



www.ebsi.co.kr

수능특강 수학영역 수학 I



정답과 풀이



01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

- 1 ② 2 8 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
 6 ⑤ 7 ③ 8 ③ 9 ① 10 ④

Level 1 기초 연습

본문 14~15쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ① 4 ④ 5 126
 6 ③ 7 ② 8 ⑤ 9 ⑤ 10 31

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

- 1 ③ 2 ② 3 ④ 4 ③ 5 11
 6 25 7 ③ 8 ④ 9 ④

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

- 1 ③ 2 54 3 ③

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제

본문 37~45쪽

- 1 48 2 ② 3 235 4 ③ 5 ②
 6 ② 7 ② 8 ③ 9 16

Level 1 기초 연습

본문 46~48쪽

- 1 ⑤ 2 ② 3 72 4 ① 5 ⑤
 6 ④ 7 ③ 8 ④ 9 ① 10 ④
 11 ④ 12 ⑤ 13 ① 14 ④

Level 2 기본 연습

본문 49~50쪽

- 1 ① 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ③
 6 ① 7 ① 8 ③

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

- 1 ④ 2 ① 3 ③ 4 19

02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

- 1 38 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ②
 6 8 7 ② 8 ③ 9 81 10 ①

Level 1 기초 연습

본문 30쪽

- 1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ⑤ 5 18

Level 2 기본 연습

본문 31~32쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ② 4 ② 5 ③
 6 ① 7 ④ 8 23

Level 3 실력 완성

본문 33쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 6

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ③
 6 ③

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

- 1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 71
 6 ③ 7 481 8 ③

Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

- 1 47 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ④
 6 ④ 7 ② 8 ② 9 ④ 10 ③
 11 81 12 ④

Level 3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 ③ 2 ① 3 97

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ② 5 ⑤
6 ① 7 ① 8 ②

Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

- 1 ① 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 ②
6 5 7 ② 8 ① 9 ⑤ 10 ③

Level 2 기본 연습

본문 80~82쪽

- 1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 10 5 ②
6 ④ 7 ③ 8 ④ 9 20 10 ②
11 86 12 ③ 13 ① 14 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 83쪽

- 1 ③ 2 35 3 ③

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 87~97쪽

- 1 ② 2 15 3 ③ 4 ① 5 ④
6 2 7 ⑤ 8 ② 9 12 10 5
11 ②

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

- 1 ① 2 ③ 3 31 4 ② 5 ⑤
6 ① 7 10 8 ② 9 ③ 10 ①

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

- 1 ② 2 ① 3 ① 4 ② 5 350
6 ④ 7 9 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

- 1 19 2 9 3 ③ 4 ①



01 지수와 로그

유제		본문 5~13쪽				
1 ②	2 8	3 ④	4 ⑤	5 ③		
6 ⑤	7 ③	8 ③	9 ①	10 ④		

1
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \times \sqrt[3]{(-2)^6} &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2^3}} \times \sqrt[3]{2^6} \\ &= \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \sqrt[3]{(2^2)^3}} \\ &= -\frac{1}{2} \times 2^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

답 ②

2 20, 12, 15의 최소공배수는 60이므로 60제곱근으로 통일하여 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \sqrt[20]{2} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[15]{2}} &= \sqrt[60]{2^3} \times \frac{\sqrt[60]{2^5}}{\sqrt[60]{2^4}} \\ &= \sqrt[60]{\frac{2^3 \times 2^5}{2^4}} \\ &= \sqrt[60]{2^4} \\ &= \sqrt[15]{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt[20]{2} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[15]{2}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{2}} \text{이므로}$$

$$\sqrt[15]{2} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$$

$$\sqrt[15]{2} = \sqrt{mn}{2}$$

즉, $mn=15$

따라서 이를 만족시키는 2 이상의 두 자연수 m, n 은

$m=3, n=5$ 또는 $m=5, n=3$ 이므로

$$m+n=8$$

답 8

3
$$\begin{aligned} (2\sqrt{2} \times 2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} &= (2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \\ &= (2^{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \\ &= (2^{\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}} \\ &= 2^{\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}} \\ &= 2^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{5}{4}$

답 ④

4
$$\begin{aligned} (3 \times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1} &= (3^{1+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1} \\ &= 3^{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= 3^{2-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

5 $3^x=12$ 에서 $x=\log_3 12$ 이므로

$$\begin{aligned} x+2y &= \log_3 12 + 2 \log_3 \frac{3}{2} \\ &= \log_3 12 + \log_3 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \log_3 \left(12 \times \frac{9}{4}\right) \\ &= \log_3 27 \\ &= \log_3 3^3 \\ &= 3 \log_3 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$y = \log_3 \frac{3}{2}$ 에서 $3^y = \frac{3}{2}$ 이므로

$$3^{2y} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

이때 $3^x = 12$ 이므로

$$3^x \times 3^{2y} = 12 \times \frac{9}{4}$$

$$3^{x+2y} = 27$$

따라서 $x+2y = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

6
$$\begin{aligned} \frac{\log_5 \sqrt[4]{125}}{\log_2 \sqrt{12} - \log_2 \sqrt{3}} &= \frac{\log_5 \sqrt[4]{5^3}}{\log_2 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\log_5 \sqrt[4]{5^3}}{\log_2 \sqrt{2^2}} \\ &= \frac{\log_5 5^{\frac{3}{4}}}{\log_2 2} \\ &= \frac{\log_5 5^{\frac{3}{4}}}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \log_5 5 \\ &= \frac{3}{4} \log_2 2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 7 \quad \log_9 54 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} &= \log_3 54 + \log_{3^{-1}} 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 54 - \frac{1}{2} \log_3 2 \\ &= \frac{1}{2} (\log_3 54 - \log_3 2) \\ &= \frac{1}{2} \log_3 \frac{54}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 27 \\ &= \frac{1}{2} \log_3 3^3 \\ &= \frac{3}{2} \log_3 3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 8 \quad \frac{1}{\log_{24} 2} - \frac{1}{\log_9 4} &= \log_2 24 - \log_4 9 \\ &= \log_2 24 - \log_{2^2} 3^2 \\ &= \log_2 24 - \log_2 3 \\ &= \log_2 \frac{24}{3} \\ &= \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 \\ &= 3 \log_2 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 9 \quad \log 0.006 &= \log \frac{6}{1000} \\ &= \log 6 - \log 1000 \\ &= \log (2 \times 3) - \log 10^3 \\ &= \log 2 + \log 3 - 3 \log 10 \\ &= 0.3010 + 0.4771 - 3 \\ &= -2.2219 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 10 \quad \log_5 9 &= \frac{\log 9}{\log 5} \\ &= \frac{\log 3^2}{\log \frac{10}{2}} \\ &= \frac{2 \log 3}{\log 10 - \log 2} \\ &= \frac{2b}{1-a} \end{aligned}$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 14~15쪽

1 ⑤	2 ③	3 ①	4 ④	5 126
6 ③	7 ②	8 ⑤	9 ⑤	10 31

$$\begin{aligned} 1 \quad \sqrt[12]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{2} &= \sqrt[12]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[12]{2^4} \\ &= \sqrt[12]{\frac{1}{2} \times 2^4} \\ &= \sqrt[12]{2^3} \\ &= \sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 2 \quad 9^{\frac{1}{3}} \times 81^{-\frac{1}{6}} &= (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^4)^{-\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \\ &= 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \\ &= 3^0 = 1 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 3 \quad a^{-\frac{1}{4}} = 3 \text{에서 } a &= 3^{-4} \\ b^{-\frac{1}{2}} = 4 \text{에서 } b &= 4^{-2} = 2^{-4} \\ c^{-\frac{1}{3}} = 18 \text{에서 } c &= 18^{-3} = (2 \times 3^2)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-6} \\ \text{따라서} \\ \frac{c}{ab} &= \frac{2^{-3} \times 3^{-6}}{3^{-4} \times 2^{-4}} \\ &= \frac{3^4 \times 2^4}{2^3 \times 3^6} \\ &= \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

답 ①



4 $2^x = 25$ 에서 $2 = 25^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{2}{x}}$

$$5^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$3^y = 25$ 에서 $3 = 25^{\frac{1}{y}} = 5^{\frac{2}{y}}$

$$5^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

따라서 $5^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 5^{\frac{1}{x}} \times 5^{\frac{1}{y}} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

답 ④

5 $\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2^5 \times 3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{2^5 \times 3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값이 자연수가 되려면 $\frac{2^5 \times 3}{n}$ 이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로 n 은 3을 약수로 갖고, 2 또는 2^3 또는 2^5 을 약수로 갖는 수이어야 한다.

따라서 $\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n 은

$$3 \times 2 = 6, 3 \times 2^3 = 24, 3 \times 2^5 = 96$$

이므로 구하는 모든 n 의 값의 합은

$$6 + 24 + 96 = 126$$

답 126

다른 풀이

$$\left(\frac{2^5 \times 3}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \times \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$
의 값이 자연수가 되려면

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값이 $\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}$ 또는 자연수가 되어야 한다.

$$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$
에서 $\frac{6}{n} = \frac{1}{16}$ 이므로 $n = 96$

$$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$
에서 $\frac{6}{n} = \frac{1}{4}$ 이므로 $n = 24$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값이 자연수이려면 $\frac{6}{n}$ 이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로

$$n = 6$$

따라서 구하는 모든 n 의 값의 합은

$$6 + 24 + 96 = 126$$

6 $2 \log_2 \sqrt[4]{6} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{8}{3} = \log_2 (\sqrt[4]{6})^2 + \log_2 \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$= \log_2 \left(\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$$

$$= \log_2 \sqrt{16}$$

$$= \log_2 2^2$$

$$= 2 \log_2 2 = 2$$

답 ③

다른 풀이

$$2 \log_2 \sqrt[4]{6} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{8}{3} = 2 \log_2 6^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 6 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log_2 6 + \log_2 \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left(6 \times \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 2^4$$

$$= 2 \log_2 2 = 2$$

7 $(\log_2 9 - \log_4 9)(\log_3 4 - \log_{27} 2)$

$$= (\log_2 3^2 - \log_{2^2} 3^2)(\log_3 2^2 - \log_{3^3} 2)$$

$$= (2 \log_2 3 - \log_2 3) \left(\log_3 2 - \frac{1}{3} \log_3 2 \right)$$

$$= \log_2 3 \times \frac{2}{3} \log_3 2$$

$$= \log_2 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{\log_2 3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

답 ②

8 $\log_3 45 - \frac{1}{\log_{25} 9} = \log_3 45 - \log_9 25$

$$= \log_3 45 - \log_{3^2} 5^2$$

$$= \log_3 45 - \log_3 5$$

$$= \log_3 \frac{45}{5}$$

$$= \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2$$

$$= 2 \log_3 3 = 2$$

답 ⑤

9 $a = \log 0.2$

$$= \log \frac{2}{10}$$

$$= \log 2 - \log 10$$

$$= \log 2 - 1$$

이므로 $\log 2 = a + 1$

따라서

$$\begin{aligned}\log 80 &= \log(2^3 \times 10) \\ &= \log 2^3 + \log 10 \\ &= 3 \log 2 + 1 \\ &= 3(a+1) + 1 \\ &= 3a + 4\end{aligned}$$

답 ⑤

10 $a^2 = b^3$ 에서 $b = a^{\frac{2}{3}}$

$$b^3 = c^4$$
에서 $c = b^{\frac{3}{4}}$

$$a^2 = c^4$$
에서 $a = c^2$

$$\log_a \sqrt{b} + \log_b \frac{1}{c} + \log_c a$$

$$= \frac{1}{2} \log_a b - \log_b c + \log_c a$$

$$= \frac{1}{2} \log_a a^{\frac{2}{3}} - \log_b b^{\frac{3}{4}} + \log_c c^2$$

$$= \frac{1}{3} \log_a a - \frac{3}{4} \log_b b + 2 \log_c c$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + 2$$

$$= \frac{19}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=19$ 이므로

$$p+q=12+19=31$$

답 31

다른 풀이

$$a^2 = b^3 = c^4 = k$$
라 하면

$$a = k^{\frac{1}{2}}, b = k^{\frac{1}{3}}, c = k^{\frac{1}{4}}$$
이므로

$$\log_a \sqrt{b} + \log_b \frac{1}{c} + \log_c a$$

$$= \frac{1}{2} \log_a b - \log_b c + \log_c a$$

$$= \frac{1}{2} \log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}} - \log_{k^{\frac{1}{3}}} k^{\frac{1}{4}} + \log_{k^{\frac{1}{4}}} k^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{19}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=19$ 이므로

$$p+q=12+19=31$$

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

1 ③	2 ②	3 ④	4 ③	5 11
6 25	7 ③	8 ④	9 ④	

1 $f_n(x)$ 의 값은 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 1

(ii) n 이 짝수일 때,

$$x > 0 \text{이면 } 2, x = 0 \text{이면 } 1, x < 0 \text{이면 } 0$$

2의 제곱근 중 음수인 것이 a 이므로 $a < 0$

-3의 세제곱근 중 실수인 것이 b 이므로 $b < 0$

따라서 $a+b < 0$, $ab > 0$ 이므로

$$f_3(a) + f_4(b) + f_5(a+b) + f_6(ab) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$$

답 ③

2 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ 에서

$$a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})^3 = \sqrt{2}-1$$

$$a^3 = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{a^{-\frac{1}{2}} \times (a^2 - a^{\frac{1}{2}}) + a^{\frac{1}{2}} \times (a + a^{-\frac{1}{2}})}{(a + a^{-\frac{1}{2}})(a^2 - a^{\frac{1}{2}})}\end{aligned}$$

$$= \frac{(a^{\frac{3}{2}} - 1) + (a^{\frac{3}{2}} + 1)}{a^3 - a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} - 1}$$

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{a^3 - 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(3-2\sqrt{2})-1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-2(\sqrt{2}-1)}$$

$$= -1$$

답 ②

다른 풀이

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$$
에서

$$a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})^3 = \sqrt{2}-1$$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}+1} + \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\sqrt{2}-1)+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-2} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)} \\
&= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-2(\sqrt{2}-1)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

3 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 에서

$$\begin{aligned}
x + x^{-1} &= (x^{\frac{1}{2}})^2 + (x^{-\frac{1}{2}})^2 \\
&= (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 4^2 + 2 \\
&= 18
\end{aligned}$$

$x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = k$ 라 하면 x 가 양수이므로 k 도 양수이다.

$$\begin{aligned}
x + x^{-1} &= (x^{\frac{1}{3}})^3 + (x^{-\frac{1}{3}})^3 \\
&= (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3 - 3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) \\
&= (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3 - 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})
\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}
18 &= k^3 - 3k \\
k^3 - 3k - 18 &= 0 \\
(k-3)(k^2 + 3k + 6) &= 0
\end{aligned}$$

이때 양수 k 에 대하여

$$\begin{aligned}
k^2 + 3k + 6 &= \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{이므로} \\
k &= 3
\end{aligned}$$

따라서 $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$

참고

$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 에서 $x + x^{-1} = 18$ 이므로

$$\begin{aligned}
x + x^{-1} - 18 &= 0 \\
x^2 - 18x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

이차방정식 $x^2 - 18x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-9)^2 - 1 > 0 \text{이므로}$$

이차방정식 $x^2 - 18x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한 이차방정식 $x^2 - 18x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이 $18 > 0$,

두 근의 곱이 $1 > 0$ 이므로 두 근은 모두 양수이다.

따라서 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 를 만족시키는 양의 실수 x 가 존재한다.

답 ④

4 $15^b = 3$ 에서

$$\begin{aligned}
15^{-b} &= 3^{-1} = \frac{1}{3} \\
15^{1-b} &= 15 \times 15^{-b} \\
&= 15 \times \frac{1}{3} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$15 = 5^{1-b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $15^a = 2$ 에 대입하면

$$(5^{1-b})^a = 2, \quad 5^{1-b} = 2$$

따라서

$$\begin{aligned}
25^{1-b} &= (5^2)^{1-b} \\
&= (5^{1-b})^2 \\
&= 2^2 = 4
\end{aligned}$$

답 ③

5 $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^3}} = a^{\frac{3}{n^2}}$ 이므로

(i) n 이 3의 배수일 때,

$n = 3k$ (k 는 자연수)라 하면 $a^{\frac{3}{n^2}} = a^{\frac{1}{3k^2}}$ 이므로

$a^{\frac{1}{n^2}}$ 의 값이 자연수이려면 $a^{\frac{1}{3k^2}}$ 의 값이 자연수이어야 한다.

$a^{\frac{1}{3k^2}}$ 의 값이 자연수이기 위한 k, a 중 $k+a$ 가 최소인 것은 $k=1, a=8$ 이고, 이때 $n=3, a=8$ 이므로 $n+a$ 의 최솟값은 $3+8=11$ 이다.

(ii) n 이 3의 배수가 아닐 때,

$a^{\frac{3}{n^2}}$ 의 값이 자연수이려면 $a^{\frac{1}{n^2}}$ 의 값이 자연수이어야 한다.

$a^{\frac{1}{n^2}}$ 의 값이 자연수이기 위한 n, a 중 $n+a$ 가 최소인 것은 $n=2, a=16$ 이므로 $n+a$ 의 최솟값은 $2+16=18$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은 11이다.

답 11

6 $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{a}$ 에서

$$\frac{b}{a} = \sqrt[3]{a^2} \text{이므로}$$

$$b = a\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_b ac = \log_a b$ 에서

$$\log_b a + \log_b c = \log_a b$$

$$\log_b c = \log_a b - \log_b a$$

$$\log_b c = \log_a b - \frac{1}{\log_a b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠에서 $\log_a b = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$ 이므로

㉡에서 $\log_b c = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15}$

$$c = b^{\frac{16}{15}} = (a^{\frac{5}{3}})^{\frac{16}{15}} = a^{\frac{16}{9}}$$

$$\log_a c = \log_a a^{\frac{16}{9}} = \frac{16}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=16$ 이므로

$$p+q=9+16=25$$

다른 풀이

$\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{a}$ 에서 $b = a^{\frac{5}{3}}$ 이므로

$$\log_a b = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

$\log_b ac = \log_a b$ 에서

$$\frac{\log_a ac}{\log_a b} = \log_a b$$

$$\frac{1 + \log_a c}{\log_a b} = \log_a b$$

$$\log_a c = (\log_a b)^2 - 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{16}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=16$ 이므로

$$p+q=9+16=25$$

7 $\log x^a = \log \frac{y}{x}$ 에서

$$a \log x = \log y - \log x$$

$$\log y = (a+1) \log x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b \log y = \log \frac{y}{x}$ 에서

$$b \log y = \log y - \log x$$

$$(b-1) \log y = -\log x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(b-1)(a+1) \log x = -\log x$$

$$(ab-a+b) \log x = 0$$

$\log x \neq 0$ 이므로

$$ab-a+b=0, \text{ 즉 } a-b=ab$$

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}$$

$$= \frac{(ab)^2+2ab}{ab}$$

$$= ab+2=5$$

이므로 $ab=3$

답 25

답 ③

참고 1

$a \log x = b \log y = \log \frac{y}{x}$ 에서 두 양수 x, y 는 1이 아닌

서로 다른 수이므로 $\log x \neq 0$, $\log y \neq 0$, $\log \frac{y}{x} \neq 0$ 이다.

따라서 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이므로 $ab \neq 0$, $a-b \neq 0$ 이다.

참고 2

문제의 조건을 만족시키는 a, b, x, y 가 존재함을 알아보자.

먼저 $a-b=ab$ 이고 $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$ 를 만족시키는 a, b 의 값을 구해 보자.

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} = \frac{(ab)^2+2ab}{ab} = ab+2=5$$

에서 $ab=3$

$a-b=3$, $ab=3$ 에서

$$a(a-3)=3, a^2-3a-3=0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \\ b = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

따라서 $a-b=ab$ 이고 $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$, 즉 $a-b=3$ 이고

$ab=3$ 인 두 상수 a, b 가 존재한다.

이때 $a \log x = b \log y$ 이고 $b \log y = \log \frac{y}{x}$ 를 만족시키는 1이 아닌 두 양수 x, y 가 존재하는지 알아보자.

