2022학년도 11월 대수능 수학 (공통)

1	②	2	⑤	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	③	12	③	13	②	14	③	15	②
16	3	17	4	18	12	19	6	20	110
21	678	22	9						

1. 지수의 연산 방향

$2^{\sqrt{3}} \times 4 = 2^{\sqrt{3}} \times 2^2 = 2^{\sqrt{3}+2}$이므로

$$\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2} = \left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$$

$$= 2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

이다. 따라서 답은 ②이다.

[정답] ②

※ 순간 긴장하여서 $\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$를 $2^{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)} = 2^{2\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}}$과 같이 계산하지 않도록 주의하자. 다행히 보기 중에 없어서 그럴 가능성은 드물겠지만.

[2021년 06월 평가원 수학 1번]

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 미분법에 의한 미분 vs 미분계수 정의에 의한 미분

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$이므로 $f'(1) = 3 + 6 + 1 = 1$이고, 따라서 답은 ⑤이다.

[정답] ⑤

※ $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 또는 $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 을 이용해서 계산해도 동일한 결과를 얻을 수 있지만, 지금은 도함수에 함숫값을 대입하는 방식으로 미분계수를 구하는 것이 훨씬 바람직하다.

[2021년 09월 평가원 수학 2번]

2. 함수 $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 등차수열과 기울기

$36 = a_4 + a_5 = 2a_5$이므로 $a_5 = 18$이다.

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d는

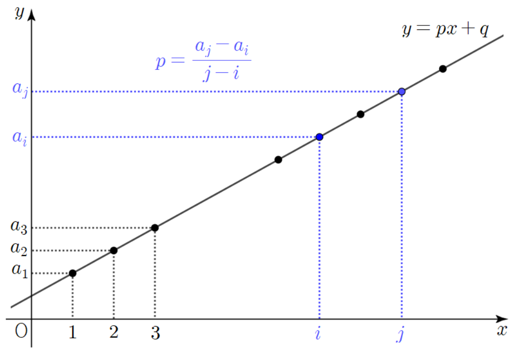
$$d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = \frac{18 - 6}{5 - 2} = \frac{12}{3} = 4$$

따라서 답은 ⑤이다.

[정답] ⑤

※ 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$은 n에 관한 일차식이므로 $a_n = pn + q$ ($p \neq 0$, p, q는 상수)꼴로 나타낼 수 있다. 이때 p는 다름아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d와 같다. 대부분 초항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$을 $a_n = a_1 + (n-1)d$로 표현하는데, n에 관한 일차식이라는 관점에서 $a_n = pn + q$와 비교해보면 $p = d$, $q = a_1 - d$의 관계가 성립한다.

여기서 우리는 등차수열도 결국 n에 관한 일차함수이므로, 두 점을 지나는 직선의 기울기로서 등차수열의 공차를 알 수 있다.



물론 $a_2 = 6$, $a_5 = a_2 + 3d = 18$를 이용해서 손쉽게 구할 수도 있지만, 등차수열과 등차수열의 합을 다항식으로 바라보는 유연한 시선도 필요하다.

4. 좌 · 우극한값 방향의 관찰

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$이므로

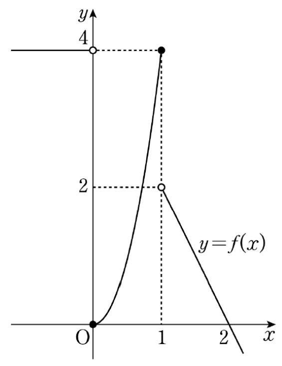
$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 4$이다.

따라서 답은 ④이다.

[정답] ④

[2020년 10월 교육청 수학(나형) 8번]

8. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값은? [3점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

5. 수열의 기본은 나열

주어진 점화 관계에 따라 수열 $\{a_n\}$을 나열해보면

$\{a_n\}$: 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, $\cdots$

로 주기가 4인 수열임을 알 수 있다. 따라서

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 2(1+2+4+8) = 30$이고, 답은 ①이다.

