해야 하므로 $1\times3!=6$가지이다.

(2) 5번 만에 공을 모두 꺼내는 경우
$p+q+r=5$에서 가능한 경우는 $(p,\ q,\ r)=(3,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 1)$이다.
$(p,\ q,\ r)=(3,\ 1,\ 1)$일 때 $a_1+a_2+a_3=4$, $b_1=3$, $c_1=1$이고 A, A, A, B, C 배열을 해야 하므로

${}_3\mathrm{H}_{4-3}\times\frac{5!}{3!}=60$가지이다.

$(p,\ q,\ r)=(2,\ 2,\ 1)$일 때 $a_1+a_2=4$, $b_1+b_2=3$, $c_1=1$이고 A, A, B, B, C 배열을 해야 하므로

${}_2\mathrm{H}_{4-2}\times{}_2\mathrm{H}_{3-2}\times\frac{5!}{2!\times2!}=180$가지이다.

$(p,\ q,\ r)=(1,\ 3,\ 1)$일 때 $a_1=4$, $b_1+b_2+b_3=3$, $c_1=1$이고 A, B, B, B, C 배열을 해야 하므로

${}_3\mathrm{H}_{3-3}\times\frac{5!}{3!}=20$가지이다.

(3) 7번 만에 공을 모두 꺼내는 경우
$p+q+r=7$에서 가능한 경우는 $(p,\ q,\ r)=(4,\ 2,\ 1)$, $(3,\ 3,\ 1)$이다.
$(p,\ q,\ r)=(4,\ 2,\ 1)$일 때 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$, $b_1+b_2=3$, $c_1=1$이고 A, A, A, A, B, B, C 배열을 해야 하므로

${}_4\mathrm{H}_{4-4}\times{}_2\mathrm{H}_{3-2}\times\frac{7!}{4!\times2!}=210$가지이다.

$(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 1)$일 때 $a_1+a_2+a_3=4$, $b_1+b_2+b_3=3$, $c_1=1$이고 A, A, A, B, B, B, C 배열을 해야 하므로

${}_3\mathrm{H}_{4-3}\times{}_3\mathrm{H}_{3-3}\times\frac{7!}{3!\times3!}=420$가지이다.

따라서 전체 경우의 수는 $6+60+180+20+210+420=896$가지이다.

30. 정답 : 10 (출제자 : 김범호)

[출제의도] 역함수의 존재 조건과 접선을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

함수 $g(x)$가 정적분으로 정의된 함수로 주어져 있으므로 양변을 미분하면

$$g'(x)=f(x)-mx \qquad \cdots\cdots (*)$$

를 얻고, 조건 (가)에서 $g'(-1)=f(-1)+m=0$이므로 $f(-1)=(1-a+b)e=-m$을 얻는다.
함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$이어야 한다.
그런데 $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-mx\}=\infty$이므로 $g'(x)\geq 0$를 만족해야 함을 알 수 있다.

여기서 직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)$와 $x=-1$에서 만난다는 정보를 활용하면 반드시 $y=mx$가 $y=f(x)$에 접한다는 것을 알 수 있고, 더하여 그 접점이 $(-1,\ -m)$이라는 것을 알 수 있다.
(그렇지 않을 경우 $(-\infty,\ -1)$ 또는 $(-1,\ \infty)$에서 $g'(x)<0$가 되기 때문이다.)
따라서, 이를 통해 $f'(-1)=m$을 얻는다.
$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$에서 $f'(x)=(-x^2+(2-a)x+a-b)e^{-x}$이므로

$$f'(-1)=(2a-b-3)e=m=(a-b-1)e$$

이고, 이를 풀면 $a=2$임을 알 수 있다.
한편, 역함수 존재 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$라고 했으므로 우리는 $y=g'(x)$의 개형을 통해 최솟값이 0이어야 한다는 점을 이용해야 한다. $y=g'(x)$의 개형을 파악하기 위해 미분하면 $(*)$에서

$$g''(x)=f'(x)-m=(-x^2+2-b)e^{-x}-f'(-1)$$

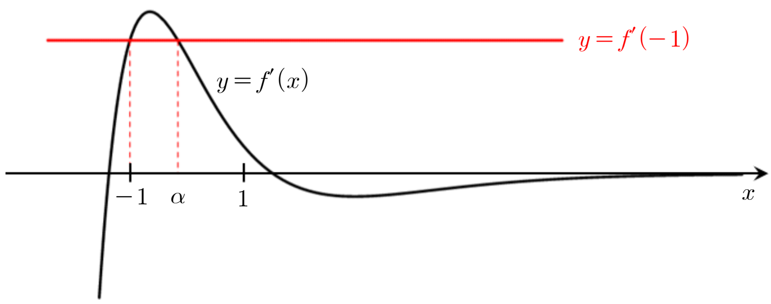
이다. 그런데 $g'(-1)=0$이므로 $g'(x)\geq 0$를 판별하는 것은 곧 $g'(x)$의 최소가 $x=-1$에서 발생하는지를 묻는 것과 같다. 따라서 이를 $f'(x)$와 $f'(-1)$의 대소를 비교하는 문제로 회귀시킬 수 있다.
즉, $y=f'(x)$의 개형을 그리면 된다. 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로 $f'(x)=0$은 $x^2=2-b$에서 발생한다.
$f'(x)$와 $f'(-1)$의 대소를 비교하기 위해서 근이 생기는 지점을 $x=-1$ 전후로 나눠서 생각해보자.
다시 말해,

(1) $b<1$인 경우 : $x<-1$ or $x>1$
(2) $b=1$인 경우 : $x=\pm 1$
(3) $b=2$인 경우 : $x=0$
(4) $b>2$인 경우 : 해가 없다.