$\log y = \frac{a}{b} \times \log x$ 를 $b \log y = \log \frac{y}{x}$ 에 대입하여 정리하면

$$a \log x = \frac{a}{b} \times \log x - \log x, \text{ 즉 } (ab-a+b) \log x = 0$$

$a-b=3$, $ab=3$, 즉 $ab-a+b=0$ 이므로

$(ab-a+b) \log x = 0$ 을 만족시키는 1이 아닌 양수 x 는 무수히 많다.

이때 $a = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$, $b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ 이라 하고, 적당한 양수 k

에 대하여 $\log x = k$ 라 하면 문제의 조건을 만족시키는 1이 아닌 양수 x 가 존재하고,

$$\log y = \frac{a}{b} \times \log x = \frac{3 + \sqrt{21}}{-3 + \sqrt{21}} k > 0$$

이므로 1이 아닌 양수 y 도 존재한다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 a, b, x, y 가 존재함을 알 수 있다.

8 $A \cap B = A$ 에서 $A \subset B$

$1 \in B$ 이어야 하므로



$$1 = 2 \log_2 a - \log_2 b$$

$$1 = \log_2 a^2 - \log_2 b$$

$$1 = \log_2 \frac{a^2}{b}$$

$$\frac{a^2}{b} = 2 \text{에서 } a^2 = 2b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_a b \in B$ 이어야 하므로

$\log_a b = 2$ 또는 $\log_a b = 3$ 이어야 한다.

$\log_a b = 2$ 이면

$b = a^2$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$a^2 = 2a^2$ 에서 $a = 0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\log_a b = 3$ 이면

$b = a^3$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

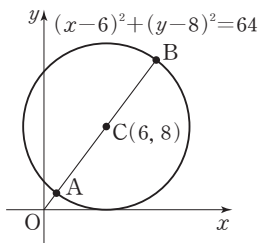
$$a^2 = 2a^3 \text{에서 } a \neq 0 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = \frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$$

답 ④

- 9 원 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 64$ 의 중심을 C라 하면 C(6, 8)이고 반지름의 길이는 8이다. 그림과 같이 원점 O와 중심 C를 잇는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.



$$\overline{OC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\overline{OA} = 10 - 8 = 2, \overline{OB} = 10 + 8 = 18 \text{이므로}$$

원 위의 점 P에 대하여

$$2 \leq D_P \leq 18$$

$\log_2 D_P$ 의 값이 자연수이려면 $D_P = 2^n$ (n 은 자연수)이어야 한다.

$D_P = 2$ 가 되는 점 P의 개수는 1이고,

D_P 의 값이 $2^2, 2^3, 2^4$ 이 되는 점 P의 개수는 각각 2이므로

$\log_2 D_P$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 7이다.

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

- 1 ③ 2 54 3 ③

1 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}} = (mn)^{\frac{n}{3m}}$

$(mn)^{\frac{n}{3m}}$ 의 값이 자연수가 되려면 $\frac{n}{3m}$ 이 자연수이거나,

$\frac{n}{3m}$ 이 자연수가 아닐 때는 우선 mn 이 어떤 자연수의 세제곱인 수이어야 한다.

(i) $\frac{n}{3m}$ 이 자연수인 경우

$\frac{n}{m}$ 이 3의 배수인 경우, 즉 n 이 $3m$ 의 배수인 경우이므로 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(2, 6), (3, 9)$ 이다.

(ii) $\frac{n}{3m}$ 이 자연수가 아닌 경우

$\frac{n}{m}$ 이 3의 배수가 아닌 경우이므로 우선 mn 이 어떤 자연수의 세제곱인 수이어야 하는데, 이런 경우의 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(2, 4), (4, 2), (8, 8), (9, 3)$ 이다.

각각의 경우 $(mn)^{\frac{n}{3m}}$ 의 값은

$$(2 \times 4)^{\frac{4}{3 \times 2}} = 4$$

$$(4 \times 2)^{\frac{2}{3 \times 4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$(8 \times 8)^{\frac{8}{3 \times 8}} = 4$$

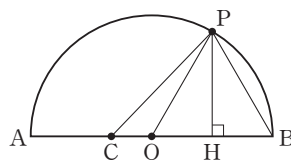
$$(9 \times 3)^{\frac{3}{3 \times 9}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

이므로 $(mn)^{\frac{n}{3m}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(2, 4), (8, 8)$ 이다.

(i), (ii)에서 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(2, 6), (3, 9), (2, 4), (8, 8)$ 이고, 그 개수는 4이다.

답 ③

- 2 선분 AB의 중점을 O, 점 P에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$$\overline{AC} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2 \text{에서 } \overline{CB} = 2\overline{AC} = 4\sqrt[4]{2}$$

$$\overline{AB} = 2^4\sqrt{2} + 4^4\sqrt{2} = 6^4\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AO} = \overline{OB} = 3^4\sqrt{2}$$

$\widehat{AP} : \widehat{PB} = 2 : 1$ 에서 $\angle POB = 60^\circ$ 이므로 삼각형 POB는 정삼각형이다.

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{OP} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3^4\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2} \times 4^4\sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{3^4\sqrt{18}}{2} \end{aligned}$$

이므로 삼각형 PCB의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{CB} \times \overline{PH} \\ &= \frac{1}{2} \times 4^4\sqrt{2} \times \frac{3^4\sqrt{18}}{2} \\ &= 3^4\sqrt{36} \\ &= 3^4\sqrt{6^2} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } S^2 = (3\sqrt{6})^2 = 54$$

답 54

3. 가. 집합 A_2 는 $2 = a \log_2 b$ 인 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 하는 집합이다.

$$2 = a \log_2 b \text{에서}$$

$$\log_2 b^a = 2, \text{ 즉 } b^a = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4), (2, 2)$ 이므로

$$A_2 = \{(1, 4), (2, 2)\} \text{ (참)}$$

- 나. [반례] $p = q = 2$ 일 때, $pq = 4$

ㄱ에서 $A_2 = \{(1, 4), (2, 2)\}$ 이므로

$$n(A_2) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$4 = a \log_2 b \text{에서}$$

$$\log_2 b^a = 4, \text{ 즉 } b^a = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 16), (2, 4), (4, 2)$ 이므로

$$A_4 = \{(1, 16), (2, 4), (4, 2)\}$$

$$n(A_4) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉡, ㉣에서

$$n(A_2) \times n(A_2) \neq n(A_4) \text{ (거짓)}$$

- 다. $m = a \log_2 b$ 에서 $b = 2^{\frac{m}{a}}$

$m \neq 0$ 이므로 b 가 자연수이려면 $\frac{m}{a}$ 이 자연수이어야 한다.

자연수 k 에 대하여 $\frac{m}{a} = k$ 라 하면 $m = ka$ 이므로

순서쌍 (k, a) 의 개수는 m 의 양의 약수의 개수와 같다. 즉, 집합 A_m 의 원소인 순서쌍 (a, b) 의 개수는 m 의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 $n(A_m) = 4$ 를 만족시키는 m 은 양의 약수의 개수가 4인 수이므로 서로 다른 두 소수가 곱해진 수이거나 어떤 소수의 세제곱인 수이다.

30 이하의 자연수 m 중에서

서로 다른 두 소수가 곱해진 수는

$$2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 11, 2 \times 13, 3 \times 5, 3 \times 7$$

이고, 어떤 소수의 세제곱인 수는

$$2^3, 3^3$$

이므로 $n(A_m) = 4$ 를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 m 의 개수는 9이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉢

참고

서로 다른 두 소수 a, b 와 음이 아닌 두 정수 p, q 에 대하여 $A = a^p \times b^q$

이면 자연수 A 의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)$ 이다.

$(p+1)(q+1)$ 의 값이 4인 경우는

$$p=1, q=1 \text{일 때 } 4 = (1+1)(1+1)$$

$$\text{또는 } p=3, q=0 \text{일 때 } 4 = (3+1)(0+1) \text{이므로}$$

양의 약수의 개수가 4인 자연수는 서로 다른 두 소수 a, b 의 곱인 $a \times b$ 이거나 어떤 소수 a 의 세제곱인 a^3 꼴인 수이다.

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능특강 사용설명서

수능특강 지문·자료·문항 분석 능력 향상
연계교재를 위한 가장 친절한 가이드



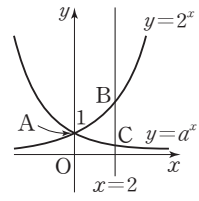
02 지수함수와 로그함수

유제		분문 21~29쪽				
1 38	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ②		
6 8	7 ②	8 ③	9 81	10 ①		

1 $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
 지수함수의 그래프의 성질에 의하여
 $0 < \frac{a}{4} < 1-2a < \frac{1}{5}$
 $0 < \frac{a}{4} < 1-2a$ 에서
 $0 < \frac{a}{4}$ 이고 $\frac{9}{4}a < 1$ 이므로
 $0 < a < \frac{4}{9}$ ㉠
 $1-2a < \frac{1}{5}$ 에서 $2a > \frac{4}{5}$ 이므로
 $a > \frac{2}{5}$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $\frac{2}{5} < a < \frac{4}{9}$
 따라서 $p=\frac{2}{5}, q=\frac{4}{9}$ 이므로
 $45(p+q) = 45 \times \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{9}\right) = 38$

답 38

2 $0 < a < 1$ 이므로 두 함수 $y=2^x, y=a^x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$A(0, 1), B(2, 4), C(2, a^2)$ 이므로
 $\overline{BC} = 4 - a^2$
 $\triangle AOC = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times (4 - a^2) = 4 - a^2$

삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 AOC의 넓이의 $\frac{7}{2}$ 배이므로

$$4 - a^2 = \frac{7}{2}, a^2 = \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ④

3 함수 $y=2^{ax}+2$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

$$y=2^{-ax}+2, \text{ 즉 } y=\frac{1}{(2^a)^x}+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $y=\frac{16}{4^x}+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$$y=\frac{16}{4^{x-b}}+1+c, \text{ 즉 } y=\frac{1}{4^{x-b-2}}+1+c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 두 함수의 그래프가 서로 일치하므로

$$2^a=4, -b-2=0, 2=1+c$$

따라서 $a=2, b=-2, c=1$ 이므로
 $a+b+c=2+(-2)+1=1$

답 ①

4 $0 < a < 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 함수 $f(x)=a^x+b$ 의 값은 감소하므로

$$M=f(1)=a+b, m=f(2)=a^2+b$$

$$M+m=\frac{15}{4} \text{이므로}$$

$$(a+b)+(a^2+b)=\frac{15}{4} \text{에서}$$

$$a^2+a+2b=\frac{15}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$M-m=\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$(a+b)-(a^2+b)=\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$a-a^2=\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 4a^2-4a+1=0, (2a-1)^2=0$$

$$\text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

$a=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2b = \frac{15}{4} \text{에서 } b = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a-b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

답 ⑤

5 가. 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프가 점 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$\log_a \sqrt{2} = \frac{1}{2} \text{에서 } a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a = (\sqrt{2})^2 = 2 > 1 \text{ (참)}$$

나. 함수 $y = b^x$ 의 그래프가 점 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{에서 } b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \text{이므로 } b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \text{ (참)}$$

$$\text{다. } ab = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}$$

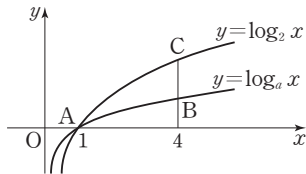
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0 \text{이므로}$$

$$ab = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 가, 나이다.

답 ②

6 $a > 2$ 이므로 두 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_2 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y = \log_a x$ ($a > 2$), $y = \log_2 x$ 의 그래프는 x 축 위의 점 $(1, 0)$ 에서 만나므로 A(1, 0)

직선 $x = 4$ 가 두 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로

$$B(4, \log_a 4), C(4, \log_2 4)$$

삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times (4-1) \times \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times (4-1) \times (\log_2 4 - \log_a 4) = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \times (2 - \log_a 4) = 1, \log_a 4 = \frac{4}{3}$$

따라서 $a^{\frac{4}{3}} = 4$, 즉 $a = 4^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$a^2 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^3 = 8$$

답 8

7 함수 $y = 2^{x-1} + a$ 에서 x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $x = 2^{y-1} + a$, $2^{y-1} = x - a$

$$y = \log_2 (x - a) + 1$$

$$\text{즉, } g(x) = \log_2 (x - a) + 1$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_2 (3 - a) + 1, 1 = \log_2 (3 - a)$$

$$2 = 3 - a \text{에서 } a = 1$$

함수 $y = \log_2 (x - 1) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $x = 1$ 이다.

$$\text{따라서 } b = 1 \text{이므로 } a + b = 1 + 1 = 2$$

답 ②

다른 풀이

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$g(3) = 2$$

함수 $f(x) = 2^{x-1} + a$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로

$$f(2) = 3 \text{에서 } 2^{2-1} + a = 3, a = 1$$

함수 $y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y = 1$ 이고

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점근선도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = 1$ 이므로 $b = 1$ 이다.

$$\text{그러므로 } a + b = 1 + 1 = 2$$

8 x 의 값이 증가하면 함수 $f(x) = \log_2 (3x - 1) + 1$ 의 값도 증가하므로 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ 인 함수

$$f(x) = \log_2 (3x - 1) + 1$$

$$\text{최댓값은 } f(3) = \log_2 8 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\text{최솟값은 } f(1) = \log_2 2 + 1 = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $4 + 2 = 6$

답 ③

9 $3^x < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+1}$ 에서

$$3^x < (3^{-2})^{2x+1}$$

$$3^x < 3^{-4x-2}$$

$$x^2 < -4x - 2$$

$$x^2 + 4x + 2 < 0$$

부등식 $x^2 + 4x + 2 < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로 α , β 는 이차방정식 $x^2 + 4x + 2 = 0$ 의 두 근이다.



따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -4$ 이므로
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$

답 81

10 로그의 진수 조건에 의하여
 $f(x) > 0, g(x) > 0 \dots\dots \textcircled{1}$

$\log_{\frac{1}{2}} f(x) > 2 \log_{\frac{1}{4}} g(x)$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}} f(x) > \log_{\frac{1}{4}} \{g(x)\}^2$

$\log_{\frac{1}{2}} f(x) > \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \{g(x)\}^2$

$\log_{\frac{1}{2}} f(x) > \log_{\frac{1}{2}} g(x)$

$f(x) < g(x) \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$6 < x < 9$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 7, 8이고, 그 개수는 2이다.

답 ①

Level **1** 기초 연습 본문 30쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ⑤ 5 18

1 $a^2 + 4a + \frac{9}{2} = 1$ 이면 $f(x) = 1$ 이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

이때 $a^2 + 4a + \frac{9}{2} = (a+2)^2 + \frac{1}{2} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 지수함수이다.

함수 $f(x) = \left(a^2 + 4a + \frac{9}{2}\right)^x$ 에서 $f(0) = 1$ 이므로 모든 음의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 1$ 을 만족시키려면 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 감소하여야 한다.

즉, $0 < a^2 + 4a + \frac{9}{2} < 1$ 이어야 한다.

$a^2 + 4a + \frac{9}{2} < 1$, 즉 $a^2 + 4a + \frac{7}{2} < 0$ 에서

$-2 - \frac{\sqrt{2}}{2} < a < -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 a 는 정수이므로 $a = -2$

따라서 $f(x) = \left\{(-2)^2 + 4 \times (-2) + \frac{9}{2}\right\}^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로
 $f(a) = f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

답 ④

2 함수 $y = a^{x+k} - 1$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 좌표가 $(-2, 0)$ 이므로

$0 = a^{-2+k} - 1$, 즉 $a^{-2+k} = 1$ 에서

$-2+k=0, k=2$

함수 $y = a^{x+k} - 1$, 즉 $y = a^{x+2} - 1$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 2)$ 이므로

$2 = a^2 - 1, a^2 = 3$

a 가 양수이므로 $a = \sqrt{3}$

따라서 $a^2 + k^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$

답 ②

3 함수 $y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 1$ 이므로 함수 $y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 점근선은 직선 $y = 3$

직선 $y = 3$ 이 함수 $y = \log_2 x + 1$ 의 그래프와 만나는 점의 좌표는

$3 = \log_2 x + 1$ 에서 $x = 4$ 이므로 $(4, 3)$

따라서 $a = 4, b = 3$ 이므로 $a + b = 4 + 3 = 7$

답 ④

4 $f(x) = 3^x, g(x) = 2^{-x}$ 에서

$h(x) = 3^x \times 2^{-x} = 3^x \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 이므로

x 의 값이 증가하면 함수 $h(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $h(x)$ 의

최대값 M 은 $M = h(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$,

최소값 m 은 $m = h(-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$ 이므로

$Mm = \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

답 ⑤

5 로그의 진수 조건에 의하여

$x^2 - 3x > 0$ 이고 $8 - x > 0$

$x(x-3) > 0$ 에서 $x < 0$ 또는 $x > 3 \dots\dots \textcircled{1}$

$8 - x > 0$ 에서 $x < 8 \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x < 0$ 또는 $3 < x < 8 \dots\dots \textcircled{3}$

$\log_2(x^2-3x) > \log_2(8-x)$ 에서
 $x^2-3x > 8-x$
 $x^2-2x-8 > 0$
 $(x+2)(x-4) > 0$
 $x < -2$ 또는 $x > 4$ ㉔
 ㉔, ㉔을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $x < -2$ 또는 $4 < x < 8$
 따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은
 $5+6+7=18$

답 18

Level 2	기본 연습	본문 31~32쪽		
1 ㉓	2 ㉔	3 ㉔	4 ㉔	5 ㉓
6 ㉓	7 ㉔	8 23		

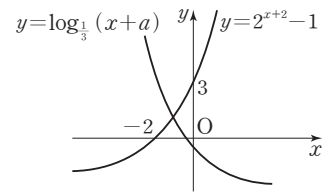
1 곡선 $y = \log_2(x-2)$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 A의 좌표를 $(a, \log_2 a)$ 라 하면

$B(a+2, \log_2 a), C(a+2, \log_2(a+2)),$
 $D(a+4, \log_2(a+2)), E(a+4, \log_2(a+4))$
 삼각형 ABC의 넓이가 1이므로
 $\frac{1}{2} \times 2 \times \{\log_2(a+2) - \log_2 a\} = \log_2 \frac{a+2}{a} = 1$
 $\frac{a+2}{a} = 2, a = 2$

따라서 삼각형 CDE의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times \{\log_2(a+4) - \log_2(a+2)\}$
 $= \log_2 \frac{2+4}{2+2} = \log_2 \frac{3}{2}$

답 ③

2 함수 $y = 2^{x+2} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프로
 $x=0$ 일 때, $2^{0+2} - 1 = 3$ 이므로 점 $(0, 3)$ 을 지나고
 $y=0$ 일 때, $2^{x+2} - 1 = 0$ 에서 $x = -2$ 이므로 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.



두 함수 $y = 2^{x+2} - 1, y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가 제2사분면에서 만나도록 하는 a 의 값은
 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나도록 하는 a 의 값보다는 커야 하고, 점 $(-2, 0)$ 을 지나도록 하는 a 의 값보다는 작아야 한다.
 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나도록 하는 a 의 값은

$3 = \log_{\frac{1}{3}}(0+a)$ 에서 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ 이므로

$a > \frac{1}{27}$ ㉑

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나도록 하는 a 의 값은

$0 = \log_{\frac{1}{3}}(-2+a)$ 에서 $a - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$, 즉 $a = 3$ 이므로
 $a < 3$ ㉒

㉑, ㉒을 모두 만족시키는 a 의 값의 범위는

$\frac{1}{27} < a < 3$

답 ④

3 $A(t, 2^t+1), B(t, \log_2(t-1))$ 에서
 $\overline{AB} = 2^t + 1 - \log_2(t-1) = 8$ ㉑

함수 $y = 2^x + 1$ 과 함수 $y = \log_2(x-1)$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
 따라서 두 점 B와 C는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$C(\log_2(t-1), t)$
 $\overline{BC} = \{t - \log_2(t-1)\}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 에서
 $t - \log_2(t-1) = 2$
 $\log_2(t-1) = t - 2$ ㉒

㉒에서

$t - 1 = 2^{t-2} = \frac{2^t}{4}$

$2^t = 4(t-1)$ ㉓

㉒, ㉓을 ㉑에 대입하면

$4(t-1) + 1 - (t-2) = 8$

$3t = 9, t = 3$



따라서 B(3, 1), C(1, 3)이므로 직선 BC의 방정식은 $y-1=-(x-3)$ 에서 $x+y-4=0$

원점 O에서 직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

답 ②

4 $f(x) = 3x^2 - 12x + 16 = 3(x-2)^2 + 4$

이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 4$,
최댓값은 $f(4) = 16$ 이다.