[정답] ①

[2005년 11월 대수능 수리(나형) 29번]

29. $p \geq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) $a_{k+1} = a_k + 1$ ($1 \leq k \leq p-1$)
(다) $a_{k+p} = a_k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$)

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$
ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \frac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2021년 04월 교육청 수학 21번]

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

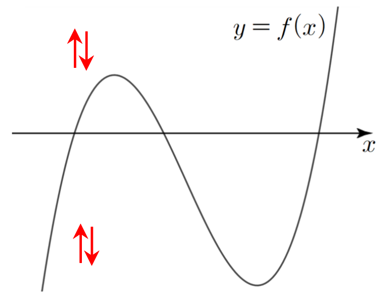
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

6. 기하적 관찰에 근거한 해법

우리는 **수학Ⅱ**에서 삼차방정식의 근의 공식을 배우지 않았으며, 설령 그것을 안다고 하더라도 변수 k로 인해 방정식의 근들이 변하여 필요 이상으로 복잡해지기 때문에 다른 해결방법을 모색해야 할 것이다.

한편, 방정식 $f(x) = 0$의 실근은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 일치한다는 것을 이용할 수 있다. 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는다고 하였으므로 아마도 다음과 같은 그래프로 나타날 것이다. 최고차항의 계수가 2임에 주의하여 그리자. 이때 y축은 크게 의미를 가지지 않으니 반드시 나타낼 필요가 없다.



$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$라 하면 $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$이다. 이때 k의 값의 변화는 $f(x)$의 그래프를 y축 방향으로 평행이동시킨다.

그리고 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 항상 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 음수임을 이용하면

$$f(-1)f(2) = (k+7)(k-20) < 0$$

으로 $-7 < k < 20$이고, 조건을 만족시키는 서로 다른 정수 k의 개수는 $20 - (-7) - 1 = 26$이다.

따라서 답은 ③ 이다.

[정답] ③

[2020년 12월 대수능 수학(나형) 25번]

25. 곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$과 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

7. 의도적으로 길이를 음수로 두는 경우가 있다?!

$\tan\theta - \dfrac{6}{\tan\theta} = 1$의 양변에 $\tan\theta$를 곱하여 정리하면

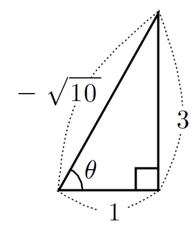
$\tan^2\theta - \tan\theta - 6 = (\tan\theta - 3)(\tan\theta + 2) = 0$으로

$\tan\theta = 3$ 또는 $\tan\theta = -2$이다.

그런데 $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\tan\theta > 0$이고,

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$임을 알 수 있다.

이를 나타내는 직각삼각형을 그려보면



사인, 코사인, 탄젠트 세 가지 삼각비 중에서 오직 탄젠트 값만 음수가 나오도록 하기 위해 빗변의 길이를 음수로 나타내어서 간편하게 나머지 삼각비들을 구할 수 있다.

그러면 $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$으로

$\sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{10}} = -\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$이다.

따라서 답은 ①이다.

[정답] ①

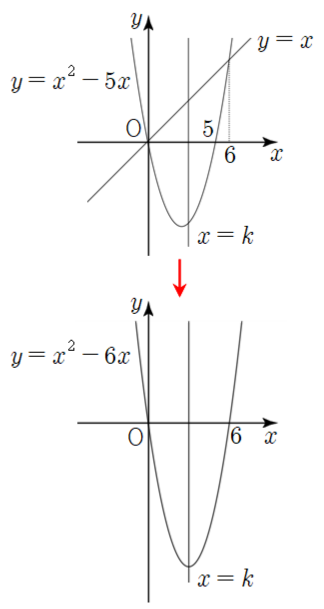
※ 편의상 삼각형의 길이를 음수로 나타낸 것이지, 실제로는 단위원 등을 통해서 나타내거나,

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cos\theta$와 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$을 연립하여 구할 수 있다.

하지만 시험이라는게, 제한된 시간 내에 빠르고 정확하게 문제를 해결해야 하므로 고득점을 노린다면 스킬적인 요소들도 두루 갖추고 있어야 할 것이다.

8. 카발리에리의 원리



따라서 $k = 3$임이 자명하고, 답은 ①이다.

[정답] ①

※ 딱히 계산이라 할 부분이 전혀 없는데, 실전에서

$$\int_0^k \{(x^2 - 5x) - x\}dx = \int_k^6 \{(x^2 - 5x) - x\}dx$$

를 하나하나 계산하고 있었다면 반성해야 한다.

