29번

$2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2$ 을 간단히 하기 위해 평면 $y=4,\ y+\sqrt{3}z+8=0$ 을 평행이동시켜 세 벡터 $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{P_1Q_1},\ \overrightarrow{P_2Q_2}$ 의 시점 $P,\ P_1,\ P_2$ 를 일치시키자.
이때, 두 평면 $y=4,\ y+\sqrt{3}z+8=0$이 이루는 각 θ를 구하면

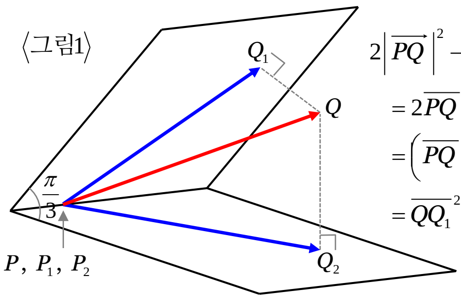
$$\cos\theta=\frac{(0,1,0)\bullet(0,1,\sqrt{3})}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}\text{로부터 } \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$

이다.

또한 세 점 $P,\ P_1,\ P_2$ 를 일치시키면 $\overrightarrow{PQ}$ 가 두 평면이 예각을 이루는 쪽으로 올 수도 있고, 둔각을 이루는 쪽으로 갈 수도 있으므로 경우를 나눠서 생각해야 한다.

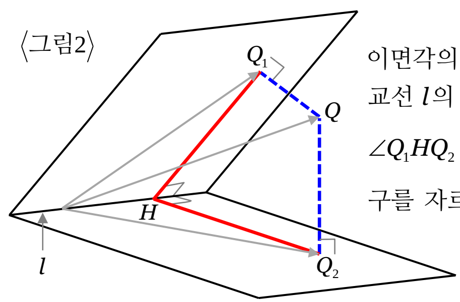
$i)$ $\overrightarrow{PQ}$ 가 두 평면이 예각을 이루는 쪽으로 올 때

〈그림1〉



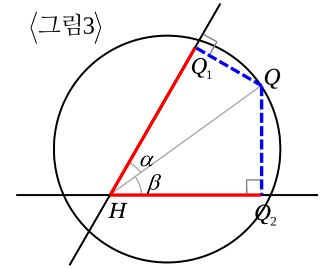
$$\begin{aligned}
&2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2\\
&=2\overline{PQ}^2-\overline{PQ_1}^2-\overline{PQ_2}^2\\
&=\left(\overline{PQ}^2-\overline{PQ_1}^2\right)+\left(\overline{PQ}^2-\overline{PQ_2}^2\right)\\
&=\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2
\end{aligned}$$

〈그림2〉

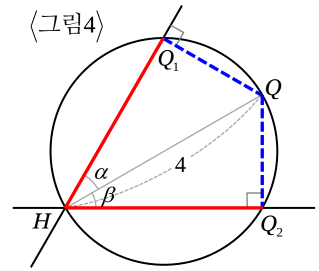


이면각의 활용을 위해 평면 QQ_1Q_2 와 교선 l의 교점을 H라 하면 $\angle Q_1HQ_2=\frac{\pi}{3}$가 되고, 평면 QQ_1Q_2 로 구를 자르면 〈그림3〉이 나타난다.

〈그림3〉



〈그림4〉



$\angle QHQ_1=\alpha,\ \angle QHQ_2=\beta$라 하면

$$\begin{aligned}
&\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}\\
&\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2\\
&\quad=\left(\overline{QH}\sin\alpha\right)^2+\left(\overline{QH}\sin\beta\right)^2\\
&\quad=\overline{QH}^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)
\end{aligned}$$

이며, 위 식의 값이 최대이려면 〈그림4〉와 같이 $\overline{QH}$ 가 구의 지름과 일치해야 한다.