즉, $4 \leq f(x) \leq 16$

(i) $a > 1$ 이면

함수 $g(x) = \log_a x$ 는 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값도
증가하므로 함수 $(g \circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$ 는
 $f(x) = 4$ 일 때 최소이다.

함수 $g(f(x))$ 의 최솟값이 -2 이므로

$$g(4) = -2, \text{ 즉 } \log_a 4 = -2 \text{에서}$$

$$a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

이때 $a > 1$ 을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 이면

함수 $g(x) = \log_a x$ 는 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값은
감소하므로 함수 $g(f(x))$ 는 $f(x) = 16$ 일 때 최소이다.

함수 $g(f(x))$ 의 최솟값이 -2 이므로

$$g(16) = -2, \text{ 즉 } \log_a 16 = -2 \text{에서}$$

$$a^{-2} = 16, a^2 = \frac{1}{16}$$

이때 $0 < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ 이고, 합성함수 $g(f(x))$ 는

$f(x) = 4$ 일 때 최대이므로 최댓값 M 은

$$M = g(4) = \log_{\frac{1}{4}} 4 = \log_{4^{-1}} 4 = -1$$

답 ②

5 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$\log_2 \alpha = \log_2 (-\alpha + k) \text{에서}$$

$$\alpha = -\alpha + k, \alpha = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \beta = \log_2 (-\beta + k) \text{에서}$$

$$-\log_2 \beta = \log_2 (-\beta + k)$$

$$\log_2 \beta + \log_2 (-\beta + k) = 0$$

$$\log_2 \{\beta(-\beta + k)\} = 0$$

$$\beta(-\beta + k) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 점 P, Q의 x 좌표의 차가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\alpha - \beta = \sqrt{3}$$

위 식에 ①을 대입하면

$$\frac{k}{2} - \beta = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{k}{2} - \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③을 ②에 대입하면

$$\left(\frac{k}{2} - \sqrt{3}\right)\left(-\frac{k}{2} + \sqrt{3} + k\right) = 1$$

$$\left(\frac{k}{2} - \sqrt{3}\right)\left(\frac{k}{2} + \sqrt{3}\right) = 1$$

$$\frac{k^2}{4} - 3 = 1, k^2 = 16$$

$$k > 2 \text{이므로 } k = 4$$

답 ③

6 방정식 $2^{\frac{x}{4}} = kx$ 의 두 실근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$)이라 하면

$$2^{\frac{\alpha}{4}} = k\alpha \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^{\frac{2\alpha}{4}} = 2k\alpha, \text{ 즉 } 2^{\frac{\alpha}{2}} = 2k\alpha \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① ÷ ②을 하면

$$2^{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4}} = 2$$

$$2^{\frac{\alpha}{4}} = 2$$

$$\text{즉, } \frac{\alpha}{4} = 1 \text{이므로}$$

$$\alpha = 4$$

$\alpha = 4$ 를 ①에 대입하면

$$2 = 4k, k = \frac{1}{2}$$

따라서

$$\log_k \alpha = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 2^2$$

$$= -2 \log_2 2 = -2$$

답 ①

7 로그의 진수 조건에 의하여

$$3x + 1 > 0 \text{이고 } 3 - x > 0 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{3} < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(3x+1) + \log_2(3-x) = \log_2 a \text{에서}$$

$$\log_2 \{(3x+1)(3-x)\} = \log_2 a$$

$$(3x+1)(3-x) = a$$

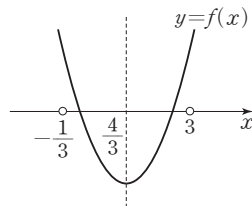
$$3x^2 - 8x + a - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

방정식 $\log_2(3x+1) + \log_2(3-x) = \log_2 a$ 를 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 \textcircled{A} , \textcircled{B} 을 모두 만족시키는 실수 x 가 존재해야 한다.

$$f(x) = 3x^2 - 8x + a - 3 \text{이라 하면}$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + a - \frac{25}{3}$$

이므로 \textcircled{A} , \textcircled{B} 을 모두 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 $-\frac{1}{3} < x < 3$ 인



범위에서 x 축과 적어도 한 점에서 만나야 한다.

이때 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가

$$\left(\frac{4}{3}, a - \frac{25}{3}\right) \text{이므로}$$

$$a - \frac{25}{3} \leq 0, f\left(-\frac{1}{3}\right) = f(3) = a > 0$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } 0 < a \leq \frac{25}{3}$$

따라서 구하는 모든 자연수 a 는 1, 2, ..., 8이고, 그 개수는 8이다.

답 ④

8 로그의 진수 조건에 의하여

$$g(x) + 2 > 0 \text{이므로}$$

$$g(x) > -2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_2 \{g(x) + 2\} \leq \log_2 11 \text{에서}$$

$$g(x) + 2 \leq 11 \text{이므로}$$

$$g(x) \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 $-2 < g(x) \leq 9$ 이므로 $g(x) = k$ 를 만족시키는 정수 k 는 -1 이상 9 이하인 모든 정수이다.

이때 방정식 $g(x) = k$ ($k = -1, 0, 1, 2, \dots, 9$)를 만족시키는 양수 x 의 개수는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수와 같다.

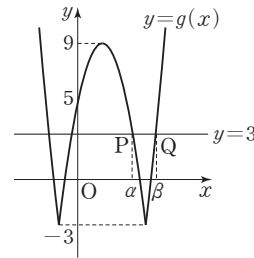
따라서 $n(A_k) = 2$, 즉 방정식 $g(x) = k$ ($k = -1, 0, 1, 2, \dots, 9$)를 만족시키는 양수 x 의 개수가 2이도록 하는 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9$ 이므로 구하는 모든 k 의 값의 합은

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 = 23$$

답 23

참고

예를 들어 그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 이 만나는 네 점 중 x 좌표가 양수인 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 $g(x)=3$ 을 만족시키는 양수 x 는 α, β 이므로 $n(A_3) = 2$ 이다.



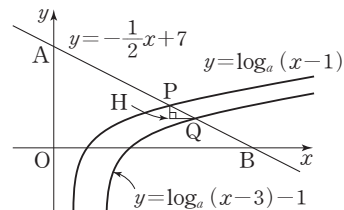
Level 3 실력 완성

본문 33쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 6

1 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y 축에 수직인 직선이 만나는 점을 H라 하면 직선 PQ의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $\overline{PH} : \overline{HQ} = 1 : 2$ 이다.

즉, 점 Q는 점 P를 x 축의 방향으로 $2k$ ($k > 0$)만큼, y 축의 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동한 점이다.



그런데 함수 $y = \log_a(x-3) - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_a(x-1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고, 두 점 P, Q는 각각 두 그래프 위의 점이므로 $\overline{PH} = 1, \overline{HQ} = 2$ 이다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A(0, 7), B(14, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{7^2 + 14^2} = 7\sqrt{5}$$



$\overline{AP} = 2\overline{QB}$ 이므로 $\overline{QB} = b$, $\overline{AP} = 2b$ 라 하면

$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 에서

$$7\sqrt{5} = 2b + \sqrt{5} + b$$

$$3b = 6\sqrt{5}$$

$$b = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} : \overline{PB} = 4\sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 4 : 3$ 이므로

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{4 \times 14 + 3 \times 0}{4+3}, \frac{4 \times 0 + 3 \times 7}{4+3} \right), \text{ 즉 } (8, 3)$$

점 P(8, 3)이 함수 $y = \log_a(x-1)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3 = \log_a(8-1)$$

$$a^3 = 7$$

$$a = \sqrt[3]{7}$$

답 ③

참고

곡선 $y = \log_a(x-1)$ 위의 임의의 점 C를 x축, y축의 방향으로 각각 2, -1만큼씩 평행이동한 점을 D라 하면 점 D는 곡선 $y = \log_a(x-3) - 1$ 위의 점이고, 직선 CD는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 임의의 직선 l이

곡선 $y = \log_a(x-3) - 1$ 과 만나는 점은 직선 l이

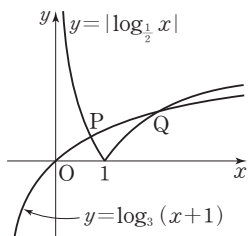
곡선 $y = \log_a(x-1)$ 과 만나는 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이다.

따라서 문제에서 주어진 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 7$ 위의 점 Q는

점 P를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이다.

즉, $\overline{PH} = 1$, $\overline{HQ} = 2$ 이다.

2



$$\neg. \left| \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \right| = 1 \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \log_3 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) &= \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 3 - \log_3 2 \\ &= 1 - \log_3 2 < 1 \end{aligned}$$

이므로 점 P는 직선 $x = \frac{1}{2}$ 의 오른쪽에 있다.

따라서 $x_1 > \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\log_3(x+1) = 1$ 에서 $x+1=3$, 즉 $x=2$ 이므로

함수 $y = \log_3(x+1)$ 의 그래프는 점 (2, 1)을 지난다.

$|\log_{\frac{1}{2}} x| = 1$ 에서 $\log_{\frac{1}{2}} x = \pm 1$, 즉 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$

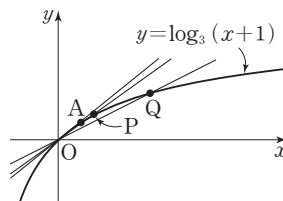
이므로 함수 $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ 의 그래프도 점 (2, 1)을 지난다.

따라서 점 Q의 좌표는 (2, 1)이므로

$$y_2 = 1 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 함수 $y = \log_3(x+1)$ 의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \log_3 \frac{3}{2}\right)$

을 A라 하고, 세 직선 OA, OP, OQ의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3 이라 하자.



함수 $y = \log_3(x+1)$ 의 그래프와 세 직선 OA, OP, OQ는 그림과 같으므로

$$m_1 > m_2 > m_3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$m_1 = \frac{\log_3 \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 2(\log_3 3 - \log_3 2) = 2 - \log_3 4 < 1,$$

$$m_2 = \frac{y_1}{x_1}, m_3 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$1 > m_1 > \frac{y_1}{x_1} > \frac{1}{2}$$

따라서 $y_1 < x_1 < 2y_1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

3 두 점 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 가 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점이므로

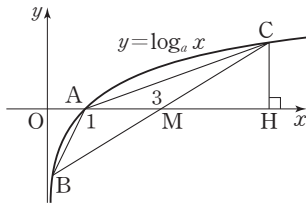
$$y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2$$

세 수 $x_1, 1, x_2$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $x_1 x_2 = 1$

이때 $x_2 = \frac{1}{x_1}$ 을 $y_2 = \log_a x_2$ 에 대입하면

$$y_2 = \log_a \frac{1}{x_1} = -\log_a x_1$$

이므로 $y_1 + y_2 = \log_a x_1 + (-\log_a x_1) = 0$



따라서 점 $(3, 0)$ 을 M 이라 하면 점 M 은 선분 BC 의 중점
이므로 두 삼각형 AMC , ABM 의 넓이는 같고, 주어진 조
건에서 삼각형 ABC 의 넓이가 4이므로 삼각형 AMC 의 넓
이는 2이다.

점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\overline{CH} = \log_a x_2$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{CH} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times (3-1) \times \log_a x_2 = 2$$

즉, $\log_a x_2 = 2$ 에서 $x_2 = a^2$

$x_1 x_2 = 1$ 에서 $x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{a^2}$

따라서 $B\left(\frac{1}{a^2}, -2\right)$, $C(a^2, 2)$ 이고, 점 $M(3, 0)$ 이 선분
 BC 의 중점이므로

$$\frac{\frac{1}{a^2} + a^2}{2} = 3$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$$

답 6

참고

두 점 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 BC 의 중점의 좌
표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

그런데 $y_1+y_2=0$ 이므로 선분 BC 의 중점은 x 축 위에 있다.
따라서 선분 BC 와 x 축이 만나는 점 $(3, 0)$ 은 선분 BC 의
중점이다.

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제

본문 37~45쪽

1 48	2 ㉔	3 235	4 ㉓	5 ㉔
6 ㉔	7 ㉔	8 ㉓	9 16	

1 $\angle AOB = \theta$ 라 하면 호 AB 의 길이는 9θ , 호 CD 의 길이는
 3θ , $\overline{AC} = \overline{BD} = 6$ 이므로 두 호 AB , CD 와 두 선분 AC ,
 BD 로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는

$$9\theta + 3\theta + 6 + 6 = 12\theta + 12$$

$$12\theta + 12 = 28 \text{에서 } \theta = \frac{4}{3}$$

따라서 두 호 AB , CD 와 두 선분 AC , BD 로 둘러싸인 도
형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9^2 \times \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{4}{3} = 48$$

답 48

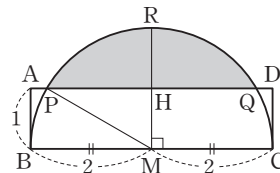
참고

두 호 AB , CD 와 두 선분 AC , BD 로 둘러싸인 도형의 넓
이를 다음과 같이 구해도 된다.

$\theta = \frac{4}{3}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 9 \times 9\theta - \frac{1}{2} \times 3 \times 3\theta &= \frac{1}{2} \times 72\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 72 \times \frac{4}{3} \\ &= 48 \end{aligned}$$

2



그림과 같이 선분 BC 의 중점을 M 이라 하고, 점 M 을 지나
고 선분 BC 에 수직인 직선이 선분 AD 와 만나는 점을 H ,
호 PQ 와 만나는 점을 R 라 하자.

직각삼각형 PMH 에서 $\overline{PM} = 2$, $\overline{MH} = 1$ 이므로

$$\angle PMH = \frac{\pi}{3}, \overline{PH} = \sqrt{3} \text{이다.}$$



즉, 부채꼴 MRP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

이고 삼각형 PMH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{MH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 호 PQ와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

답 ②

3 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

θ 가 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

즉, $\cos \theta = \frac{12}{13}$ 이고

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

이므로

$$\cos \theta + \tan \theta = \frac{12}{13} + \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{79}{156}$$

따라서 $p=156$, $q=79$ 이므로

$$p+q=156+79=235$$

답 235

4 $4 \sin \theta + \cos \theta = -4$ 의 양변을 제곱하면

$$16 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 16$$

$$16(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 8 \sin \theta \cos \theta - 15 \cos^2 \theta = 16$$

$$8 \sin \theta \cos \theta - 15 \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta(8 \sin \theta - 15 \cos \theta) = 0$$

$$\cos \theta \neq 0 \text{이므로 } 8 \sin \theta = 15 \cos \theta$$

즉, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{15}{8}$ 이므로

$$\sin \theta = 15k, \cos \theta = 8k \text{ (} k \text{는 실수)라 하면}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 225k^2 + 64k^2 = 289k^2 = 1$$

$$\text{에서 } k^2 = \frac{1}{289}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$k < 0 \text{에서 } k = -\frac{1}{17}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{15}{17} + \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{23}{17}$$

답 ③

다른 풀이

$$4 \sin \theta + \cos \theta + 4 = 0 \text{에서}$$

$$4(\sin \theta + 1) = -\cos \theta$$

양변을 제곱하면

$$16(\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1) = \cos^2 \theta$$

$$16 \sin^2 \theta + 32 \sin \theta + 16 = 1 - \sin^2 \theta$$

$$17 \sin^2 \theta + 32 \sin \theta + 15 = 0$$

$$(17 \sin \theta + 15)(\sin \theta + 1) = 0$$

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}$$

$$\text{이때 } \cos \theta = -4(\sin \theta + 1) = -\frac{8}{17}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{15}{17} + \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{23}{17}$$

5 $y = 2 \cos(ax) + b$ ($a > 0$)의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{a} = 6\pi \text{에서 } a = \frac{1}{3}$$

한편, 함수 $y = 2 \cos(ax) + b$ 의 최댓값은 $\cos(ax) = 1$

일 때 $2 + b$ 이므로

$$2 + b = 5 \text{에서 } b = 3$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

답 ②

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(\pi + \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$

$$= \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta$$

$$= -\sin \theta$$

$$= -\frac{3}{5}$$

답 ②

참고

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left\{\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right\}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= -\cos \theta$$

7 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(\pi+\theta) &= \cos\theta+\tan\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

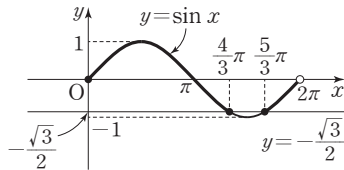
답 ②

8 $2\sin^2 x - (2-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} \leq 0$ 에서
 $(\sin x - 1)(2\sin x + \sqrt{3}) \leq 0$
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq 1$

이 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

보다 위쪽(경계 포함)에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi \leq x < 2\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = 3\pi$$

답 ③

9 x 에 대한 이차방정식 $6x^2 + (4\sin\theta)x + \cos\theta = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sin\theta)^2 - 6\cos\theta = 0$$

$$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$$

$$2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \text{이므로}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 3\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{3}\pi$$

그러므로 조건을 만족시키는 모든 실수 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + \frac{7}{3}\pi = \frac{13}{3}\pi$$

따라서 $p = 3$, $q = 13$ 이므로

$$p + q = 3 + 13 = 16$$

답 16

Level 1 기초 연습

본문 46~48쪽

1 ⑤	2 ②	3 72	4 ①	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 ④	9 ①	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ④	

1 $\sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \frac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \sin \frac{2}{3}\pi \times \tan \frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

답 ⑤

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하자.

부채꼴의 호의 길이가 6이고 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times r \times 6 = 15$$

에서 $r = 5$

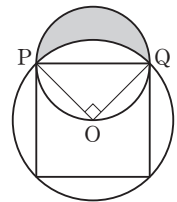
이때 이 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 호의 길이가 6이므로

$$5\theta = 6$$

$$\text{따라서 } \theta = \frac{6}{5}$$

답 ②

3 그림과 같이 큰 원의 중심을 O , 한 작은 원과 큰 원의 두 교점을 각각 P , Q 라 하자.



정사각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{2}$ 이므로

작은 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이고,

한 작은 원의 내부와 정사각형의 외부의 공통부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times (3\sqrt{2})^2 = 9\pi$$

또 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 부채꼴 OQP 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{2} = 9\pi$$

이고 삼각형 POQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

따라서 구하는 넓이는

$$4\{9\pi - (9\pi - 18)\} = 72$$

답 72



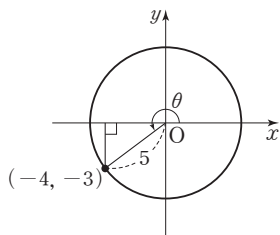
4 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$ 에서
 $\sin \theta = 3k, \cos \theta = 4k$ (k 는 0이 아닌 실수)
 로 놓을 수 있다.
 이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로
 $(3k)^2 + (4k)^2 = 1$
 $k^2 = \frac{1}{25}$
 $\sin \theta < 0$ 이므로 $k = -\frac{1}{5}$
 따라서 $\cos \theta = 4k = -\frac{4}{5}$

다른 풀이

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서
 $\cos \theta \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면
 $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$
 즉, $\cos^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{\frac{9}{16} + 1} = \frac{16}{25}$
 이때 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로 θ 는 제 3 사분면의 각이다.
 따라서 $\cos \theta < 0$ 이므로 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

참고

$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로 θ 는 제 3 사분면의 각이다. 그러므로 다음 그림을 이용하여 $\cos \theta$ 의 값을 구할 수도 있다.