9. 좌표평면에서 빗변이 품고 있는 삼각비

기울기가 2인 직선 $y = 2x + k$ 위에 있는 두 교점 P, Q에 대해 $\overline{PQ} = \sqrt{5}$가 성립한다고 하였으므로

$P(t,\ 2t + k)$, $Q(t + 1,\ 2t + k + 2)$라고 둘 수 있다.

P, Q의 y좌표는 t에 관한 일차식으로도 나타낼 수 있지만, 주어진 두 함수의 y좌표로도 표현할 수 있어서

$$2t + k = \left(\frac{2}{3}\right)^{t+3} + 1 \qquad \cdots\ (1)$$

$$2t + k + 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{t+2} + \frac{8}{3} \qquad \cdots\ (2)$$

이라 할 수 있고, 식 (1), (2)를 연립하면

$$2 = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{t+2} + \frac{8}{3}\right\} - \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{t+3} + 1\right\}$$

로 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{t+2} = 1$, 즉 $t = -2$임을 알 수 있다.

이를 다시 식 (1)에 대입하여 구해보면

$P\left(-2,\ \dfrac{5}{3}\right)$이고, $\dfrac{5}{3} = -4 + k$에서 $k = \dfrac{17}{3}$이다.

그래서 답은 ④이다.

[정답] ④

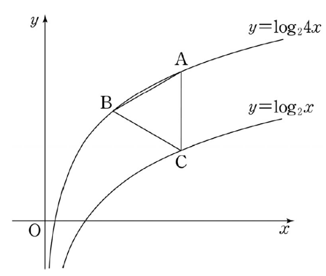
[2008년 경찰대 수리 19번]

19. 기울기가 -1인 직선 l이 곡선 $y = \log_2 x$와 만나는 점을 $A(a, b)$, 직선 l이 곡선 $y = \log_4(x + 2)$와 만나는 점을 $B(c, d)$라고 하자. (단, $1 < a < c$) $\overline{AB} = \sqrt{2}$일 때, $a + c$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[2010년 09월 평가원 수리(나형) 15번]

15. 함수 $y = \log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y = \log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]

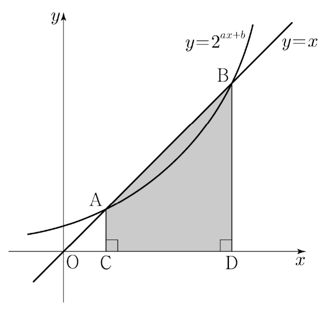


① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

[2020년 09월 평가원 수학(가형) 13번]

13. 곡선 $y = 2^{ax+b}$과 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$



※ 일반적으로 지수 · 로그 그래프와 직선의 교점은 근의 공식 등을 통해 구할 수는 없으나, 지금처럼 특수한 상황에서는 일부 정보를 이끌어 낼 수 있다. 그리고 출제자는 이를 즐겨 물어본다.

10. 수식 계산에만 눈이 어두워지진 않았는지

sol.1)

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서 그은 접선의 방정식은 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, 즉 $y = f'(0)x$이고,

곡선 $y = xf(x) = g(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 그은 접선의 방정식은 $y - g(1) = g'(1)(x - 1)$,

즉 $y = g'(1)(x - 1) + 2$이다. $g(x)$는 계산의 편의를 위해 잠시 도입했을 뿐, 있는 그대로 계산을 해도 상관없다.

그리고 이 접선은 공통접선으로 하나의 직선을 가리키므로

$f'(0) = g'(1) = f(1) + f'(1) = 2$임을 알 수 있고,

삼차함수 $f(x)$에 대해 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$를 이용하여 함수식을 찾을 수 있다.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(단, $a \neq 0$, a, b, c, d는 상수)