따라서

$$\begin{aligned}
&\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2\\
&\quad=16\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)\\
&\quad=16\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}\right)\\
&\quad=16-8\left(\cos2\alpha+\cos2\beta\right)\\
&\quad=16-8\times2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad=16-8\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

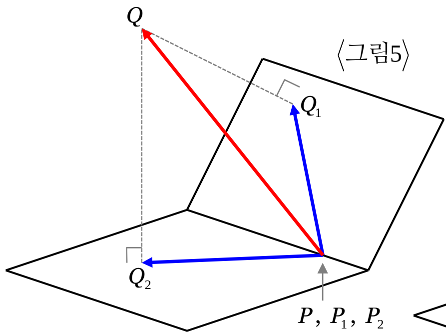
$$\alpha-\beta=\alpha-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{\pi}{3},\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{3}\text{로부터}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{3}\le2\alpha-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}\\
&\frac{1}{2}\le\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\le1\\
&\frac{1}{2}\le\cos(\alpha-\beta)\le1
\end{aligned}$$

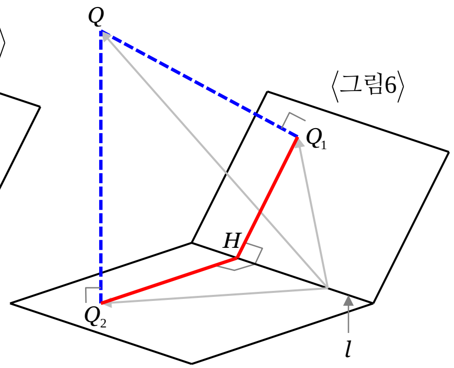
$\therefore\ \overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$ 의 최댓값은 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$일 때, 12이다.

$ii)$ $\overrightarrow{PQ}$ 가 두 평면이 둔각을 이루는 쪽으로 올 때

〈그림5〉

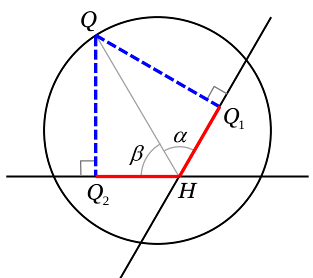


〈그림6〉

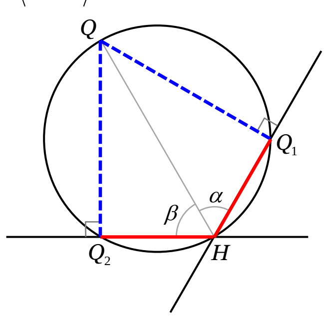


여기서도 이면각 활용을 위해 평면 QQ_1Q_2와 교선 l의 교점을 H라 하면 $\angle Q_1HQ_2 = \dfrac{2\pi}{3}$가 되고, 평면 QQ_1Q_2로 구를 자르면 〈그림7〉이 나타난다.

〈그림7〉



〈그림8〉



또한 $\overline{QH}$ 를 구의 지름과 일치시키면

$$\overline{QQ_1}^2 + \overline{QQ_2}^2$$
$$= 16 - 8 \times 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$= 16 + 8\cos(\alpha-\beta)$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 2\alpha - \frac{2\pi}{3},$$

$0 \le \alpha \le \dfrac{2\pi}{3}$로부터

$$-\frac{2\pi}{3} \le 2\alpha - \frac{2\pi}{3} \le \frac{2\pi}{3}$$
$$-\frac{1}{2} \le \cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \le 1$$
$$-\frac{1}{2} \le \cos(\alpha-\beta) \le 1$$

$\therefore \overline{QQ_1}^2 + \overline{QQ_2}^2$ 의 최댓값은 $\cos(\alpha-\beta)=1$일 때, 24이다.

$i)$, $ii)$로부터 $\overline{QQ_1}^2 + \overline{QQ_2}^2$ 의 최댓값은 24이다.

☆〈그림4〉를 직관으로 곧바로 떠올리 수 있다면 그대는 직관 지존!