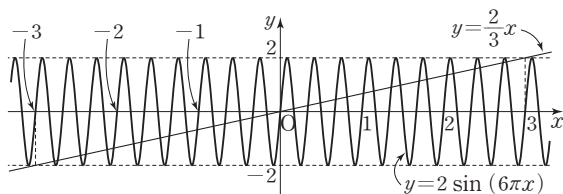
5 $3 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 4 = 0$ 에서
 $(3 \sin \theta + 2)(\sin \theta - 2) = 0$
 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로
 $\sin \theta = -\frac{2}{3}$
 따라서
 $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = (1 - \sin^2 \theta) + (1 - \sin^2 \theta)^2$
 $= \left(1 - \frac{4}{9}\right) + \left(1 - \frac{4}{9}\right)^2$
 $= \frac{5}{9} + \frac{25}{81} = \frac{70}{81}$

답 ⑤

6 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = -\frac{-40}{25} = \frac{8}{5}$
 $2 \sin \theta = \frac{8}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$
 따라서
 $\frac{k}{25} = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)$
 $= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$
 $= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)$
 $= 2 \sin^2 \theta - 1$
 이므로
 $k = 50 \sin^2 \theta - 25 = 50 \times \frac{16}{25} - 25 = 7$

답 ④

7 함수 $y = 2 \sin(6\pi x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ 이므로
 함수 $y = 2 \sin(6\pi x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = 2 \sin(6\pi x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}x$ 가
 만나는 모든 점의 개수는
 $2 \times 2 \times 9 - 1 = 35$

답 ③

8 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = a \sin 3x + 2$ 는 $\sin 3x = 1$ 일 때
 최댓값 $a + 2$ 를 갖는다.
 즉, $a + 2 = 6$ 에서 $a = 4$ 이므로
 $f(x) = 4 \sin 3x + 2$
 따라서
 $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 4 \sin\left(3 \times \frac{\pi}{18}\right) + 2$
 $= 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2$
 $= 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 4$

답 ④

9 $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) 이라 하면
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ 이므로

$$y = 3(1-t^2) - t - 1$$

$$= -3t^2 - t + 2$$

$$= -3\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

따라서 이 함수는 $t = -\frac{1}{6}$ 일 때 최댓값 $\frac{25}{12}$ 를 갖고,
 $t = 1$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$M + m = \frac{25}{12} + (-2) = \frac{1}{12}$$

답 ①

10 $\sin 1200^\circ = \sin(360^\circ \times 3 + 120^\circ)$
 $= \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ)$
 $= \sin 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 420^\circ = \tan(180^\circ \times 2 + 60^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\sin 675^\circ = \sin(360^\circ \times 2 - 45^\circ)$$

$$= \sin(-45^\circ)$$

$$= -\sin 45^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ)$$

$$= \cos(-45^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서

$$\sin 1200^\circ \times \tan 420^\circ - \sin 675^\circ \times \cos 315^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

답 ④

11 점 $P(3, -4)$ 에 대하여 $OP = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로
 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = -\frac{4}{3}$

따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \tan(-\theta) = \cos \theta - \tan \theta$$

$$= \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{29}{15}$$

답 ④

12 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{11}{36}}$$

$$= -\frac{5}{6}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

$$= -\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

따라서

$$\tan(5\pi - \theta) = \tan(-\theta)$$

$$= -\tan \theta$$

$$= \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

답 ⑤

13 $3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$ 에서
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로

$$3(1 - \cos^2 x) - 2 \cos x - 3 = 0$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x = 0$$

$$\cos x (3 \cos x + 2) = 0$$

한편, $\tan x > 0$ 일 때 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수) 이므로

$\cos x \neq 0$ 이다.

$$\text{즉, } \cos x = -\frac{2}{3}$$

이때 $\sin x = \tan x \cos x < 0$ 이므로

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ①

14 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 에서

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

이 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$

과 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 사이에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, $\sin x \cos x > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ $\dots\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통 범위는

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \pi < x < \frac{7}{6}\pi$$

따라서 $a = \frac{1}{6}$, $b = 1$, $c = \frac{7}{6}$ 이므로

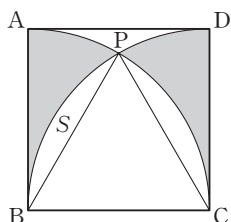
$$a + b + c = \frac{1}{6} + 1 + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 49~50쪽

1 ①	2 ④	3 ①	4 ①	5 ③
6 ①	7 ①	8 ③		

1



그림과 같이 호 CA와 호 DB의 교점을 P라 하면 삼각형 PBC가 정삼각형이므로

$$\angle PBC = \angle PCB = \frac{\pi}{3}$$

즉, $\angle ABP = \frac{\pi}{6}$ 이므로 부채꼴 BPA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

한편, 그림과 같이 부채꼴 BPA에서 색칠한 부분을 제외한 부분의 넓이를 S라 하면 S는 부채꼴 CPB의 넓이에서 정삼각형 PBC의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$2\{3\pi - (6\pi - 9\sqrt{3})\} = 18\sqrt{3} - 6\pi$$

답 ①

2 직선 OP의 방정식을 $y = mx$ ($m < 0$), 즉 $mx - y = 0$ 이라 하면 점 (1, 3)에서의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$|m-3| = \sqrt{5} \times \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 6m + 9 = 5m^2 + 5$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$(2m-1)(m+2) = 0$$

$m < 0$ 이므로 $m = -2$

즉, $\tan \theta = -2$ 이므로

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2$$

$$\sin \theta = -2 \cos \theta$$

이것을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = -2 \cos \theta = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta \times \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$$

답 ④

3 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서

$$x + \frac{1}{x} = 5 \text{이므로}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = 5$$

이때

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

이므로

$$\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = 5$$

$$\frac{2}{\cos \theta} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{2}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin \theta \times \tan \theta &= \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1 - \frac{4}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{21}{10}\end{aligned}$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 한 근이 $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$ 이므로

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}\right)^2 - 5 \times \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + 1 &= 0 \\ \cos^2 \theta - 5 \cos \theta (1 + \sin \theta) + (1 + \sin \theta)^2 &= 0 \\ 5 \sin \theta \cos \theta + 5 \cos \theta - 2 \sin \theta - 2 &= 0 \\ 5 \cos \theta (\sin \theta + 1) - 2(\sin \theta + 1) &= 0 \\ (5 \cos \theta - 2)(\sin \theta + 1) &= 0 \\ \sin \theta + 1 \neq 0 \text{이므로} \\ \cos \theta &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin \theta \times \tan \theta &= \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1 - \frac{4}{25}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{21}{10}\end{aligned}$$

- 4** 함수 $y = a \cos (bx) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = a \cos (bx)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$a > 0$ 이므로 함수 $y = a \cos (bx) + 2$ 는 $\cos (bx) = 1$ 일 때 최댓값 $a + 2$ 를 갖는다.

주어진 그림에서 $a + 2 = 5$ 이므로 $a = 3$

한편, 함수 $f(x) = a \cos (bx) + 2$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고 주어

진 그림에서

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$$

이므로 $b = 4$

따라서 $f(x) = 3 \cos 4x + 2$ 이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{11}{6}\pi\right) &= 3 \cos \frac{22}{3}\pi + 2 \\ &= 3 \cos \left(6\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + 2 \\ &= 3 \cos \frac{4}{3}\pi + 2 \\ &= 3 \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \\ &= 3 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + 2 \\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- 5** 함수 $y = \log (3x - \pi) + 2 = \log 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 의 그래프는

함수 $y = \log 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수

$y = \log (3x - \pi) + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$\tan (ax + 3\pi) = \tan (ax)$ 이고, 함수 $y = \tan (ax)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{a}$ 이므로 함수 $y = \tan (ax)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{n}{a}\pi + \frac{\pi}{2a} = \frac{2n+1}{2a}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\frac{2n+1}{2a}\pi = \frac{\pi}{3} \text{에서 } a = \frac{3}{2}(2n+1)$$

따라서 구하는 양수 a 의 최솟값은 $n = 0$ 일 때 $\frac{3}{2}$ 이다.

- 6** $\sin \left(x + \frac{5}{3}\pi\right) = \sin \left\{\frac{\pi}{2} + \left(x + \frac{7}{6}\pi\right)\right\} = \cos \left(x + \frac{7}{6}\pi\right)$

이므로

$$\cos \left(x + \frac{7}{6}\pi\right) = t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

이라 하면

$$\begin{aligned}y &= \sin^2 \left(x + \frac{7}{6}\pi\right) + \sin \left(x + \frac{5}{3}\pi\right) + 2 \\ &= 1 - \cos^2 \left(x + \frac{7}{6}\pi\right) + \cos \left(x + \frac{7}{6}\pi\right) + 2 \\ &= 1 - t^2 + t + 2 \\ &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \quad (-1 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

이 함수는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$ 을 가지므로 $M = \frac{13}{4}$ 이고



$$t = \cos\left(x + \frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \text{ 일 때}$$

$$x + \frac{7}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x + \frac{7}{6}\pi = \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{즉, } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{7}{6}$$

또 이 함수는 $t = -1$ 일 때 최솟값 1을 가지므로 $m = 1$ 이고

$$t = \cos\left(x + \frac{7}{6}\pi\right) = -1 \text{ 일 때 } x + \frac{7}{6}\pi = 3\pi$$

$$\text{즉, } x = \frac{11}{6}\pi \text{ 이므로}$$

$$c = \frac{11}{6}$$

따라서

$$a + b + c + M + m = \frac{1}{2} + \frac{7}{6} + \frac{11}{6} + \frac{13}{4} + 1 = \frac{31}{4}$$

답 ①

7 직선 l 위의 임의의 점을 (x, y) 라 하면 점 (x, y) 에서 두 직선 $3x - 4y = 0, 4x + 3y = 0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x - 4y|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|4x + 3y|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$|3x - 4y| = |4x + 3y|$$

$$3x - 4y = 4x + 3y \text{ 또는 } 3x - 4y = -4x - 3y$$

$$y = -\frac{1}{7}x \text{ 또는 } y = 7x$$

이때 원점과 제3사분면을 지나는 직선의 기울기는 양수이므로 직선 l 의 방정식은 $y = 7x$ 이다.

즉, $\tan \theta = 7$ 이고 점 P 가 제3사분면에 있으므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 7 \text{ 에서 } \sin \theta = 7 \cos \theta \text{ 이고,}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$49 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{50}$$

$$\cos \theta < 0 \text{ 이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \theta = 7 \cos \theta = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

따라서

$$\sin(\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta) = \sin \theta - \cos \theta$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{10} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

답 ①

8 $2 \cos 3x + 3 \tan 3x = 0$ 에서 $\cos 3x \neq 0$ 이므로

$$2 \cos 3x + \frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

$$2 \cos^2 3x + 3 \sin 3x = 0$$

$$2(1 - \sin^2 3x) + 3 \sin 3x = 0$$

$$2 \sin^2 3x - 3 \sin 3x - 2 = 0$$

$$(2 \sin 3x + 1)(\sin 3x - 2) = 0$$

$$\text{이때 } -1 \leq \sin 3x \leq 1 \text{ 이므로 } \sin 3x = -\frac{1}{2}$$

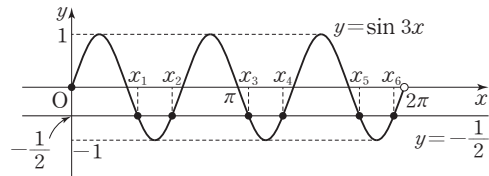
함수 $y = \sin 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 다음 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$

은 서로 다른 6개의 점에서 만난다.

즉, $n = 6$

이 6개의 교점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, \dots, x_6 이라 하자.



$0 \leq 3x < 2\pi$ 에서 $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ 이면

$$3x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 3x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{즉, } x = \frac{7}{18}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{18}\pi \text{ 이므로}$$

$$x_1 = \frac{7}{18}\pi, x_2 = \frac{11}{18}\pi$$

이때

$$x_3 = \frac{2}{3}\pi + x_1, x_4 = \frac{2}{3}\pi + x_2,$$

$$x_5 = \frac{4}{3}\pi + x_1, x_6 = \frac{4}{3}\pi + x_2$$

이므로

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 4\pi + 3(x_1 + x_2)$$

$$= 4\pi + 3 \times \left(\frac{7}{18}\pi + \frac{11}{18}\pi\right)$$

$$= 7\pi$$

따라서 $n = 6, k = 7$ 이므로 $n + k = 6 + 7 = 13$

답 ③

참고

위의 풀이에서 x_1, x_2 의 값을 직접 구하지 않아도 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}, \text{ 즉 } x_1 + x_2 = \pi$$

임을 알 수 있다.

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 19

1 $\cos x = X, \sin y = Y$ 라 하면 $X+Y = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\sin^2 x = 1 - X^2, \cos^2 y = 1 - Y^2 \text{ 이고}$$

$$\sin x \times \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 에서}$$

$$\sin^2 x \times \cos^2 y = \frac{1}{8} \text{ 이므로}$$

$$(1 - X^2)(1 - Y^2) = \frac{1}{8}$$

$$(XY)^2 - (X^2 + Y^2) + 1 = \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때

$$X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = \frac{1}{8} - 2XY$$

이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$(XY)^2 - \frac{1}{8} + 2XY + 1 = \frac{1}{8}$$

$$4(XY)^2 + 8XY + 3 = 0$$

$$(2XY + 1)(2XY + 3) = 0$$

$$-1 \leq X \leq 1, -1 \leq Y \leq 1 \text{ 에서}$$

$$-1 \leq XY \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$XY = -\frac{1}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} (\cos x - \sin y)^2 &= (X - Y)^2 = (X + Y)^2 - 4XY \\ &= \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8} \end{aligned}$$

답 ④

2 $\cos t = s$ ($-1 \leq s \leq 1$)이라 하면

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - s^2 \text{ 이므로}$$

$$f(t) = 2 \sin^2 t + x \cos t + 3$$

$$= 2(1 - s^2) + xs + 3$$

$$= -2s^2 + xs + 5$$

$$= -2\left(s - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} + 5 \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

이때 $h(s) = -2\left(s - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} + 5$ ($-1 \leq s \leq 1$)이라 하자.

(i) $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, 즉 $-4 \leq x \leq 4$ 일 때

함수 $h(s)$ 는 $s = \frac{x}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{x^2}{8} + 5$ 를 가지므로

$$g(x) = \frac{x^2}{8} + 5$$

(ii) $\frac{x}{4} > 1$, 즉 $x > 4$ 일 때

함수 $h(s)$ 는 $s = 1$ 일 때 최댓값 $x + 3$ 을 가지므로

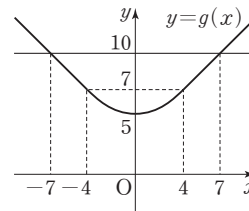
$$g(x) = x + 3$$

(iii) $\frac{x}{4} < -1$, 즉 $x < -4$ 일 때

함수 $h(s)$ 는 $s = -1$ 일 때 최댓값 $-x + 3$ 을 가지므로

$$g(x) = -x + 3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $g(0) = 5, g(1) = 5 + \frac{1}{8}, g(2) = 5 + \frac{1}{2}, g(3) = 6 + \frac{1}{8},$

$g(4) = 7, g(5) = 8, g(6) = 9, g(7) = 10$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 10$ 으로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$x = 0, 1, 2$ 일 때 각각 4개,

$x = 3$ 일 때 3개,

$x = 4$ 일 때 2개,

$x = 5$ 일 때 1개

이고 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 점의 개수는

$$4 + 2 \times (4 + 4 + 3 + 2 + 1) = 32$$

답 ①

3 $g(x) = 4 \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 3 \sin(\pi + x)$ 라 하면 주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x 의 개수는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$$g(x) = 4 \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 3 \sin(\pi + x)$$

$$= 4 \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \sin x$$

$$= 4 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x - 3 \sin x$$

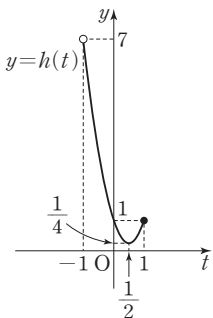
$$= 3 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$$

에서 $\sin x = t$ 라 하면 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $-1 < t \leq 1$ 이고

$$g(x) = 3t^2 - 3t + 1 = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (-1 < t \leq 1)$$



$h(t) = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ($-1 < t \leq 1$)이라 하면 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



(i) $k < \frac{1}{4}$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나지 않으므로
 $f(k) = 0$

(ii) $k = \frac{1}{4}$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 는 한 점에서만 만나고 이때 $t = \frac{1}{2}$ 이다.

이 경우 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 인 x 의 값은 2개이므로

$$f(k) = 2$$

(iii) $\frac{1}{4} < k < 1$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 는 서로 다른 두 점에서 만나고 이때 $0 < t < 1$, $t \neq \frac{1}{2}$ 이다.

이 경우 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin x = t$ 인 x 의 값은 서로 다른 2개의 t 의 값에 대하여 각각 2개이므로

$$f(k) = 2 \times 2 = 4$$

(iv) $k = 1$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 는 서로 다른 두 점에서 만나고 이때 $t = 0$ 또는 $t = 1$ 이다.

이 경우 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin x = 0$ 인 x 의 값은 2개, $\sin x = 1$ 인 x 의 값은 1개이므로

$$f(k) = 3$$

(v) $1 < k < 7$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 는 한 점에서만 만나고 이때 $-1 < t < 0$ 이다.

이 경우 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin x = t$ 인 x 의 값은 1개이므로

$$f(k) = 1$$

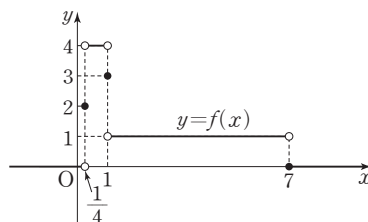
(vi) $k \geq 7$ 일 때

함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나지 않으므로
 $f(k) = 0$

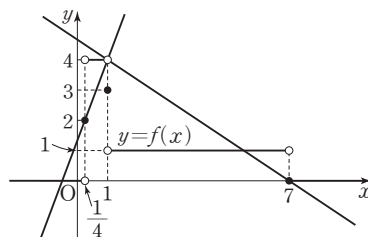
(i)~(vi)에서

$$f(k) = \begin{cases} 0 & (k < \frac{1}{4} \text{ 또는 } k \geq 7) \\ 2 & (k = \frac{1}{4}) \\ 4 & (\frac{1}{4} < k < 1) \\ 3 & (k = 1) \\ 1 & (1 < k < 7) \end{cases}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



한편, 직선 $y = ax - a + 4 = a(x - 1) + 4$ 는 항상 점 $(1, 4)$ 를 지나는 직선이므로 이 직선이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면서 기울기가 최대인 경우는 다음 그림과 같이 점 $(\frac{1}{4}, 2)$ 를 지날 때이고, 기울기가 최소인 경우는 점 $(7, 0)$ 을 지날 때이다.



따라서

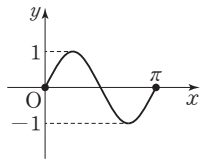
$$M = \frac{4-2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}, \quad m = \frac{4-0}{1-7} = -\frac{2}{3}$$

이므로

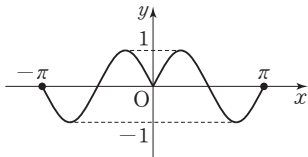
$$M + m = \frac{8}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = 2$$

답 ③

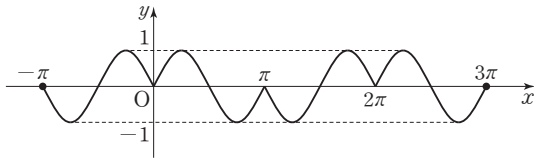
4 함수 $y = \sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



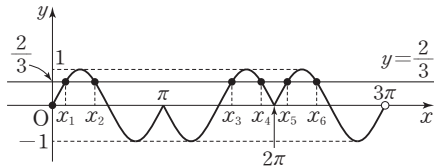
또 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로
 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



한편, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2\pi)=f(x)$ 이므로
 $-\pi \leq x \leq 3\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 \leq x < 3\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$ 는
 다음 그림과 같이 6개의 점에서 만나는데, 이들의 x 좌표를
 작은 것부터 차례로 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 이라 하자.