라고 하자. $d = 0$, $c = 2$임은 금방 알 수 있고,

$$f(1) = a + b + 2 = 2,\quad f'(1) = 3a + 2b + 2 = 0$$

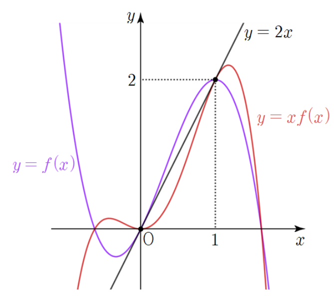
에서 $a = -2$, $b = 2$가 된다. 그래서

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x,$$

$$f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$$

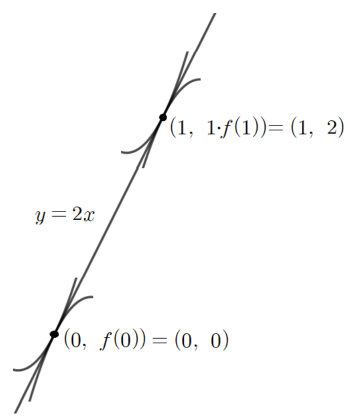
로 $f'(2) = -24 + 8 + 2 = -14$이다.

따라서 답은 ⑤이다.



sol.2)

주어진 접선은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 곡선 $y = xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 각각 접하므로 접선의 방정식은 다름 아닌 $y = 2x$임을 알 수 있다.



따라서 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$와 $f(1) = 2$,

$f(1) + f'(1) = 2$, 즉 $f'(1) = 0$를 이끌어낼 수 있다.

이번에는 인수 정리를 이용해서 삼차함수 $f(x)$의 식을 찾아보면 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$를 반영하여 곧바로

$$f(x) = x(ax^2 + bx + 2)$$

(단, $a \neq 0$이고, a, b는 상수)

라 둘 수 있다. 그리고 $f(1) = a + b + 2 = 2$에서

$a + b = 0$이고, 미분했을 때 식의 생김새를 고려하면서 기존 정보와 연립하면

$f'(1) = (a + b + 2) + (2a + b) = a + 2 = 0$에서

$a = -2$, $b = 2$임을 알 수 있다.

[정답] ⑤

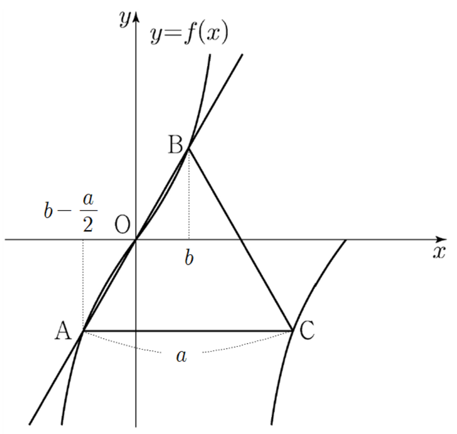
[2009년 06월 평가원 수리(가형) 4번]

4. 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y = x^3 + ax - 2$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

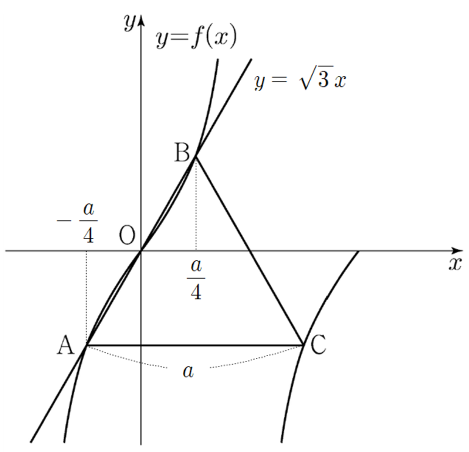
11. 주기성과 대칭성

주어진 조건에 의하면 선분 AC는 x축에 평행하며, 탄젠트 함수 $f(x)$의 주기성에 의하여 x좌표가 그 주기(period)인 $\dfrac{\pi}{\left|\dfrac{\pi}{a}\right|}=|a|=a$만큼 차이가 난다는 것을 알 수 있다. 그리고 정삼각형의 한 꼭짓점 B에서 선분 AC에 내린 수선은 선분 AC의 중점이 되므로 만약 점 B의 x좌표를 b라 두면 점 A의 x좌표는 $b-\dfrac{a}{2}$가 될 것이다.



한편, 직선 AB는 원점 O를 지나므로 원점 대칭이고, $f(x)$도 원점 대칭이므로 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$의 교점인 두 점 A, B도 원점 대칭 관계임을 알 수 있다.