☆ $i)$에서 최댓값은 $|\alpha-\beta| = \dfrac{\pi}{3}$일 때 즉, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\beta = \dfrac{\pi}{3}$일 때 생긴다.

☆ $ii)$에서 최댓값은 $\alpha - \beta = 0$일 때 즉, $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{3}$일 때 생긴다. 이 것은 직관(추측?)으로 간단하게 파악되지만, 논리적으로 설명하자면 왼쪽과 같이 계산이 조금 복잡해진다.

30번

$f(x)=ax^2+bx+c$로 두면

$g(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

$g'(x)=(2ax+b)e^{-x}+(ax^2+bx+c)(-e^{-x})=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$

$g''(x)=(-2ax+2a-b)e^{-x}+\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}(-e^{-x})$

$\quad=\{ax^2+(-4a+b)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

(가)에 의해 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 1, 4이므로

이차방정식 $ax^2+(-4a+b)x+2a-2b+c=0$의 두 근이 1, 4이다.

(두 근의 합)$=-\dfrac{-4a+b}{a}=5 \quad \to b=-a$

(두 근의 곱)$=\dfrac{2a-2b+c}{a}=4 \quad \to c=2a+2b=0$

따라서

$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

$g'(x)=(-ax^2+3ax-a)e^{-x}$

점 $(0,k)$ 에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면

접선의 방정식은

$y-(at^2-at)e^{-t}=(-at^2+3at-a)e^{-t}(x-t)$

이며, 여기에 점 $(0,k)$를 대입하면

$k-(at^2-at)e^{-t}=(-at^2+3at-a)e^{-t}(-t)$

$k=\dfrac{at^3-2at^2}{e^t} \quad \cdots\cdots\cdots ①$

가 된다. 이때, 점 $(0,k)$에서 $y=g(x)$에 그은 접선의 세 개면 t에 대한 방정식 ①의 실근도 세 개이므로 직선 $y=k$와 $y=\dfrac{at^3-2at^2}{e^t}$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$y=\dfrac{at^3-2at^2}{e^t}$로부터

$y'=\dfrac{(3at^2-4at)e^t-(at^3-2at^2)e^t}{e^{2t}}=\dfrac{-at(t-1)(t-4)}{e^t}$

이며, $a>0$로 보고 함수의 증감표를 작성하면

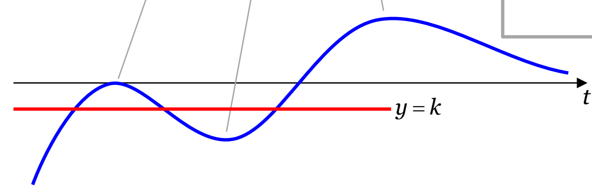
t	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
y		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y'	$-\infty$	↗	0	↘	$-\dfrac{a}{e}$	↗	$\dfrac{32a}{e^4}$	↘	0

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{at^3-2at^2}{e^t}$에 로피탈 정리를 반복 적용하면

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{3at^2-4at}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6at-4a}{e^t}$

$\displaystyle\quad=\lim_{t\to\infty}\frac{6a}{e^t}=0$

이다. 따라서 그래프 개형은 다음과 같다.



직선 $y=k$는 곡선과 세 점에서 만나므로 그래프는 위 그림과 같다. 따라서

$-\dfrac{a}{e}<k<0$

(나)에 의해 $-\dfrac{a}{e}=-1 \quad \to a=e$

$\therefore g(x)=(x^2-x)e^{1-x}$

$g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$

☆ $a<0$일 때는 곡선 $y=\dfrac{at^3-2at^2}{e^t}$의 그래프가 t축에 대해 대칭이동된 형태이므로 직선 $y=k$와 다음처럼 만난다. 따라서 $0<k<-\dfrac{a}{e}$가 되어야 하지만, (나)의 조건과 맞지 않다.