이때

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1,$$

$$x_3 = \frac{3}{2}\pi + x_1,$$

$$x_4 = 2\pi - x_1,$$

$$x_5 = 2\pi + x_1,$$

$$x_6 = \frac{5}{2}\pi - x_1$$

이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$= x_1 + \left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) + \left(\frac{3}{2}\pi + x_1\right) + (2\pi - x_1) + (2\pi + x_1) + \left(\frac{5}{2}\pi - x_1\right)$$

$$= \frac{17}{2}\pi$$

따라서 $p=2, q=17$ 이므로 $p+q=2+17=19$

답 19

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ③
 6 ③

- 1 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로
 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$
 이것을 $9 \sin A \sin(B+C)=4$ 에 대입하면
 $9 \sin^2 A=4$

$$\sin^2 A = \frac{4}{9}$$

$0 < A < \pi$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \frac{2}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인
 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$$

이므로

$$\frac{5}{3} = 2R$$

$$\text{따라서 } R = \frac{15}{4}$$

답 ⑤

- 2 $\angle ABC = \theta$ 라 하면 사각형 ODBE에서
 $\angle BDO = \angle BEO = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \pi - \angle DOE$

이때

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\pi - \angle DOE) = -\cos(\angle DOE) \\ &= -\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

한편, 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC에서 사
 인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R$$



이므로

$$\frac{4}{2} = 2R$$

$$R = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

답 ④

3 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$

$5\overline{BC} = 3\overline{CA}$ 에서 $\overline{BC} : \overline{CA} = 3 : 5$

즉, $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 6 : 3 : 5$ 이므로

$\overline{AB} = 6k, \overline{BC} = 3k, \overline{CA} = 5k (k > 0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C$$

이므로

$$(6k)^2 = (3k)^2 + (5k)^2 - 2 \times 3k \times 5k \times \cos C$$

따라서

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (6k)^2}{2 \times 3k \times 5k} \\ &= \frac{-2k^2}{30k^2} \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

답 ③

4 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

그러므로 $a \cos B + b \cos A = 14 - c$ 에서

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 14 - c$$

$$c = 14 - c$$

$$2c = 14$$

따라서 $c = 7$

답 ③

5 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R} \quad \dots \textcircled{1}$$

이고, 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \dots \textcircled{2}$$

또 $A + B + C = \pi$ 에서

$$\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$$

이므로

$$\sin A + \sin B - \sin(A + B) = 2 \sin A \cos C$$

에서

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2 \sin A \cos C$$

위 식에 ①, ②을 대입하면

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} - \frac{c}{2R} = 2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b(a + b - c) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$ab + b^2 - bc = a^2 + b^2 - c^2$$

$$a^2 - c^2 - ab + bc = 0$$

$$(a + c)(a - c) - b(a - c) = 0$$

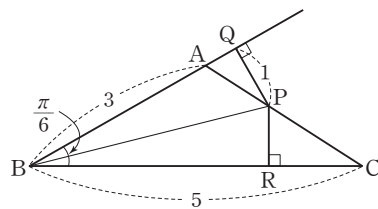
$$(a - c)(a + c - b) = 0$$

$$a + c - b \neq 0 \text{ 이므로 } a = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

6



삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

한편, 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

이고, 삼각형 PBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \overline{PR} = \frac{5}{2} \overline{PR}$$

이므로

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \overline{PR} = \frac{15}{4}$$

따라서

$$\overline{PR} = \frac{2}{5} \left(\frac{15}{4} - \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{10}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 ③	5 71
6 ③	7 481	8 ③		

- 1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$$

이므로

$$R = \frac{\overline{BC}}{2 \sin A} = \frac{4}{2 \times \frac{2}{3}} = 3$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

답 ④

- 2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$2\pi R = 8\pi$$

이므로 $R = 4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= 2R \sin A \\ &= 2 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ④

- 3 $\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{4}$ 에서

$$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 4$$

이므로 $a : b : c = 3 : 5 : 4$

이때 $\overline{AB} = c = 8$ 이므로 $a = 6$, $b = 10$

즉, $a^2 + c^2 = b^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times c = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

답 ②

- 4 실수 t ($t > 0$)에 대하여 $\overline{AB} = kt$, $\overline{BC} = 3t$, $\overline{CA} = 2t$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$9t^2 = k^2t^2 + 4t^2 - 2 \times kt \times 2t \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 1 + \sqrt{6}$$

답 ③

- 5 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{CA}} \\ &= \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = 2R$$

즉, $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$ 이므로 외접원의 넓이는 $\frac{64}{7}\pi$ 이다.

따라서 $p = 7$, $q = 64$ 이므로

$$p + q = 7 + 64 = 71$$

답 71

- 6 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이고, 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이므로

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = 2 \cos B - 1$$

에서

$$\frac{a-b}{c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} - 1$$

$$a^2 - ab = c^2 + a^2 - b^2 - ca$$

$$b^2 - c^2 - ab + ca = 0$$

$$(b+c)(b-c) - a(b-c) = 0$$

$$(b-c)(b+c-a) = 0$$

이때 $b+c-a \neq 0$ 이므로 $b=c$
따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

7 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이의 합과 같고 $\angle BAD = \angle DAC = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AD} \times \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} \\ 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= 2\overline{AD} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\overline{AD} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{AD} = \frac{12\sqrt{3}}{7}$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{432}{49}$$

따라서 $p=49$, $q=432$ 이므로

$$p+q=49+432=481$$

답 481

8 $\overline{AB}=5t$, $\overline{AC}=3s$ ($t>0$, $s>0$)이라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 5t \times 3s \times \sin A = \frac{15}{2}ts \sin A$$

이때 $\overline{AP}=3t$, $\overline{AQ}=2s$ 이므로 삼각형 APQ의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 3t \times 2s \times \sin A = 3ts \sin A$$

$$\text{따라서 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{3ts \sin A}{\frac{15}{2}ts \sin A} = \frac{2}{5}$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

1 47	2 ②	3 ③	4 ④	5 ④
6 ④	7 ②	8 ②	9 ④	10 ③
11 81	12 ④			

1 사각형 ABCD에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R=3$$

한편, 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R$$

이므로

$$\sin(\angle BCD) = \frac{\overline{BD}}{2R} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

$$\cos^2(\angle BCD) = 1 - \sin^2(\angle BCD)$$

$$= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

따라서 $p=36$, $q=11$ 이므로

$$p+q=36+11=47$$

답 47

2 $2 \sin A = 4 \sin B = 3 \sin C$ 의 각 변을 12로 나누면

$$\frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$$

즉, $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 3 : 4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \text{ 이므로}$$

$$a : b : c = 6 : 3 : 4$$

$a=6k$, $b=3k$, $c=4k$ ($k>0$)이라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

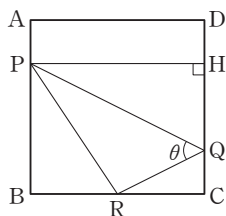
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9k^2 + 16k^2 - 36k^2}{2 \times 3k \times 4k} = -\frac{11}{24}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{16k^2 + 36k^2 - 9k^2}{2 \times 4k \times 6k} = \frac{43}{48}$$

$$\text{따라서 } \cos A + \cos B = -\frac{11}{24} + \frac{43}{48} = \frac{7}{16}$$

답 ②

3



그림과 같이 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $4k$ ($k>0$)이라 하면

직각삼각형 PQH에서 $\overline{QH}=2k$, $\overline{PH}=4k$ 이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{4k^2+16k^2}=2\sqrt{5}k$$

직각삼각형 QRC에서 $\overline{CQ}=k$, $\overline{RC}=2k$ 이므로

$$\overline{QR}=\sqrt{k^2+4k^2}=\sqrt{5}k$$

직각삼각형 PBR에서 $\overline{BR}=2k$, $\overline{PB}=3k$ 이므로

$$\overline{RP}=\sqrt{4k^2+9k^2}=\sqrt{13}k$$

따라서 삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - \overline{RP}^2}{2 \times \overline{PQ} \times \overline{QR}} \\ &= \frac{20k^2 + 5k^2 - 13k^2}{2 \times 2\sqrt{5}k \times \sqrt{5}k} \\ &= \frac{12k^2}{20k^2} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ③

- 4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이고, 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A \\ &= \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 - 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{c}{2R} \times \cos A \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{4R^2} \\ &= \frac{a^2}{4R^2} \\ &= \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \\ &= \sin^2 A \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 ④

- 5 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos \theta \\ &= 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \quad \dots \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

한편, $\angle BCD = \pi - \theta$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \cos (\pi - \theta) \\ &= 9 + 4 + 2 \times 3 \times 2 \times \cos \theta \\ &= 13 + 12 \cos \theta \quad \dots \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ②에서

$$41 - 40 \cos \theta = 13 + 12 \cos \theta$$

$$52 \cos \theta = 28$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

답 ④

- 6 $\angle POA = \frac{\pi}{4}$ 이므로 삼각형 POA에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \times \overline{OP} \times \overline{OA} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= t^2 + 5^2 - 2 \times t \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= t^2 - 5\sqrt{2}t + 25\end{aligned}$$

이때 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있으려면 $\overline{PA}^2 < 16$ 이어야 하므로

$$t^2 - 5\sqrt{2}t + 25 < 16$$

$$t^2 - 5\sqrt{2}t + 9 < 0$$

$$\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{50 - 36}}{2} < t < \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{50 - 36}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2} < t < \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$$

$$\text{따라서 } \beta - \alpha = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2} - \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

답 ④

참고

$t^2 - 5\sqrt{2}t + 9 < 0$ 의 해가 $\alpha < t < \beta$ 이므로 $\beta - \alpha$ 의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

이차방정식 $t^2 - 5\sqrt{2}t + 9 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5\sqrt{2}, \alpha\beta = 9$$

따라서 $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (5\sqrt{2})^2 - 4 \times 9 = 14$ 이고 $\beta - \alpha > 0$ 이므로

$$\beta - \alpha = \sqrt{14}$$

- 7 $\frac{\tan A}{a} = \frac{\tan B}{b}$ 에서

$$b \tan A = a \tan B$$

$$b \times \frac{\sin A}{\cos A} = a \times \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$b \sin A \cos B = a \sin B \cos A$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여



$$b \times \frac{a}{2R} \times \cos B = a \times \frac{b}{2R} \times \cos A$$

이므로 $\cos B = \cos A$

이때 $0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$ 이므로 $A = B$

따라서 삼각형 ABC는 $A = B$, 즉 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

다른 풀이

$$\frac{\tan A}{a} = \frac{\tan B}{b} \text{에서}$$

$$b \tan A = a \tan B$$

$$b \times \frac{\sin A}{\cos A} = a \times \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$b \sin A \cos B = a \sin B \cos A$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인 법칙과 코사인법칙에 의하여

$$b \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = a \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b(c^2 + a^2 - b^2) = a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$bc^2 + a^2b - b^3 = ab^2 + c^2a - a^3$$

$$(a^3 - b^3) + (a^2b - ab^2) - (c^2a - bc^2) = 0$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b) - c^2(a-b) = 0$$

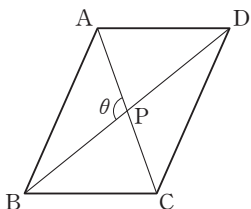
$$(a-b)\{(a+b)^2 - c^2\} = 0$$

$$(a-b)(a+b+c)(a+b-c) = 0$$

이때 $a+b+c \neq 0$, $a+b-c \neq 0$ 이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

8



그림과 같이 두 대각선 AC, BD의 교점을 P라 하고, $\angle APB = \theta$ 라 하자.

이때 평행사변형 ABCD의 넓이는 두 대각선 AC, BD에 의하여 사등분되므로 삼각형 ABP의 넓이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \theta = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이때

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

이고 $\overline{AB} > \overline{BC}$ 에서 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 4 + 9 + 4 = 17$$

답 ②

9 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 2 \sin^2 C$$

에서

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 2 \times \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \dots\dots \text{㉠}$$

이때 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이므로 ㉠을 대입하면

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2}{4ab} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{1}{4} \times 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = \frac{1}{2}$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

10 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로 조건 (가)에서

$$(1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 C) = 1$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

즉, $a^2 + b^2 = c^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\text{이때 } \tan A = \frac{a}{b}, \tan B = \frac{b}{a} \text{에서}$$

$$\tan(\pi - A) = -\tan A = -\frac{a}{b}$$

$$\tan(\pi + B) = \tan B = \frac{b}{a}$$

이고 $C = \frac{\pi}{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} - C\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} 2 \times \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{b}{a} - (-1) &= 2 \\ -\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} &= 1 \end{aligned}$$

$$2a^2 + ab - b^2 = 0$$

$$(2a - b)(a + b) = 0$$

$$a + b \neq 0 \text{ 이므로 } b = 2a$$

이때 직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} \times a \times 2a = a^2 = 5$$

이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 = 5 \times 5 = 25$$

즉, $c = 5$

따라서 직각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 빗변

의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times c = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

답 ③

11 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}t$, $\overline{BC} = 2\sqrt{5}t$, $\overline{CA} = 3\sqrt{2}t$ ($t > 0$)이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{18t^2 + 50t^2 - 20t^2}{2 \times 3\sqrt{2}t \times 5\sqrt{2}t} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 5\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = 10\sqrt{5} \sin A$$

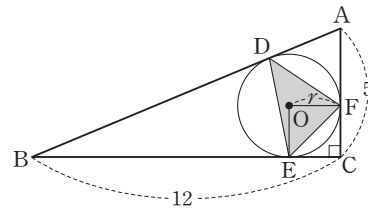
$$\text{즉, } 2\sqrt{5}t = 10\sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 6\sqrt{5} \text{ 이므로 } t = 3$$

따라서 $\overline{AB} = 15\sqrt{2}$, $\overline{CA} = 9\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 15\sqrt{2} \times 9\sqrt{2} \times \frac{3}{5} = 81$$

답 81

12



그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r 라 하면 사각형 OECF는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이므로

$$\overline{CE} = \overline{CF} = r$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ 이고}$$

$$\overline{AD} = \overline{AF} = 5 - r, \overline{BD} = \overline{BE} = 12 - r \text{ 이므로}$$

$$13 = (5 - r) + (12 - r)$$

에서 $r = 2$

$$\text{한편, } \sin A = \frac{12}{13}, \sin B = \frac{5}{13} \text{ 이고}$$

$$\overline{AD} = \overline{AF} = 3, \overline{BD} = \overline{BE} = 10 \text{ 이므로}$$

$$\triangle ADF = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{12}{13} = \frac{54}{13}$$

$$\triangle BED = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{5}{13} = \frac{250}{13}$$

또

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30, \triangle ECF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

이므로 삼각형 DEF의 넓이는

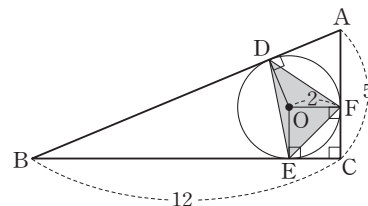
$$\triangle ABC - (\triangle ADF + \triangle BED + \triangle ECF)$$

$$= 30 - \left(\frac{54}{13} + \frac{250}{13} + 2\right) = \frac{60}{13}$$

답 ④

다른 풀이

삼각형 DEF의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.



$$\triangle DOF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\angle DOF)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\pi - A)$$

$$= 2 \sin A$$

$$= 2 \times \frac{12}{13} = \frac{24}{13}$$



$$\begin{aligned} \triangle DOE &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\angle DOE) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\pi - B) \\ &= 2 \sin B \\ &= 2 \times \frac{5}{13} = \frac{10}{13} \\ \triangle EOF &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= \triangle DOF + \triangle DOE + \triangle EOF \\ &= \frac{24}{13} + \frac{10}{13} + 2 = \frac{60}{13} \end{aligned}$$

Level 3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 ③ 2 ① 3 97

1 $\overline{PA} = x, \overline{PB} = y, \overline{PC} = z$ 라 하자.

$\angle APB = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3} \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \times \frac{1}{2} \\ &= x^2 + y^2 - xy \end{aligned}$$

또 $\angle APC = \angle ABC = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= x^2 + z^2 - 2xz \cos \frac{\pi}{3} \\ &= x^2 + z^2 - 2xz \times \frac{1}{2} \\ &= x^2 + z^2 - xz \end{aligned}$$

이때 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$x^2 + y^2 - xy = x^2 + z^2 - xz$$

$$y^2 - z^2 - xy + xz = 0$$

$$(y-z)(y+z) - x(y-z) = 0$$

$$(y-z)(y+z-x) = 0$$

$$y \neq z \text{이므로 } x = y + z$$

한편, 삼각형 BPC에서 $\angle BPC = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} &= y^2 + z^2 - 2yz \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= y^2 + z^2 + yz \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (y+z)^2 + y^2 + z^2 \\ &= (y^2 + 2yz + z^2) + y^2 + z^2 \\ &= 2(y^2 + z^2 + yz) \\ &= 2 \times \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times \sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{BC} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \times \overline{BC}^2 = 2 \times 3^2 = 18$$

답 ③

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로 조건 (가)에서

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = 2 \times \frac{c}{2R}$$

$$\text{즉, } a + b = 2c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이므로 조건 (나)에서

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = 2 \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) = 2c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$ab^2 + c^2a - a^3 + bc^2 + a^2b - b^3 - 2ca^2 - 2b^2c + 2c^3 = 0$$

$$a^2(-a + b - 2c) + b^2(a - b - 2c) + c^2(a + b + 2c) = 0$$

여기에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$-2a^3 - 2b^3 + \frac{(a+b)^2}{4} \times 2(a+b) = 0$$

$$4a^3 + 4b^3 - (a+b)^3 = 0$$

$$4(a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = 0$$

$$(a+b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = 0$$

$$3(a+b)(a-b)^2=0$$

$$a+b \neq 0 \text{ 이므로 } a=b$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2c=a+b=2a \text{ 이므로 } c=a$$

따라서 $a=b=c$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

답 ①

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$$

$$= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 16$$

이므로

$$\overline{BC} = 4$$

한편,

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이므로 삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = 2R$$

즉, $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$ 이므로 외접원 O의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{64}{15}\pi$$

또 삼각형 ABC의 넓이가

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC) &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

이므로 삼각형 ABC의 내접원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{r}{2}(2+4+3) = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

즉, $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$ 이므로 내접원 O'의 넓이를 S'이라 하면

$$S' = \frac{5}{12}\pi$$

그러므로

$$S - S' = \frac{64}{15}\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{77}{20}\pi$$

따라서 $p=20$, $q=77$ 이므로

$$p+q=20+77=97$$

답 97

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 ①	8 ②		

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_4 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 5d \text{ 이므로}$$

$$2a_1 + 5d = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_9 + a_{10} = a_5 + a_6 + 24 \text{ 에서}$$

$$(a_1 + 8d) + (a_1 + 9d) = (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + 24$$

$$2a_1 + 17d = 2a_1 + 9d + 24$$

$$8d = 24, d = 3$$

$d=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a_1 + 5 \times 3 = 7$$

$$a_1 = -4$$

$$\text{따라서 } a_7 = -4 + 6 \times 3 = 14$$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_4 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 5d \text{ 이므로}$$

$$2a_1 + 5d = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $a_9 + a_{10} = (a_5 + 4d) + (a_6 + 4d)$ 이므로

$$a_9 + a_{10} = a_5 + a_6 + 24 \text{ 에서}$$

$$(a_5 + 4d) + (a_6 + 4d) = a_5 + a_6 + 24$$

$$8d = 24, d = 3$$

$d=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a_1 + 5 \times 3 = 7$$

$$a_1 = -4$$

$$\text{따라서 } a_7 = -4 + 6 \times 3 = 14$$

2 네 수 2, a , b , 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a 는 2와 b 의 등차중항이고, b 는 a 와 14의 등차중항이다. 즉,

$$2 + b = 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a + 14 = 2b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 2a - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a + 14 = 2(2a - 2)$$



$$3a=18, a=6$$

$$a=6을 \textcircled{a}에 대입하면$$

$$b=2 \times 6 - 2 = 10$$

따라서 $a^2 + b^2 = 6^2 + 10^2 = 136$

답 ④

다른 풀이

네 수 2, a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$$2 + 3d = 14$$

$$d = 4$$

이때 $a = 2 + 4 = 6, b = 2 + 2 \times 4 = 10$

따라서 $a^2 + b^2 = 6^2 + 10^2 = 136$

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면

$$S_6 = \frac{6(2a_1 + 5d)}{2} = 33 \text{에서}$$

$$2a_1 + 5d = 11 \quad \dots \textcircled{a}$$

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 143 \text{에서}$$

$$a_1 + 5d = 13 \quad \dots \textcircled{b}$$

$\textcircled{a} - \textcircled{b}$ 을 하면

$$a_1 = -2$$

$a_1 = -2$ 를 \textcircled{b} 에 대입하면

$$-2 + 5d = 13$$

$$d = 3$$

따라서

$$a_2 = -2 + 3 = 1$$

답 ③

다른 풀이

$$S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 143 \text{에서}$$

$$a_1 + a_{11} = 26$$

한편, 세 수 a_1, a_6, a_{11} 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_6 = \frac{a_1 + a_{11}}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = \frac{6(a_1 + 13)}{2} = 33 \text{에서}$$

$$a_1 = -2$$

$$a_6 - a_1 = 5d \text{이므로}$$

$$5d = 13 - (-2) = 15$$

$$d = 3$$

따라서

$$a_2 = -2 + 3 = 1$$

4 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = \frac{7(2a_1 + 6d)}{2} = 7(a_1 + 3d)$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{11} = \frac{7(2a_5 + 6d)}{2} = 7(a_5 + 3d)$$

$$= 7\{(a_1 + 4d) + 3d\}$$

$$= 7(a_1 + 7d)$$

따라서

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7) + (a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{11})$$

$$= 7(a_1 + 3d) + 7(a_1 + 7d)$$

$$= 14(a_1 + 5d)$$

$$= 14a_6$$

$$= 14 \times 5$$

$$= 70$$

답 ②

다른 풀이

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} \quad \dots \textcircled{a}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{11} = \frac{7(a_5 + a_{11})}{2} \quad \dots \textcircled{b}$$