그래서 $-b=b-\dfrac{a}{2}$로 $b=\dfrac{a}{4}$가 된다.



그리고 직선 AB의 방정식은 $\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$ 로부터 $y=\sqrt{3}x$라 세울 수 있으며, 직선 AB 위의 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)$라 둘 수 있게 된다.

이는 다시 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이기도 하므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\left(\frac{\pi}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{4}\right)=1$$

따라서 한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이고, 답은 ③이다.

[정답] ③

※ 해설하는 입장에서 이 문제에 대한 논리적 추론 과정을 생략한 채 $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)$라고 잡고 a의 값을 구하여 답만 바로 제시할 수도 있었다. 그리고 그렇게 편하게 설명하고 마는 경우가 대부분일 것이다.
하지만 여러분들은 필연성을 따라 출제자가 셋팅해 둔 주기성과 대칭성을 비약 없이 확인해보는 편이 실력 향상에 더 도움이 될 것이다.

[2020년 03월 교육청 수학(가형) 28번]

28. $0<a<\dfrac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a},\ \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

[2020년 07월 평가원 수학 8번]

8. 함수 $y=6\sin\dfrac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

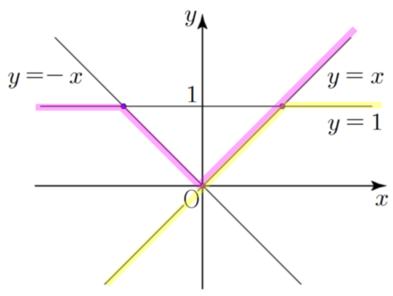
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

12. 살면서 환승 한 번 안 해 본 사람은 없겠죠?

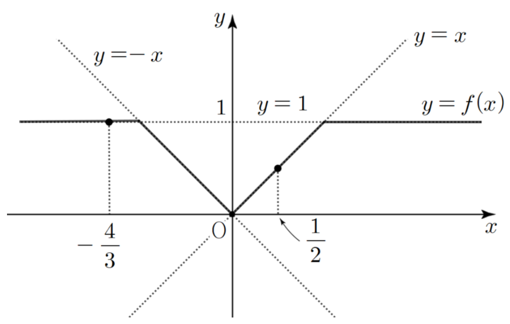
주어진 식을 인수분해하면

$\{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$

으로 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$임을 알 수 있다.



그런데 주어진 조건에 의하면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이라 하였으므로 적당한 경로를 택해 $f(x)$의 그래프를 머릿속으로 그려볼 수 있을 것이다. 그러면 각각의 직선 $y=1$, $y=x$, $y=-x$들의 교점인 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$에서만 다른 직선 경로를 따라 그릴 수 있을 것이다. 마치 환승 하듯이. 만약 $x\ne-1,\ 0,\ 1$에서 $f(x)$의 식이 바뀐다면 연속 조건에 어긋날 것이다.
이때 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 유일하게 결정된다.



그러므로 $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이며,

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$이고,

따라서 답은 ③이다.

[정답] ③

※ 출제자는 하나의 식으로 표현된 함수에 관해 물어볼 수도 있지만, 지금처럼 부분적으로 식이 다르게 정의된 함수에 관해서도 물어볼 수 있다. 이때는 구하고자 하는 함수의 개형이 유일할 수도 있고, 혹은 유일하지 않아서 특정 조건을 만족시키는 개형을 선택을 해야 할 수도 있다. 이렇듯 환승(transfer)이라는 개념은 생각보다 기출들에서 자주 등장한 소재이다. 만약 1등급의 실력에 도달했다면 이어지는 기출문제들을 보자마자 풀이까지 떠오를 것이다.