로 나눌 수 있다.

$y=-x^2e^{-x}$의 개형을 생각해볼 때, $x=0$을 기준으로 증감은 $(+)$에서 $(-)$로 바뀐다.
이를 각 경우에 적용하면 다음과 같다.

(1) $b<1$

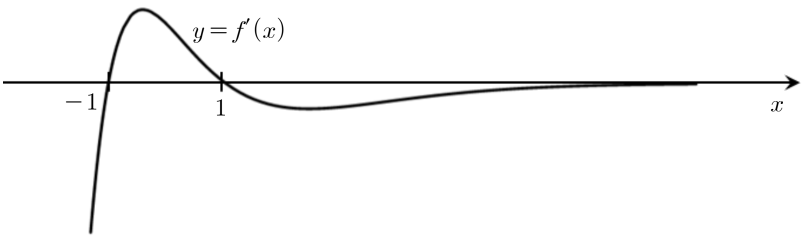


$x<-1$에서 $f'(x)<f'(-1)$, $-1<x<\alpha$에서 $f'(x)>f'(-1)$, 그리고 $x>\alpha$에서 $f'(x)<f'(-1)$이므로 증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	α	$\cdots$
g''	$-$	0	$+$	0	$-$
g'	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$

그런데 $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-mx\}=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-f'(-1)x\}=-\infty$ $(\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ f'(-1)>0)$이므로 $g'(x)$는 최솟값이 존재하지 않는다. 따라서, 이는 불가능한 경우이다.

(2) $b=1$

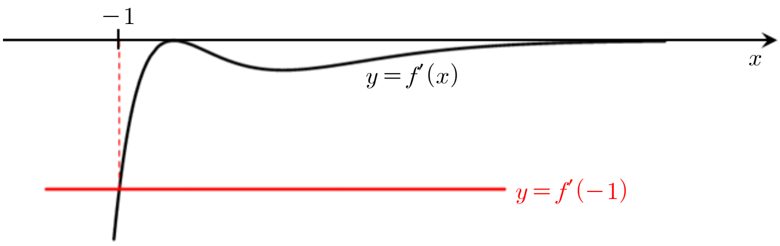


(1)과 같은 방법으로 증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
g''	$-$	0	$+$	0	$-$
g'	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$

또한, $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-mx\}=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-f'(-1)x\}=0$ $(\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ f'(-1)>0)$이므로 $g'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 0을 갖는다. 따라서, 가능한 경우이다.

(3) $b=2$

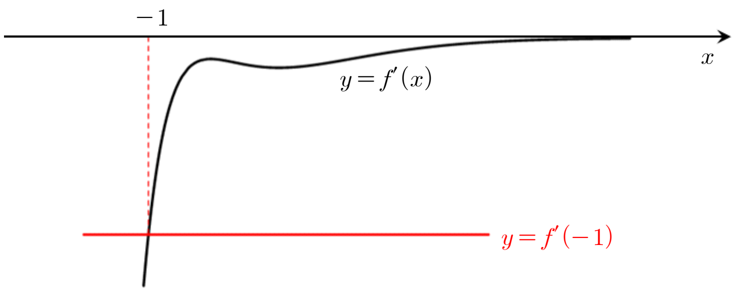


(1)과 같은 방법으로 증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
g''	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$	0	$\nearrow$

또한, $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-mx\}=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-f'(-1)x\}=\infty$ $(\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ f'(-1)<0)$이므로 $g'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 0을 갖는다. 따라서, 가능한 경우이다.

(4) $b>2$



(1)과 같은 방법으로 증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
g''	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$	0	$\nearrow$

또한, $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-mx\}=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-f'(-1)x\}=\infty$ $(\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ f'(-1)<0)$이므로 $g'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 0을 갖는다. 따라서, 가능한 경우이다.

(1)~(4)에서 가능한 b의 범위는 $b\geq 1$임을 알 수 있다.

이제 조건 (나)를 보자. 함수 $g(x)$의 정의에서 $g(0)=0$이고, 역함수의 미분법을 이용하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g^{-1}(x)}{x}\geq\frac{1}{10}$$

를 다시 써서 $g'(0)\leq 10$이 됨을 알 수 있다. $(*)$에서 $g'(0)=f(0)=b$이므로 $b\leq 10$를 얻는다.

따라서 $a=2$, $1\leq b\leq 10$이므로 가능한 정수 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$부터 $(2,\ 10)$까지 10개다.