세 수 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_4 = \frac{a_1 + a_7}{2} \quad \dots \textcircled{c}$$

세 수 a_5, a_8, a_{11} 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_8 = \frac{a_5 + a_{11}}{2} \quad \dots \textcircled{d}$$

$\textcircled{c}, \textcircled{d}$ 을 각각 $\textcircled{a}, \textcircled{b}$ 에 대입하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 7a_4,$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{11} = 7a_8$$

또 세 수 a_4, a_6, a_8 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_6 = \frac{a_4 + a_8}{2}$$

$$\text{즉, } a_4 + a_8 = 2a_6$$

따라서

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7) + (a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{11})$$

$$= 7a_4 + 7a_8$$

$$= 7 \times 2a_6$$

$$= 7 \times 2 \times 5 = 70$$

5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로 $r > 0$ 이다.

$$\frac{a_3 + a_2}{a_5 + a_4} = \frac{a_1 r^2 + a_1 r}{a_1 r^4 + a_1 r^3} = \frac{a_1 r^2 + a_1 r}{r^2(a_1 r^2 + a_1 r)} = \frac{1}{r^2}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{r^2} = 16$$

$$r = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } r = \frac{1}{4}$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a_2 = a_1 r = 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

답 ⑤

6 세 수 $a, a+b, a+4b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+b)^2 = a(a+4b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 4ab$$

$$b^2 - 2ab = 0, b(b-2a) = 0$$

$$b = 0 \text{ 또는 } b = 2a$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = 2a$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} = 2$$

답 ①

7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$a_1 a_3 = 4a_2 a_4 \text{ 에서}$$

$$a_1 \times a_1 r^2 = 4 \times a_1 r \times a_1 r^3$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } a_5 = a_1 r^4 = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8$$

따라서

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = a_5(1 + r + r^2 + \dots + r^5)$$

$$= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 8 \times \frac{2^6 - 1}{2^5}$$

$$= \frac{63}{4}$$

답 ①

8 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하자.

$$S_4 - S_2 = 3a_3 \text{ 에서}$$

$$S_4 - S_2 = a_4 + a_3 \text{ 이므로}$$

$$a_4 + a_3 = 3a_3$$

$$a_4 = 2a_3$$

$$\text{즉, } \frac{a_4}{a_3} = 2 \text{ 이므로}$$

$$r = 2$$

$$\text{따라서 } S_{10} = \frac{a_1(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{1}{3} \times 1023 = 341$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②
6 5	7 ②	8 ①	9 ⑤	10 ③

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a_1 + d = -1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡ - ㉠을 하면

$$2d = 5, d = \frac{5}{2}$$

$d = \frac{5}{2}$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 + \frac{5}{2} = -1, a_1 = -\frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{7}{2} + 9 \times \frac{5}{2} = 19$$

답 ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_2 = 2d$$

즉, $4 - (-1) = 2d$ 이므로

$$d = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a_{10} = a_4 + 6d = 4 + 6 \times \frac{5}{2} = 19$$

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_6 = 4 \text{ 에서}$$

$$(a_1 + 3d) - (a_1 + 5d) = -2d = 4$$

$$d = -2$$

$$a_2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + (-2) = 5, a_1 = 7$$

이때

$$a_m = a_1 + (m-1)d = 7 + (m-1) \times (-2) = -2m + 9$$

$$a_m = -21 \text{ 이므로 } -2m + 9 = -21$$

$$\text{따라서 } m = 15$$

답 ④



3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_1=2 \text{이므로 } a_2+a_3=10 \text{에서}$$

$$(2+d)+(2+2d)=10$$

$$3d=6, d=2$$

따라서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\times 2+(10-1)\times 2\}}{2}$$

$$=110$$

답 ③

4 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_1=3 \text{이므로}$$

$$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=\frac{11(a_5+a_{15})}{2}$$

$$=\frac{11\{(3+4d)+(3+14d)\}}{2}$$

$$=\frac{11(6+18d)}{2}$$

$$=11(3+9d)$$

$$\text{이때 } a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=132 \text{이므로}$$

$$11(3+9d)=132$$

$$3+9d=12$$

$$d=1$$

$$\text{따라서 } a_3=a_1+2d=3+2\times 1=5$$

답 ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

세 수 a_5, a_{10}, a_{15} 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{a_5+a_{15}}{2}=a_{10}, \text{ 즉 } a_5+a_{15}=2a_{10}$$

$$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=\frac{11(a_5+a_{15})}{2}$$

$$=\frac{11\times 2a_{10}}{2}$$

$$=11a_{10}$$

$$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=132 \text{이므로}$$

$$11a_{10}=132, a_{10}=12$$

$$\text{이때 } a_{10}=a_1+9d=3+9d \text{이므로}$$

$$3+9d=12, d=1$$

$$\text{따라서 } a_3=a_1+2d=3+2\times 1=5$$

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_1=9 \text{이므로}$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3$$

$$=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)$$

$$=3a_1+3d$$

$$=3\times 9+3d$$

$$\text{즉, } 27+3d=21, d=-2$$

$$S_k=\frac{k\{2\times 9+(k-1)\times (-2)\}}{2}$$

$$=-k^2+10k$$

$$S_k<0 \text{에서 } -k^2+10k<0, k(k-10)>0$$

$$k<0 \text{ 또는 } k>10$$

k 는 자연수이므로 k 의 최솟값은 11이다.

답 ②

6 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_{10}-2S_7=3-S_4 \text{에서}$$

$$\frac{10(2a_1+9d)}{2}-2\times\frac{7(2a_1+6d)}{2}=3-\frac{4(2a_1+3d)}{2}$$

$$(10a_1+45d)-(14a_1+42d)=3-(4a_1+6d)$$

$$9d=3, d=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_{16}-a_1=(a_1+15d)-a_1=15d=15\times\frac{1}{3}=5$$

답 5

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_{10}-2S_7=3-S_4 \text{에서 } S_{10}-S_7=3+S_7-S_4$$

$$a_{10}+a_9+a_8=3+a_7+a_6+a_5$$

$$(a_{10}-a_7)+(a_9-a_6)+(a_8-a_5)=3$$

$$3d+3d+3d=3, 9d=3$$

$$\text{이므로 } d=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_{16}-a_1=15d=15\times\frac{1}{3}=5$$

7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$$2a_2=3a_4 \text{에서}$$

$$2a_1r=3a_1r^3$$

$$r^2=\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } a_5=a_1r^4=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=12$$

답 ②

8 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 세 수 a_1, a_2, a_6 이 서로 다르므로 $d\neq 0$ 이고, 세 수 a_1, a_2, a_6 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_2^2 = a_1 a_6$$

$$\text{즉, } (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 5d)$$

$$a_1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$(1 + d)^2 = 1 \times (1 + 5d)$$

$$1 + 2d + d^2 = 1 + 5d$$

$$d^2 - 3d = 0$$

$$d \neq 0 \text{ 이므로 } d = 3$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2 \times 3 = 7$$

답 ①

- 9 등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 공비를 r 라 하면 $r > 0$ 이다.

$$a_1 - a_2 = 2a_3 \text{에서}$$

$$a_1 - a_1 r = 2a_1 r^2$$

$$a_1 > 0 \text{ 이므로}$$

$$1 - r = 2r^2, 2r^2 + r - 1 = 0$$

$$(2r - 1)(r + 1) = 0$$

$$r = -1 \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = \frac{1}{2}$$

$a_1 = 64$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \frac{2^7 - 1}{2^6} = 2^7 - 1 = 127$$

답 ⑤

- 10 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

$$S_4 = 5S_2 \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5(a_1 + a_2)$$

$$a_1(1 + r + r^2 + r^3) = 5a_1(1 + r)$$

$$a_1(1 + r)(1 + r^2) = 5a_1(1 + r)$$

$$a_1(1 + r)(r^2 - 4) = 0$$

$a_1 = 0$ 이면 모든 항이 0으로 같아지므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

$$\text{즉, } r = -1 \text{ 또는 } r^2 = 4$$

$r = -1$ 이면 $a_1 = a_3 = a_5 = \dots$, $a_2 = a_4 = a_6 = \dots$ 이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

$r^2 = 4$, 즉 $r = -2$ 또는 $r = 2$ 이면 모든 항은 서로 다르다.

따라서 $r \neq 1$ 이므로

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}} = \frac{(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r^4 - 1}$$

$$= r^4 + 1 = (r^2)^2 + 1$$

$$= 4^2 + 1 = 17$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 80~82쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 10	5 ②
6 ④	7 ③	8 ④	9 20	10 ②
11 86	12 ③	13 ①	14 ⑤	

- 1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d (d 는 정수)라 하자.

$$a_1 = 12 \text{ 이므로 } a_2 = a_3 + |a_5| \text{에서}$$

$$12 + d = 12 + 2d + |12 + 4d|$$

$$|12 + 4d| = -d$$

(i) $12 + 4d \geq 0$ 이면

$$12 + 4d = -d \text{에서 } d = -\frac{12}{5}$$

(ii) $12 + 4d < 0$ 이면

$$12 + 4d = d \text{에서 } d = -4$$

d 는 정수이므로 $d = -4$

$$\text{따라서 } a_6 = a_1 + 5d = 12 + 5 \times (-4) = -8$$

답 ③

- 2 첫째항이 정수이고 공차가 3이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.

$$a_5 = a_4 + 3, a_4 a_5 < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_4(a_4 + 3) < 0$$

$$-3 < a_4 < 0$$

따라서 $a_4 = -2$ 또는 $a_4 = -1$

(i) $a_4 = -2$, $a_5 = 1$ 인 경우

$$a_4 = a_1 + 3 \times 3 = -2, a_1 = -11$$

이때 $\frac{a_1}{a_4} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$ 이므로 $\frac{a_1}{a_4}$ 의 값은 자연수가 아니다.

(ii) $a_4 = -1$, $a_5 = 2$ 인 경우

$$a_4 = a_1 + 3 \times 3 = -1, a_1 = -10$$

$$\text{이므로 } \frac{a_1}{a_4} = \frac{-10}{-1} = 10$$

$$\text{이때 } a_{10} = -10 + 9 \times 3 = 17$$

(i), (ii)로부터 $a_{10} = 17$

답 ⑤



3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1이고 공차가 d 이므로
 $a_n = 1 + (n-1)d$
 세 수 a_2, a_2a_3, a_k 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2a_2a_3 = a_2 + a_k$
 $2(1+d)(1+2d) = (1+d) + \{1+(k-1)d\}$
 $4d^2 + 6d + 2 = kd + 2$
 $4d^2 + (6-k)d = 0$
 $d(4d + 6 - k) = 0$
 $d \neq 0$ 이므로 $4d + 6 - k = 0$
 즉, $k = 4d + 6$
 k 는 100보다 작은 자연수이므로
 $4d + 6 < 100, d < \frac{47}{2}$
 d 는 자연수이므로 d 의 값은 1, 2, 3, ..., 23이다.
 따라서 순서쌍 (d, k) 는 (1, 10), (2, 14), (3, 18), ..., (23, 98)이고, 그 개수는 23이다.

답 ④

4 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 각각 d, e 라 하면
 $a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 + (n-1)e$
 이때
 $a_n + b_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{b_1 + (n-1)e\}$
 $= (d+e)n + (a_1 + b_1 - d - e)$
 이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 + b_1$ 이고 공차가 $d+e$ 인 등차수열이다.
 또한 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 3n - 2$ 이므로 등차수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 3이다.
 즉, $a_1 + b_1 = 1, d + e = 3$ ㉠
 한편, $a_4 - b_4 = a_3 - b_3$ 에서
 $a_4 - a_3 = b_4 - b_3$ 이므로 $d = e$
 $e = d$ 를 ㉠의 $d + e = 3$ 에 대입하면
 $d + d = 3, d = \frac{3}{2}$
 따라서
 $a_3 + b_5 = (a_1 + 2d) + (b_1 + 4e)$
 $= (a_1 + b_1) + (2d + 4e)$
 $= (a_1 + b_1) + 6d$
 $= 1 + 6 \times \frac{3}{2} = 10$

답 10

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 모두 양수이므로 공차를 d 라 하면 $a_1 > 0, d > 0$ 이다.

$$\begin{aligned} S_5 - S_2 &= a_3 + a_4 + a_5 \\ &= (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \\ &= 3a_1 + 9d \\ \frac{S_7 + 6a_1}{S_5 - S_2} &= \frac{\frac{7(2a_1 + 6d)}{2} + 6a_1}{3a_1 + 9d} \\ &= \frac{13a_1 + 21d}{3a_1 + 9d} \end{aligned}$$

$$\frac{S_7 + 6a_1}{S_5 - S_2} = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{13a_1 + 21d}{3a_1 + 9d} = 4$$

$$13a_1 + 21d = 12a_1 + 36d$$

$$a_1 = 15d$$

따라서

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{15d + 3d}{15d} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

답 ②

6 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n + |S_n - 20| = 20$ 에서
 $|S_n - 20| = -(S_n - 20)$ ㉠
 ㉠은 $S_n - 20 \leq 0$ 일 때 성립하므로
 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n \leq 20$ ㉡
 $a_1 = 10$ 이므로 $d \geq 0$ 이면 ㉡을 만족시키지 못한다.
 따라서 $d < 0$
 다음은 음의 정수인 공차 d 에 대한 등차수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 나타낸 표이다.

d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
-1	10	9	8	7	6	...
-2	10	8	6	4	2	...
-3	10	7	4	1	-2	...
-4	10	6	2	-2	-6	...
-5	10	5	0	-5	-10	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$-3 \leq d \leq -1$ 일 때, $S_4 \geq 22$ 이므로 ㉡을 만족시키지 못한다.

$d \leq -4$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n \leq 18$

이므로 ㉡을 만족시키는 정수 d 의 최댓값은 -4 이다.

답 ④

7 $S_{2n} - S_{2n-1} = 4n + 3$ 에서

$$a_{2n} = 4n + 3 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에 $n=1$ 과 $n=2$ 를 각각 대입하면

$$a_2 = 4 \times 1 + 3 = 7, a_4 = 4 \times 2 + 3 = 11$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_2 = 2d \text{이므로}$$

$$11 - 7 = 2d, d = 2$$

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + 2 = 7$$

$$\text{이므로 } a_1 = 5$$

$$\text{이때 } a_n = 5 + (n-1) \times 2 = 2n + 3 \text{이므로}$$

$$a_7 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

$$a_{10} = 2 \times 10 + 3 = 23$$

$$a_{18} = 2 \times 18 + 3 = 39$$

따라서

$$\begin{aligned} & (a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{18}) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) \\ &= \frac{5(a_{10} + a_{18})}{2} - \frac{4(a_1 + a_7)}{2} \\ &= \frac{5(23 + 39)}{2} - \frac{4(5 + 17)}{2} \\ &= 111 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$S_{2n} - S_{2n-1} = 4n + 3 \text{에서}$$

$$a_{2n} = 4n + 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

a_{14} 는 a_{10} 과 a_{18} 의 등차중항이므로

$$a_{10} + a_{18} = 2a_{14}$$

$$\text{마찬가지로 } a_{12} + a_{16} = 2a_{14}$$

또 a_4 는 a_1 과 a_7 의 등차중항이므로

$$a_1 + a_7 = 2a_4$$

$$\text{마찬가지로 } a_3 + a_5 = 2a_4$$

따라서

$$\begin{aligned} & (a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{18}) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) \\ &= \{(a_{10} + a_{18}) + (a_{12} + a_{16}) + a_{14}\} \\ & \quad - \{(a_1 + a_7) + (a_3 + a_5)\} \\ &= (2a_{14} + 2a_{14} + a_{14}) - (2a_4 + 2a_4) \\ &= 5a_{14} - 4a_4 \\ &\textcircled{1} \text{에 } n=2 \text{와 } n=7 \text{을 각각 대입하면} \\ &a_4 = 4 \times 2 + 3 = 11, a_{14} = 4 \times 7 + 3 = 31 \\ &\text{이므로} \\ &5a_{14} - 4a_4 = 5 \times 31 - 4 \times 11 = 111 \end{aligned}$$

8 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$a_3 + a_4 = r(a_2 + a_3) = 5r,$$

$$a_4 + a_5 = r^2(a_2 + a_3) = 5r^2$$

$$\text{이므로 } a_4 + a_5 = 2(a_3 + a_4) + 40 \text{에서}$$

$$5r^2 = 2 \times 5r + 40$$

$$r^2 - 2r - 8 = 0$$

$$(r+2)(r-4) = 0$$

$$r = -2 \text{ 또는 } r = 4$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 4$$

$$a_2 + a_3 = 5 \text{이므로}$$

$$a_2 + a_3 = r(a_1 + a_2) = 4(a_1 + a_2) \text{에서}$$

$$4(a_1 + a_2) = 5$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 = \frac{5}{4}$$

답 ④

9 조건 (가)에서 등차수열 $\{a_n\}$ 과 등비수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ 이다.

또 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 b_1 , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비는 a_1 이므로

$$a_1 = b_3 \text{에서 } a_1 = b_1 \times a_1^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = b_4 \text{에서 } a_1 + 4b_1 = b_1 \times a_1^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$4b_1 = a_1^2 b_1 (a_1 - 1)$$

$$b_1 > 0 \text{이므로}$$

$$4 = a_1^2 (a_1 - 1)$$

$$a_1^3 - a_1^2 - 4 = 0$$

$$(a_1 - 2)(a_1^2 + a_1 + 2) = 0$$

$$a_1 > 0, a_1^2 + a_1 + 2 \neq 0 \text{이므로 } a_1 = 2$$

$$a_1 = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$2 = 4b_1, b_1 = \frac{1}{2}$$

따라서

$$a_2 b_5 = (a_1 + b_1)(b_1 \times a_1^4)$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \times 2^4\right)$$

$$= \frac{5}{2} \times 8 = 20$$

답 20

10 세 수 $a, b, 2$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a \times 2 = b^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

세 수 $\frac{a}{64}, \frac{5}{16}, \frac{b}{8}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{a}{64} + \frac{b}{8} = 2 \times \frac{5}{16}$$



$$a+8b=40$$

$$a=40-8b \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ②에 대입하면

$$2(40-8b)=b^2$$

$$b^2+16b-80=0$$

$$(b+20)(b-4)=0$$

$$b=-20 \text{ 또는 } b=4$$

$$b>0 \text{ 이므로 } b=4$$

따라서 $a=40-8 \times 4=8$ 이므로

$$a+b=8+4=12$$

답 ②

11 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$ 이고, 공비가 각각 r , r^3 ($r \neq 1$)이므로

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$$T_{10} = \frac{a\{(r^3)^{10}-1\}}{r^3-1} = \frac{a(r^{30}-1)}{r^3-1}$$

$S_{30}=21T_{10}$ 에서

$$\frac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{21a(r^{30}-1)}{r^3-1}$$

$$r^3-1=21(r-1)$$

$$(r-1)(r^2+r+1)=21(r-1)$$

$$r \neq 1 \text{ 이므로 } r^2+r+1=21$$

$$r^2+r-20=0$$

$$(r+5)(r-4)=0$$

$$r=-5 \text{ 또는 } r=4$$

$$r>0 \text{ 이므로 } r=4$$

$$\frac{T_2}{S_3} = \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2+a_3}$$

$$= \frac{a(1+4^3)}{a(1+4+4^2)}$$

$$= \frac{65}{21}$$

따라서 $p=21$, $q=65$ 이므로

$$p+q=21+65=86$$

답 86

12 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

$$a_1=2 \text{ 이므로 } a_3=4 \text{ 에서}$$

$$a_3=2r^2=4$$

$$r^2=2$$

한편, 자연수 k 에 대하여 a_{k+1} 은 a_k 와 a_{k+2} 의 등비중항이므로

$$a_{k+1}^2 = a_k a_{k+2} = a_1 r^{k-1} \times a_1 r^{k+1} = a_1^2 r^{2k}$$

이때 수열 $\{a_{n+1}^2\}$ 은 첫째항이 a_2^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이고,

$$a_2^2 = a_1^2 r^2 = 2^2 \times 2 = 8 \text{ 이므로}$$

$$a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_7$$

$$= a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$$

$$= \frac{a_2^2 \{(r^2)^5 - 1\}}{r^2 - 1}$$

$$= \frac{8(2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 248$$

답 ③

13 $|a_2| + |a_3| + 2a_2 + a_3 = |a_3 - 4| \quad \dots\dots \textcircled{1}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r \neq -1$)이라 하자.