[2008년 06월 평가원 수리(가형) 10번]

10. 서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x\ge a)\end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f,\ g)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$이면 $N(f,\ g)=2$이다.
ㄴ. $N(f,\ g)=N(g,\ f)$
ㄷ. $h(x)=x^3$이면 $N(f,\ g)=N(h\circ f,\ h\circ g)$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2012년 11월 대수능 수리(가형) 21번]

21. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{1}{e}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　③ $\dfrac{e}{2}$　④ $\sqrt{e}$　⑤ e

[2015년 06월 평가원 수학(B형) 30번]

30. 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$의 최댓값은 $p+\dfrac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0)=1$이고 $f(8)\le 100$이다.
(나) $0\le k\le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
$f(k+t)=f(k)\ \ (0<t\le 1)$
또는
$f(k+t)=2^t\times f(k)\ \ (0<t\le 1)$
이다.
(다) 열린 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

[2015년 11월 대수능 수학(B형) 30번]

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2020년 09월 평가원 수학(나형) 20번]

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\ge g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{6}$　② $\dfrac{13}{3}$　③ $\dfrac{29}{6}$　④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{35}{6}$

[2020년 12월 대수능 수학(가형) 20번]

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
$\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1}x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$
이다.

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

오타/오류 제보 : ictteru_@naver.com

13. 그림이 아니라 수치가 진실을 말해주기 때문에

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-\log_2 a=\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)$이고, y절편은 $\log_2 a-\dfrac{a}{b-a}(\log_2 b-\log_2 a)$이다.

그런데 대칭성에 의하여, 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편은 2들을 4로 바꾼 $\log_4 a-\dfrac{a}{b-a}(\log_4 b-\log_4 a)$가 될 것이다!

못 미더우면 직접 계산을 해보면서 이러한 대수적인 구조를 확인해 보자. 한 번쯤은 해보는 것도 좋다.

따라서 두 직선의 y절편이 서로 같다고 식을 세워서 정리해보면

$$\log_2 a-\frac{a}{b-a}(\log_2 b-\log_2 a)$$

$$=\log_4 a-\frac{a}{b-a}(\log_4 b-\log_4 a)$$

$$\overset{\text{이항}}{\Rightarrow}\ \log_2 a-\log_4 a$$

$$=\frac{a}{b-a}(\log_2 b-\log_4 b-\log_2 a+\log_4 a)$$

$$\overset{\times 2}{\Rightarrow}\ \log_2 a=\frac{a}{b-a}(\log_2 b-\log_2 a)$$

$$\overset{\times(b-a)}{\Rightarrow}\ (b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$$

$$\overset{\text{정의}}{\Rightarrow}\ a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}\ \Rightarrow\ a^b=b^a$$

한편, $f(1)=a^b+b^a=40$이라 하였으므로

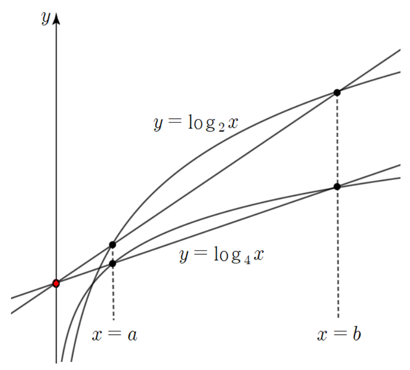
$a^b=b^a=20$이고,

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=20^2+20^2=800$

따라서 답은 ②가 된다.

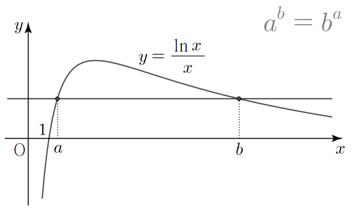
[정답] ②

※ 실전에서 그림을 정확히 그리기는 어려웠을 것이다. 사람 손으로 GeoGebra 마냥 그리는 것은 불가능하기 때문이다. 특히나 x축과 두 직선의 공통 y절편의 상대적인 위치 관계를 당장에 이끌어낼 수 없는데, x축은 과감하게 생략하면 된다. 실제로는 0이다.



그리고 이렇게 대략적인 개형을 확인하고서 계산을 묵묵히 해보면 답은 생각보다 쉽게 나올 것이다.

참고로 $a^b=b^a$를 보고 누군가는 $2^4=4^2$을 떠올릴 것이다. 더군다나 이 경우 $b=2a$의 관계가 성립하므로 답이 될 것 같지만 $2^4+4^2=32\neq 40=f(1)$이어서 $(a,\ b)\neq(2,\ 4)$여야만 한다. 실제로 근삿값을 구해보면 $(a,\ b)\fallingdotseq(1.5,\ 7.29)$이다. $a^b=b^a$만을 만족시키는 1보다 큰 서로 다른 두 실수 a, b는 무수히 많고, $a^b=b^a=20$까지 만족시키는 경우는 유일하다.