$r=0$ 이면 $a_2=a_3=0$ 이므로 ①에서 $0=4$ 가 되어 모순이다. 따라서 $r \neq 0$ 이다.

(i) $r < 0$ ($r \neq -1$)이면 $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ 이므로 등식 ①은

$$a_2 - a_3 + 2a_2 + a_3 = -(a_3 - 4)$$

$$3a_2 = -a_3 + 4$$

$$a_1 = -2 \text{ 이므로}$$

$$3 \times (-2) \times r = -(-2) \times r^2 + 4$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r+1)(r+2) = 0$$

$$r = -2 \text{ 또는 } r = -1$$

$$r \neq -1 \text{ 이므로 } r = -2$$

(ii) $r > 0$ 이면 $a_2 < 0$, $a_3 < 0$ 이므로 등식 ①은

$$-a_2 - a_3 + 2a_2 + a_3 = -(a_3 - 4)$$

$$a_2 = -a_3 + 4$$

$$a_1 = -2 \text{ 이므로}$$

$$-2r = -(-2) \times r^2 + 4$$

$$r^2 + r + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$r > 0$ 이므로 ①을 만족시키는 실수 r 의 값은 없다.

(i), (ii)로부터 $r = -2$ 이다.

$$\text{이때 } a_n = (-2) \times (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = \frac{-2\{(-2)^7 - 1\}}{(-2) - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-2)^8 + 2}{-3} \\
 &= \frac{256 + 2}{-3} \\
 &= -86
 \end{aligned}$$

답 ①

14 등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a_1 > 0$ 이고, 공비를 r 라 하면 $r > 0$ 이다.

$r = 1$ 이면 $S_3 = 3a_1$, $S_6 = 6a_1$ 이므로 $S_6 = 4S_3$ 을 만족시키지 못한다.

즉, $r \neq 1$ 이므로

$$S_3 = \frac{a_1(r^3 - 1)}{r - 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} \quad \dots \textcircled{2}$$

$S_6 = 4S_3$ 에서 $\frac{S_6}{S_3} = 4$ 이므로

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\begin{aligned}
 \frac{S_6}{S_3} &= \frac{r^6 - 1}{r^3 - 1} \\
 &= \frac{(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r^3 - 1} \\
 &= r^3 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

$$r^3 = 3$$

$r > 0$ 이므로 $r = 3^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{2m}}{S_m} &= \frac{a_1(r^{2m} - 1)}{r - 1} \cdot \frac{r - 1}{a_1(r^m - 1)} \\
 &= \frac{r^{2m} - 1}{r^m - 1} \\
 &= \frac{(r^m - 1)(r^m + 1)}{r^m - 1} \\
 &= r^m + 1 \\
 &= 3^{\frac{m}{3}} + 1
 \end{aligned}$$

$\frac{S_{2m}}{S_m}$ 의 값이 정수가 되기 위해서는 자연수 m 이 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 구하는 30 이하의 모든 자연수 m 은 3, 6, 9, ..., 30 이고, 그 합은

$$3 + 6 + 9 + \dots + 30 = \frac{10(3 + 30)}{2} = 165$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 83쪽

1 ③ 2 35 3 ③

1 첫째항이 -12 이고 공차 d 가 자연수이므로

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

$|a_l| = |a_m|$ 을 만족시키는 l, m ($l < m$)이 존재하기 위해서는

$$a_l < 0 < a_m \text{이고 } a_l = -a_m$$

이어야 한다.

$$a_l = -a_m \text{에서}$$

$$-12 + (l - 1) \times d = -\{-12 + (m - 1) \times d\}$$

$$d(l + m - 2) = 24 \quad \dots \textcircled{1}$$

$d, l + m - 2$ 는 모두 자연수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 $d, l + m - 2$ 는 24의 양의 약수이다.

$$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$$

이므로 순서쌍 $(d, l + m - 2)$ 는 $(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)$ 이다.

$d = 1, l + m - 2 = 24$ 인 경우

$l + m = 26$ ($l < m$)이므로 순서쌍 (l, m) 은

$(1, 25), (2, 24), (3, 23), \dots, (12, 14)$ 이고, 그 개수는 12이다.

$d = 2, l + m - 2 = 12$ 인 경우

$l + m = 14$ ($l < m$)이므로 순서쌍 (l, m) 은

$(1, 13), (2, 12), (3, 11), \dots, (6, 8)$ 이고, 그 개수는 6이다.

마찬가지로 나머지 경우도 생각하면 다음 표와 같다.

d	$l + m$	순서쌍 (l, m) 의 개수
1	26	12
2	14	6
3	10	4
4	8	3
6	6	2
8	5	2
12	4	1
24	3	1

따라서 구하는 모든 순서쌍 (d, l, m) 의 개수는

$$12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 31$$

답 ③

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d ($3 < d < 30$)이고 첫째항이



-30이므로

$$a_1 < a_k < 0 \leq a_{k+1} < a_{k+2} < \dots$$

을 만족시키는 자연수 k ($k \geq 2$)가 존재하고, S_n 의 최솟값은 S_k 이다. 이때

$$S_k \leq S_{k+1} < 0$$

이고, $S_{k+1} < 0 \leq S_p < S_{p+1} < \dots$

을 만족시키는 자연수 p 가 존재하므로

$|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$ 을 만족시키는 서로 다른 세 자연수 $l, l+7, m$ ($m > l+7$)이 존재하기 위해서는

$$l < k < l+7 < p < m$$

$$\text{즉, } S_l < 0, S_{l+7} < 0, S_m > 0$$

이어야 하므로

$$S_l = S_{l+7} = -S_m$$

$S_l = S_{l+7}$ 에서

$$\frac{l\{-60+(l-1)d\}}{2} = \frac{(l+7)\{-60+(l+6)d\}}{2}$$

$$dl^2 - dl - 60l = dl^2 + 13dl - 60l + 42d - 420$$

$$14dl + 42d = 420$$

$$d(l+3) = 30$$

이므로 d 와 $l+3$ 은 30의 양의 약수이다.

d 는 3보다 크고 30보다 작은 자연수이고, $l+3$ 은 3보다 크므로

$$d=5, l+3=6 \text{ 또는 } d=6, l+3=5$$

(i) $d=5, l+3=6$ 일 때

$l=3$ 이므로

$$S_3 = \frac{3(-60+2 \times 5)}{2} = -75$$

이때 $S_m = 75$ 이어야 하므로

$$S_m = \frac{m\{-60+(m-1) \times 5\}}{2} = \frac{5m^2 - 65m}{2} = 75$$

$$5m^2 - 65m - 150 = 0$$

$$m^2 - 13m - 30 = 0$$

$$(m+2)(m-15) = 0$$

$$m = -2 \text{ 또는 } m = 15$$

m 은 자연수이므로 $m=15$

(ii) $d=6, l+3=5$ 일 때

$l=2$ 이므로

$$S_2 = \frac{2(-60+1 \times 6)}{2} = -54$$

이때 $S_m = 54$ 이어야 하므로

$$S_m = \frac{m\{-60+(m-1) \times 6\}}{2}$$

$$= \frac{6m^2 - 66m}{2} = 54$$

$$6m^2 - 66m - 108 = 0$$

$$m^2 - 11m - 18 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 m 은 없다.

(i), (ii)에서 $d=5, l=3, l+7=10, m=15$ 이므로

$$a_l = a_3 = -30 + (3-1) \times 5 = -20$$

$$a_{l+7} = a_{10} = -30 + (10-1) \times 5 = 15$$

$$a_m = a_{15} = -30 + (15-1) \times 5 = 40$$

따라서

$$a_l + a_{l+7} + a_m = -20 + 15 + 40 = 35$$

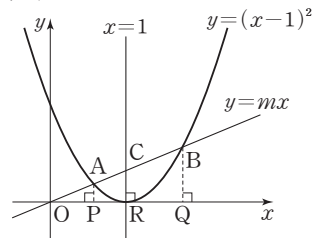
답 35

3. \neg . 세 수 $c-a, a, b-c$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a 는 $c-a$ 와 $b-c$ 의 등차중항이다.

즉, $2a = (c-a) + (b-c)$ 이므로

$$b = 3a \text{ (참)}$$

\neg . 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 $(1, 0)$ 을 R라 하자.



두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식

$$(x-1)^2 = mx, \text{ 즉 } x^2 - (m+2)x + 1 = 0$$

의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m+2, \alpha\beta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 직각삼각형 OPA, ORC, OQB는 서로 닮음이므로 양의 실수 t 에 대하여

$$a = \overline{OA} = \overline{OP}t, c = \overline{OC} = \overline{OR}t, b = \overline{OB} = \overline{OQ}t$$

로 놓으면 $\overline{OP} = \alpha, \overline{OR} = 1, \overline{OQ} = \beta$ 이므로

$$a = \alpha t, c = t, b = \beta t$$

이때 $c^2 = t^2$ 이고, $\textcircled{1}$ 에서 $\alpha\beta = 1$ 이므로

$$ab = \alpha t \times \beta t = \alpha\beta t^2 = t^2$$

$$\text{즉, } c^2 = ab$$

따라서 세 수 a, c, b 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

(참)

ㄷ. ㉑에서 $b=3a$ 이고, ㄴ에서 $a=at$, $b=\beta t$ 이므로

$$\beta t = 3 \times at, \beta = 3a$$

$\beta=3a$ 를 ㉑의 $a\beta=1$ 에 대입하면

$$a \times 3a = 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때 } \beta = 3a = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

㉑에서 $a + \beta = m + 2$ 이므로

$$m + 2 = a + \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } (m+2)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 87~97쪽

1 ②	2 15	3 ③	4 ①	5 ④
6 2	7 ⑤	8 ②	9 12	10 5
11 ②				

1 $\sum_{k=1}^5 (a_k + 2) = 20$ 에서

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 2 = \sum_{k=1}^5 a_k + 2 \times 5 = 20$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (b_k - 1) = 3 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 b_k - \sum_{k=1}^5 1 = \sum_{k=1}^5 b_k - 1 \times 5 = 3$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^5 b_k = 8$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (a_k + 2b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + 2 \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 10 + 2 \times 8 \\ &= 26 \end{aligned}$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 a_k &= a_8 + a_9 + a_{10} \\ &= (a_1 + 14) + (a_1 + 16) + (a_1 + 18) \\ &= 3a_1 + 48 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 a_k = 51 \text{이므로}$$

$$3a_1 + 48 = 51$$

$$a_1 = 1$$

$$\text{따라서 } a_8 = a_1 + 7 \times 2 = 1 + 14 = 15$$

답 15

◀ 다른 풀이 ▶

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 a_k &= a_8 + a_9 + a_{10} \\ &= a_8 + (a_8 + 2) + (a_8 + 4) \\ &= 3a_8 + 6 \end{aligned}$$

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능 기출의 미래

두꺼운 분량, 답답한 해설에서 벗어나
학습 효율을 극대화한 기출문제집



$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 a_k = 51 \text{ 이므로}$$

$$3a_8 + 6 = 51, 3a_8 = 45$$

$$a_8 = 15$$

3
$$\sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 - k}{k+1} + \sum_{k=1}^{10} \frac{3k^2 + 7k + 2}{k+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k-1)(k+1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{10} \frac{(3k+1)(k+2)}{k+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k) + \sum_{k=1}^{10} (3k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10$$

$$= 385 + 110 + 10$$

$$= 505$$

답 ③

4
$$f(x) = x^2 - nx + 2n = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} + 2n$$

이때 이차함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{n}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{n^2}{4} + 2n$ 을 가지므로

$$a_n = -\frac{n^2}{4} + 2n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^7 \left(-\frac{k^2}{4} + 2k\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^7 k^2 + 2 \sum_{k=1}^7 k$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 2 \times \frac{7 \times 8}{2}$$

$$= -35 + 56$$

$$= 21$$

답 ①

5
$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{23} \right)$$

$$= \frac{10a}{69}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{10}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{10a}{69} = \frac{10}{3}$$

따라서 $a = 23$

답 ④

6 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_5 = 5d = 10$$

이므로 $d = 2$

이때 $a_{k+1} - a_k = d = 2$ 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})}$$

$$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$$

$$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{2}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3})$$

$$+ \dots + (\sqrt{a_{17}} - \sqrt{a_{16}}) \}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{a_{17}} - \sqrt{a_1})$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{a_1 + 16d} - \sqrt{a_1})$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{4 + 16 \times 2} - \sqrt{4})$$

$$= \frac{1}{2} \times (6 - 2)$$

$$= 2$$

답 2

7 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 = -2 \text{ 에서}$$

$$a_1 + d = -2 \quad \dots \dots \text{ ㉠}$$

$$a_3 + a_5 = 12 \text{에서}$$

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 12$$

$$a_1 + 3d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$2d = 8, d = 4$$

$d = 4$ 를 \textcircled{A} 에 대입하면

$$a_1 + 4 = -2, a_1 = -6$$

$$\text{따라서 } a_9 = a_1 + 8d = -6 + 8 \times 4 = 26$$

답 ⑤

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

$$2a_4 = a_3 + a_5 = 12 \text{에서 } a_4 = 6$$

$a_2 = -2$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_2 = 2d = 8, d = 4$$

$$\text{따라서 } a_9 = a_2 + 7d = -2 + 7 \times 4 = 26$$

8 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

$$\text{즉, } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

또 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$a_2 = 4 \text{에서 } a_1 r = 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_3 a_5 = 1 \text{에서 } a_1 r^2 \times a_1 r^4 = 1$$

$$(a_1 r^3)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} 을 \textcircled{B} 에 대입하면

$$(4r^3)^2 = 1, r^4 = \frac{1}{16}$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면}$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} = 4, a_1 = 8$$

$$\text{따라서 } a_5 = a_1 r^4 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

답 ②

9 $(n^2 + n)a_{n+1} = (n+2)a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n^2+n} a_n \text{이므로}$$

$$a_2 = \frac{1+2}{1^2+1} a_1 = \frac{3}{2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2+2}{2^2+2} a_2 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{2} a_1 = a_1$$

$$a_4 = \frac{3+2}{3^2+3} a_3 = \frac{5}{12} \times a_1 = \frac{5}{12} a_1$$

$$a_5 = \frac{4+2}{4^2+4} a_4 = \frac{6}{20} \times \frac{5}{12} a_1 = \frac{1}{8} a_1$$

$$\text{따라서 } \frac{a_2}{a_5} = \frac{\frac{3}{2} a_1}{\frac{1}{8} a_1} = 12$$

답 12

다른 풀이

$(n^2 + n)a_{n+1} = (n+2)a_n$ 에서

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2+n}{n+2} = \frac{n(n+1)}{n+2} \text{이므로}$$

$$\frac{a_2}{a_5} = \frac{a_2}{a_3} \times \frac{a_3}{a_4} \times \frac{a_4}{a_5} = \frac{2 \times 3}{4} \times \frac{3 \times 4}{5} \times \frac{4 \times 5}{6} = 12$$

10 $2a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 - 3a_n) \text{이고, } a_1 = 1 \text{이므로}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1^2 - 3a_1) = \frac{1}{2}(1^2 - 3 \times 1) = -1$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2^2 - 3a_2) = \frac{1}{2}\{(-1)^2 - 3 \times (-1)\} = 2$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3^2 - 3a_3) = \frac{1}{2}(2^2 - 3 \times 2) = -1$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4^2 - 3a_4) = \frac{1}{2}\{(-1)^2 - 3 \times (-1)\} = 2$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5^2 - 3a_5) = \frac{1}{2}(2^2 - 3 \times 2) = -1$$

$$a_7 = \frac{1}{2}(a_6^2 - 3a_6) = \frac{1}{2}\{(-1)^2 - 3 \times (-1)\} = 2$$

$$a_8 = \frac{1}{2}(a_7^2 - 3a_7) = \frac{1}{2}(2^2 - 3 \times 2) = -1$$

\vdots

이므로

$$\sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2 = 1 + (-1) = 0$$

$$\sum_{k=1}^3 a_k = \sum_{k=1}^2 a_k + a_3 = 0 + 2 = 2$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=1}^3 a_k + a_4 = 2 + (-1) = 1$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^4 a_k + a_5 = 1 + 2 = 3$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^5 a_k + a_6 = 3 + (-1) = 2$$

$$\sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^6 a_k + a_7 = 2 + 2 = 4$$



$$\sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^7 a_k + a_8 = 4 + (-1) = 3$$

⋮

따라서 구하는 m 의 최솟값은 5이다.