[2008년 06월 평가원 수리(가형) 17번]

17. 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $C(p,\ q)$, $D(r,\ s)$라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $p<-\dfrac{1}{3}$, $r>\dfrac{1}{2}$

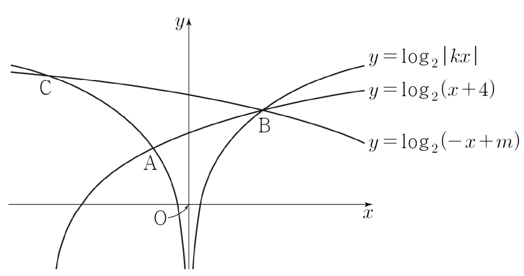
ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.

ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2021년 04월 교육청 수학 15번]

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2{}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그러나, 예고된 킬러

ㄱ. $\dfrac{d}{dt}x(t)=(x(t))'=v(t)$이므로

$\displaystyle\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0$이 성립한다.

따라서 ㄱ은 참.

ㄴ, ㄷ. $x(0)=x(1)=0$이고, $x(t)$는 미분가능한 함수이므로 롤의 정리에 의해 $x'(c)=v(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

그런데 $x(t)=0$인 t의 값 중 $-\dfrac{b}{a}$가 0과 1 사이에 있는지, 그렇지 않은지에 따라서 c의 개수는 1일 수도 있고, 2가 될 수도 있다. 삼차함수의 극점의 개수를 감안해보자. 여기서 가능한 모든 경우를 나열하여 따지려 하면 굉장히 복잡해진다.

예컨대 a, b 각각의 부호는 어떻게 되는지,

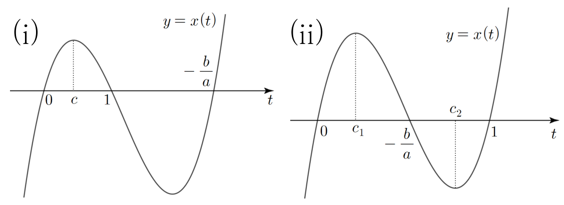
$-\dfrac{b}{a}$가 0 또는 1이 될 수는 없는지,

$-\dfrac{b}{a}$가 0보다 작은지, 0과 1 사이인지, 1보다 큰지.

아마 대부분 출제자의 의도대로 이러한 망설임을 겪게 될 것이다. 정말 세련된 문제이다.

그러나, 일반성을 잃지 않고 $a>0$, $-\dfrac{b}{a}$라 하자.

그리고 유의미한 몇 가지 경우, 즉 오직 두 경우만 따져도 충분하다. 실전에서 구사할 수 있을까 싶은 이러한 직관을 기르려면 많은 문제를 풀어 보는 수밖에.



ㄱ에서 확인한 $\displaystyle\int_0^1 v(t)dt=0$과 문제에서 주어진 $\displaystyle\int_0^1|v(t)|dt=2$를 활용하여 한 번에 접근해보자.

$0\le t\le 1$에서 $v(t)>0$인 t의 범위를 구간 I^+, $v(t)<0$인 t의 범위를 구간 I^-라 하자. 그러면

$\displaystyle\int_0^1|v(t)|dt=\int_{I^+}v(t)dt+\int_{I^-}(-v(t))dt=2$,

$\displaystyle\int_0^1 v(t)dt=\int_{I^+}v(t)dt+\int_{I^-}v(t)dt=0$에서

$\displaystyle\int_{I^+}v(t)dt=1$, $\displaystyle\int_{I^-}v(t)dt=-1$임을 알 수 있다.

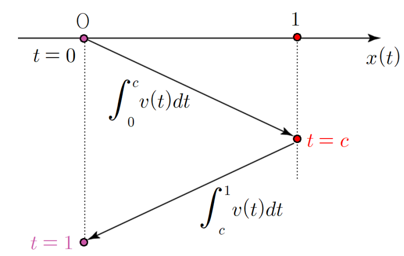
즉, 수직선 위의 원점 O에서 출발한 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 오른쪽으로 움직인 총거리는 1이고, 왼쪽으로 움직인 총거리도 1이라는 것이다.