답 5

11 (i) $n=2$ 일 때,

$$\text{(좌변)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16}, \text{ (우변)} = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} \text{이므로}$$

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k^2}} &< 1 - \frac{1}{2^{m^2}} \\ \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^{k^2}} &< 1 - \frac{1}{2^{m^2}} + \frac{1}{2^{(m+1)^2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} + \left\{ \frac{1}{2^{(m+1)^2}} - \frac{1}{2^{m^2}} + \frac{1}{2^{(m+1)^2}} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} + \left\{ \frac{2}{2^{(m+1)^2}} - \frac{1}{2^{m^2}} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} + \left\{ \frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} - \frac{1}{2^{m^2}} \right\} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

2 이상인 모든 자연수 m 에 대하여 $(m+1)^2-1 = m^2+2m > m^2$ 이므로

$$\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} < \frac{1}{2^{m^2}}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} - \frac{1}{2^{m^2}} < 0 \text{이므로}$$

$$1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} + \left\{ \frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} - \frac{1}{2^{m^2}} \right\} < 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} \dots \textcircled{2}$$

ⓐ, ⓑ에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^{k^2}} &< 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} + \left\{ \frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} - \frac{1}{2^{m^2}} \right\} \\ &< 1 - \frac{1}{2^{(m+1)^2}} \end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

$$\text{따라서 } a = \frac{9}{16}, f(m) = \frac{1}{2^{(m+1)^2-1}} - \frac{1}{2^{m^2}} \text{이므로}$$

$$\frac{af(2)}{f(3)} = \frac{\frac{9}{16} \times \left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^4} \right)}{\frac{1}{2^{15}} - \frac{1}{2^9}} = \frac{9}{16} \times \frac{2^{15}}{2^8} \times \frac{1-2^4}{1-2^6} = \frac{120}{7}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ①	2 ③	3 31	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 10	8 ②	9 ③	10 ①

$$\begin{aligned} 1 \quad \sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} + 2) &= \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{11} + 2 \times 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} + 2) &= 40 \text{이므로} \\ a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{11} + 20 &= 40 \end{aligned}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{11} = 20 \dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15 \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 15 \dots \textcircled{2}$$

ⓐ - ⓑ을 하면

$$a_{11} - a_1 = 20 - 15 = 5$$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_5 - a_3 = 4 \text{에서 } 2d = 4, d = 2$$

$a_1 = -3, d = 2$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = -3 + (n-1) \times 2 = 2n - 5$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (2k - 5) \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 5 \times 10 \\ &= 60 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_5 - a_3 = 4 \text{에서 } 2d = 4, d = 2$$

$a_1 = -3, d = 2$ 이고 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 는 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\{2 \times (-3) + (10-1) \times 2\}}{2} = 60$$

3 $\sum_{k=1}^7 a_k = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 a_k (a_k - 3) &= \sum_{k=1}^7 a_k^2 - 3 \sum_{k=1}^7 a_k \\ &= \sum_{k=1}^7 a_k^2 - 3 \times 8 \\ &= \sum_{k=1}^7 a_k^2 - 24 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^7 a_k(a_k-3)=7 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^7 a_k^2 - 24 = 7$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^7 a_k^2 = 31$$

답 31

4 $\sum_{k=1}^5 a_k = 7 \text{이므로}$

$$\sum_{k=1}^5 (2a_k + 3b_k) = 2 \sum_{k=1}^5 a_k + 3 \sum_{k=1}^5 b_k$$

$$= 2 \times 7 + 3 \sum_{k=1}^5 b_k$$

$$= 14 + 3 \sum_{k=1}^5 b_k$$

$$\sum_{k=1}^5 (2a_k + 3b_k) = 26 \text{이므로}$$

$$14 + 3 \sum_{k=1}^5 b_k = 26, \quad 3 \sum_{k=1}^5 b_k = 12$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 b_k = 4$$

답 ②

5 a_{2k+1} 은 a_{2k} 와 a_{2k+2} 의 등차중항이므로

$$a_{2k} + a_{2k+2} = 2a_{2k+1}$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_{2k} + a_{2k+2}) = \sum_{k=1}^5 2a_{2k+1}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^5 a_{2k+1}$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_{2k} + a_{2k+2}) = 104 \text{이므로}$$

$$2 \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = 104$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = 52$$

답 ⑤

6 $\sum_{k=1}^7 (ak^2 + 2k) = a \sum_{k=1}^7 k^2 + 2 \sum_{k=1}^7 k$

$$= a \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 2 \times \frac{7 \times 8}{2}$$

$$= 140a + 56$$

$$\sum_{k=1}^7 (ak^2 + 2k) = 96 \text{이므로}$$

$$140a + 56 = 96, \quad 140a = 40$$

$$\text{따라서 } a = \frac{2}{7}$$

답 ①

7 $\sum_{k=1}^6 (a_{k+1} - a_k)$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_7 - a_6)$$

$$= a_7 - a_1$$

$$\sum_{k=1}^6 (a_{k+1} - a_k) = 12 \text{이므로}$$

$$a_7 - a_1 = 12 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^2 (a_{k+1} - a_k) = 4 \text{이므로}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = 4$$

$$a_3 - a_1 = 4$$

$$a_3 = 2 \text{이므로}$$

$$2 - a_1 = 4, \quad a_1 = -2$$

$$a_1 = -2 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$a_7 - (-2) = 12$$

$$\text{따라서 } a_7 = 10$$

답 10

8 $\frac{1}{\sqrt{5k+4} + \sqrt{5k-1}}$

$$= \frac{\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1}}{(\sqrt{5k+4} + \sqrt{5k-1})(\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1})}$$

$$= \frac{\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1}}{(5k+4) - (5k-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1}}{5}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{\sqrt{5k+4} + \sqrt{5k-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^9 \frac{\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1}}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \{ (\sqrt{9} - \sqrt{4}) + (\sqrt{14} - \sqrt{9}) + (\sqrt{19} - \sqrt{14})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{44}) \}$$

$$= \frac{1}{5} (7 - 2)$$

$$= 1$$

답 ②

9 $a_{n+1} + 2a_n = n^2$ 에서

$$a_{n+1} = n^2 - 2a_n \text{이므로}$$

$$a_2 = 1 - 2a_1 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_3 = 2^2 - 2a_2 = 4 - 2(1 - 2a_1) = 2 + 4a_1$$

$$a_4 = 3^2 - 2a_3 = 9 - 2(2 + 4a_1) = 5 - 8a_1$$

$$a_5 = 4^2 - 2a_4 = 16 - 2(5 - 8a_1) = 6 + 16a_1$$

$$a_5 = 4a_1 \text{이므로}$$



$$4a_1 = 6 + 16a_1$$

$$12a_1 = -6$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$a_2 = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

답 ③

10 $a_1 = k$ 라 하자.

$$a_2 = -a_1 + 5 = -k + 5$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \times (-k + 5) = -3k + 15$$

$$a_4 = -a_3 + 5 = -(-3k + 15) + 5 = 3k - 10$$

$$a_5 = 3a_4 = 3 \times (3k - 10) = 9k - 30$$

$$a_6 = -a_5 + 5 = -(9k - 30) + 5 = -9k + 35$$

$$a_6 = 8 \text{이므로}$$

$$-9k + 35 = 8, 9k = 27$$

$$\text{따라서 } a_1 = k = 3$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-------|
| 1 ② | 2 ① | 3 ① | 4 ② | 5 350 |
| 6 ④ | 7 9 | 8 ⑤ | | |

1 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2nx + 2n - 3 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_n + \beta_n = 2n, \alpha_n \beta_n = 2n - 3$

따라서

$$\sum_{n=1}^7 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \sum_{n=1}^7 \{(\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^7 \{(2n)^2 - 2(2n - 3)\}$$

$$= \sum_{n=1}^7 (4n^2 - 4n + 6)$$

$$= 4 \sum_{n=1}^7 n^2 - 4 \sum_{n=1}^7 n + \sum_{n=1}^7 6$$

$$= 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 4 \times \frac{7 \times 8}{2} + 6 \times 7$$

$$= 560 - 112 + 42 = 490$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_1 = 2 \text{이므로 } a_2 + a_3 = 10 \text{에서}$$

$$(2 + d) + (2 + 2d) = 10$$

$$3d = 6, d = 2$$

$$\text{이때 } S_n = \frac{n\{4 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+1) \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{2}{S_k} = \sum_{k=1}^m \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \frac{2m}{m+1}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{2}{S_k} = \frac{7}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{2m}{m+1} = \frac{7}{4}$$

$$8m = 7(m+1)$$

$$m = 7$$

$$\text{따라서 } a_7 = 2 + 6 \times 2 = 14$$

답 ①

3 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 2 \quad \dots \text{㉠}$$

이므로 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 3^{n-1} - 2 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (3^n - 2) - (3^{n-1} - 2) = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\text{즉, } a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이때 $a_{2n} = 2 \times 3^{2n-1} \quad (n \geq 1)$ 이므로

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k} = \sum_{k=1}^5 (2 \times 3^{2k-1})$$

$$= \frac{6\{(3^2)^5 - 1\}}{3^2 - 1}$$

$$= \frac{3^{11} - 3}{4}$$

답 ①

4 $a_1 = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left(\frac{2k-1}{a_k} - \frac{2k+1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{3}{a_2} \right) + \left(\frac{3}{a_2} - \frac{5}{a_3} \right) + \left(\frac{5}{a_3} - \frac{7}{a_4} \right) + \left(\frac{7}{a_4} - \frac{9}{a_5} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{9}{a_5} \\ &= 3 - \frac{9}{a_5} \end{aligned}$$

한편,

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{2k-1}{a_k} - \frac{2k+1}{a_{k+1}} \right) = -2 \times 4^2 - 3 \times 4 + 2 = -42$$

이므로

$$3 - \frac{9}{a_5} = -42, \quad \frac{9}{a_5} = 45$$

$$\text{따라서 } a_5 = \frac{1}{5}$$

답 ②

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$a_{2k} - a_{2k-1} = 3$$

이때

$$\begin{aligned} a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2 &= (a_{2k} - a_{2k-1})(a_{2k} + a_{2k-1}) \\ &= 3(a_{2k} + a_{2k-1}) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+10} = a_n + 10 \times 3$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10} (a_k + 30) = \sum_{k=1}^{10} a_k + 30 \times 10$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=11}^{20} a_k - 300 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} (a_{2k} + a_{2k-1}) \\ &= 3 \{ (a_2 + a_1) + (a_4 + a_3) + (a_6 + a_5) + \cdots + (a_{20} + a_{19}) \} \\ &= 3 \left(\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=11}^{20} a_k \right) \\ &= 3 \left\{ \left(\sum_{k=11}^{20} a_k - 300 \right) + \sum_{k=11}^{20} a_k \right\} \\ &= 6 \sum_{k=11}^{20} a_k - 900 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) = 1200 \text{ 이므로}$$

$$6 \sum_{k=11}^{20} a_k - 900 = 1200, \quad 6 \sum_{k=11}^{20} a_k = 2100$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=11}^{20} a_k = 350$$

답 350

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$a_{2k} - a_{2k-1} = 3$$

이때

$$\begin{aligned} a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2 &= (a_{2k} - a_{2k-1})(a_{2k} + a_{2k-1}) \\ &= 3(a_{2k} + a_{2k-1}) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} (a_{2k} + a_{2k-1}) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{20} a_k \\ &= 3 \times \frac{20 \times (2a_1 + 19 \times 3)}{2} \\ &= 60a_1 + 1710 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) = 1200 \text{ 이므로}$$

$$60a_1 + 1710 = 1200$$

$$a_1 = -\frac{17}{2}$$

따라서

$$a_{11} = -\frac{17}{2} + 10 \times 3 = \frac{43}{2}, \quad a_{20} = -\frac{17}{2} + 19 \times 3 = \frac{97}{2}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=11}^{20} a_k = \frac{10(a_{11} + a_{20})}{2} = \frac{10 \times \left(\frac{43}{2} + \frac{97}{2} \right)}{2} = 350$$

6 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$$a_2 = -(2a_1 + 3) = -2a_1 - 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2(-2a_1 - 3) + 3 = -4a_1 - 3$$

$$a_4 = a_3 - 2 = (-4a_1 - 3) - 2 = -4a_1 - 5$$

$$a_5 = 2a_4 + 3 = 2(-4a_1 - 5) + 3 = -8a_1 - 7$$

$$a_6 = -(2a_5 + 3) = -\{2(-8a_1 - 7) + 3\} = 16a_1 + 11$$

$$a_7 = a_6 - 2 = (16a_1 + 11) - 2 = 16a_1 + 9$$

$$a_3 = a_7 \text{ 이므로}$$

$$-4a_1 - 3 = 16a_1 + 9$$

$$20a_1 = -12$$

$$a_1 = -\frac{3}{5}$$

답 ④

7 (i) a_1 이 3 이상의 홀수일 때

$$a_2 = a_1 - 1 \text{ 이므로 } a_2 \text{는 짝수이다.}$$

$$a_3 = a_2 + 3 = (a_1 - 1) + 3 = a_1 + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_3 \text{은 홀수이다.}$$



$$a_4 = a_3 - 1 = (a_1 + 2) - 1 = a_1 + 1 \text{이므로}$$

a_4 는 짝수이다.

$$a_5 = a_4 + 3 = (a_1 + 1) + 3 = a_1 + 4 \text{이므로}$$

a_5 는 홀수이다.

$$a_6 = a_5 - 1 = (a_1 + 4) - 1 = a_1 + 3 \text{이므로}$$

a_6 은 짝수이다.

⋮

$a_{2n+2} = a_{2n} + 2$ 이므로 $a_{10} = a_2 + 2 \times 4$ 이고 a_{10} 은 짝수이다.

$$a_{10} = 12 \text{이므로 } (a_1 - 1) + 8 = 12$$

$$a_1 = 5$$

(ii) a_1 이 3 이상의 짝수일 때

$$a_2 = a_1 + 3 \text{이므로 } a_2 \text{는 홀수이다.}$$

$$a_3 = a_2 - 1 = (a_1 + 3) - 1 = a_1 + 2 \text{이므로}$$

a_3 은 짝수이다.

$$a_4 = a_3 + 3 = (a_1 + 2) + 3 = a_1 + 5 \text{이므로}$$

a_4 는 홀수이다.

$$a_5 = a_4 - 1 = (a_1 + 5) - 1 = a_1 + 4 \text{이므로}$$

a_5 는 짝수이다.

⋮

a_{2n} 은 홀수이므로 $a_{10} = 12$ 라는 조건을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)로부터 $a_1 = 5$ 이고, $a_2 = a_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ 이므로

$$a_1 + a_2 = 5 + 4 = 9$$

답 9

8 (i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= 2$, (우변) $= \frac{2!}{1!} = 2$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4k-2) = \frac{(2k)!}{k!} \quad \dots \textcircled{1}$$

Ⓛ의 양변에 $(4k+2)$ 를 곱하면

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4k-2) \times (4k+2)$$

$$= \frac{(2k)!}{k!} \times (4k+2)$$

$$= \frac{2(2k+1)!}{k!}$$

$$= \frac{2(2k+1)!}{2(k+1)!} \times (2k+2)$$

$$= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(k) = 2(2k+1)!$, $g(k) = 2k+2$ 이므로

$$\frac{10! \times g(3)}{f(4)} = \frac{10! \times 8}{2 \times 9!} = 40$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 19 2 9 3 ③ 4 ①

1 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} = 4n^2 + 16n \quad \dots \textcircled{1}$

Ⓛ에서

$$\begin{aligned} \frac{a_7 a_8}{15} &= \sum_{k=1}^7 \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} - \sum_{k=1}^6 \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} \\ &= (4 \times 7^2 + 16 \times 7) - (4 \times 6^2 + 16 \times 6) \\ &= 4 \times (7^2 - 6^2) + 16 \times (7 - 6) \\ &= 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_8 a_9}{17} &= \sum_{k=1}^8 \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} \\ &= (4 \times 8^2 + 16 \times 8) - (4 \times 7^2 + 16 \times 7) \\ &= 4 \times (8^2 - 7^2) + 16 \times (8 - 7) \\ &= 76 \end{aligned}$$

이므로

$$a_7 a_8 = 68 \times 15 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_8 a_9 = 76 \times 17 = 68 \times 19 \quad \dots \textcircled{3}$$

Ⓜ-Ⓛ을 하면

$$a_8(a_9 - a_7) = 68 \times (19 - 15) = 68 \times 4$$

Ⓜ+Ⓛ을 하면

$$a_8(a_9 + a_7) = 68 \times (19 + 15) = 68 \times 34$$

$$\frac{a_8(a_9 - a_7)}{a_8(a_9 + a_7)} = \frac{68 \times 4}{68 \times 34} \text{에서}$$

$$\frac{a_9 - a_7}{a_9 + a_7} = \frac{2}{17}$$

따라서 $p=17$, $q=2$ 이므로

$$p+q = 17+2 = 19$$

답 19

2 $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n \quad \dots \textcircled{1}$

Ⓛ의 양변에 $n=4$ 를 대입하면

$$a_5 = a_4^2 - 2a_4$$

$a_4 = a_5$ 이므로
 $a_4 = a_4^2 - 2a_4, a_4^2 - 3a_4 = 0$
 $a_4(a_4 - 3) = 0$
 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = 3$
 그런데 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 0이 아닌 정수이므로
 $a_4 = 3$

㉠의 양변에 $n=3$ 을 대입하면
 $a_4 = a_3^2 - 2a_3$ 이므로
 $a_3^2 - 2a_3 = 3, a_3^2 - 2a_3 - 3 = 0$
 $(a_3 + 1)(a_3 - 3) = 0$
 $a_3 = -1$ 또는 $a_3 = 3$

㉠의 양변에 $n=2$ 를 대입하면
 $a_3 = a_2^2 - 2a_2 \dots \dots \textcircled{\text{C}}$

(i) $a_3 = -1$ 이면 $\textcircled{\text{C}}$ 에서
 $a_2^2 - 2a_2 = -1, a_2^2 - 2a_2 + 1 = 0$
 $(a_2 - 1)^2 = 0$
 $a_2 = 1$
 ㉠의 양변에 $n=1$ 을 대입하면
 $a_2 = a_1^2 - 2a_1 \dots \dots \textcircled{\text{B}}$
 $a_2 = 1$ 을 $\textcircled{\text{B}}$ 에 대입하면
 $a_1^2 - 2a_1 = 1, a_1^2 - 2a_1 - 1 = 0$
 그런데 이를 만족시키는 정수 a_1 은 없다.

(ii) $a_3 = 3$ 이면 $\textcircled{\text{C}}$ 에서
 $a_2^2 - 2a_2 = 3, a_2^2 - 2a_2 - 3 = 0$
 $(a_2 + 1)(a_2 - 3) = 0$
 $a_2 = -1$ 또는 $a_2 = 3$
 $a_2 \neq a_3$ 이므로 $a_2 = -1$
 $\textcircled{\text{B}}$ 에서
 $a_1^2 - 2a_1 = -1, a_1^2 - 2a_1 + 1 = 0$
 $(a_1 - 1)^2 = 0$
 $a_1 = 1$

(i), (ii)에서 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = a_4 = a_5 = 3$ 이므로
 $\sum_{k=1}^5 a_k = 1 + (-1) + 3 + 3 + 3 = 9$

답 9

3 두 점 A_n, B_n 의 x 좌표를 각각 α_n, β_n 이라 하면 α_n, β_n 은 x 에 대한 이차방정식 $x^2 = x + n$, 즉 $x^2 - x - n = 0$ 의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n + \beta_n = 1, \alpha_n \beta_n = -n \dots \dots \textcircled{1}$

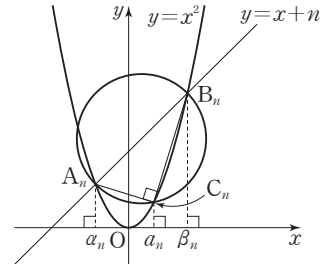
세 점 A_n, B_n, C_n 은 곡선 $y = x^2$ 위의 점이므로 $A_n(\alpha_n, \alpha_n^2), B_n(\beta_n, \beta_n^2), C_n(\alpha_n, \alpha_n^2)$ 이고

직선 $A_n C_n$ 의 기울기는

$$\frac{\alpha_n^2 - \alpha_n^2}{\alpha_n - \alpha_n} = \frac{(\alpha_n + \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_n)}{\alpha_n - \alpha_n} = \alpha_n + \alpha_n$$

직선 $B_n C_n$ 의 기울기는

$$\frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{\alpha_n - \beta_n} = \frac{(\alpha_n + \beta_n)(\alpha_n - \beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = \alpha_n + \beta_n$$



이때 선분 $A_n B_n$ 은 원의 지름이므로 직선 $A_n C_n$ 과 직선 $B_n C_n$ 은 서로 수직이다.

즉, $(\alpha_n + \alpha_n)(\alpha_n + \beta_n) = -1$
 $\alpha_n^2 + (\alpha_n + \beta_n)\alpha_n + \alpha_n \beta_n = -1 \dots \dots \textcircled{2}$

㉠을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$\alpha_n^2 + \alpha_n - n = -1$
 이므로 $\alpha_n^2 + \alpha_n - 1 = n - 2$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} (\alpha_n^2 + \alpha_n - 1) &= \sum_{n=1}^{10} (n - 2) \\ &= \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} 2 \\ &= \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\ &= 55 - 20 = 35 \end{aligned}$$

답 ③

4 $a_1 = 5$

$a_2 = a_1 - 1 = 4$

$a_3 = 2a_1 - 3 = 7$

$a_4 = a_2 - 1 = 3$

$a_5 = 2a_2 - 3 = 5$

$a_6 = a_3 - 1 = 6$

에서 $3 \leq n \leq 5$ 일 때, $3 \leq a_n \leq 7 \dots \dots \textcircled{1}$

$a_{2n} = a_n - 1, a_{2n+1} = 2a_n - 3$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$6 \leq n \leq 11$ 일 때, $2 \leq a_n \leq 11$

$a_{12} = a_6 - 1 = 6 - 1 = 5$ 이므로

$6 \leq n \leq 12$ 일 때, $2 \leq a_n \leq 11 \dots \dots \textcircled{2}$

$a_{2n} = a_n - 1, a_{2n+1} = 2a_n - 3$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에 의하여

$12 \leq n \leq 25$ 일 때, $1 \leq a_n \leq 19 \dots \dots \textcircled{3}$



정답과 풀이

$a_{2n} = a_n - 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - 3$ 이므로 ㉔에 의하여

$24 \leq n \leq 51$ 일 때, $-1 \leq a_n \leq 35$

㉕에서 $a_n = 7$, 즉 $a_3 = 7$ 일 때,

$a_7 = 2a_3 - 3 = 11$, $a_{15} = 2a_7 - 3 = 19$,

$a_{31} = 2a_{15} - 3 = 35$

따라서 집합 A 의 원소의 값 중 최댓값은 35이다.

답 ①

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능연계교재의 VOCA 1800 / 국어 어휘

연계교재의 어휘 학습을 각 한 권으로!
수능특강, 수능완성의 중요·핵심 어휘 수록