복잡한 수식보다 이미지에 근거하여 판단해도 된다!

(i)의 경우, 즉 $0<1<-\dfrac{b}{a}$일 때

$\displaystyle 1=\int_{I^+}v(t)dt=\int_0^c v(t)dt=x(c)-x(0)=x(c)$

이므로 모든 $0\le t\le 1$에 대하여 $|x(t)|\le 1$이고, $x(t)=1\ (0\le t\le 1)$인 경우는 $t=c$일 때 뿐이다.

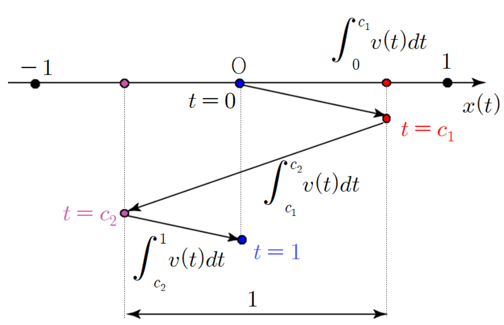


(ii)의 경우, 즉 $0<-\dfrac{b}{a}<1$일 때

$\displaystyle 1=\int_{I^+}v(t)dt=\int_0^{c_1}v(t)dt+\int_{c_2}^1 v(t)dt$

$\displaystyle -1=\int_{I^-}v(t)dt=\int_{c_1}^{c_2}v(t)dt=x(c_2)-x(c_1)$

이므로 $\displaystyle 0<\int_0^{c_1}v(t)dt<1$, $\displaystyle 0<\int_{c_2}^1 v(t)dt<1$



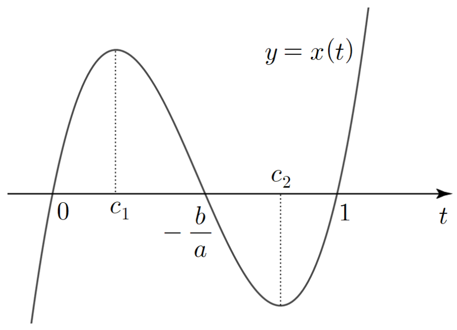
따라서 (i), (ii) 모두 $|x(t)|\le 1$이므로 ㄴ은 거짓.

ㄷ은 (ii)의 경우에 해당하며 참.

고로, 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

[정답] ③

※ (ii)에서 정의한 구간(interval) 표현을 엄밀하게 하자면 다음과 같다. 궁금하지 않으면 넘어가도 좋다.



$v(t)=(x(t))'=3a(t-c_1)(t-c_2)$에 대하여

$I_1=\{t\,|\,v(t)>0,\ 0\le t\le 1\}=(0,\ c_1)\cup(c_2,\ 1)$

$I_2=\{t\,|\,v(t)<0,\ 0\le t\le 1\}=(c_1,\ c_2)$

그리고 구간은 하나의 연결된 집합으로서

$[a,\ b]=\{x\,|\,a\le x\le b\}$,

$[a,\ b)=\{x\,|\,a\le x<b\}$,

$(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$,

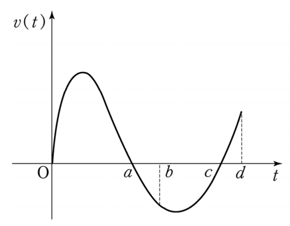
$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$

혹은 열린구간의 끝이 ∞나 $-\infty$인 경우 뿐이므로 I_1은 '구간'이 아니라 '구간들의 합집합' 표현이다.

또한 $\int_{c_1}^{c_2}v(t)dt$는 함수 $v(t)$가 구간 $[c_1,\ c_2]$에서 연속일 때 의미있지만, 구간 $(c_1,\ c_2)=I^-$에서 정의된 함수에 대해서 $\int_{I^-}v(t)dt=\int_{c_1}^{c_2}v(t)dt$라고 표현하여도 지금 상황에서는 크게 문제되지 않는다.

[2006년 11월 대수능 수리(가형) 8번]

8. 다음은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0\leqq t\leqq d)$에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다.



$\int_0^a|v(t)|dt=\int_a^d|v(t)|dt$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $0<a<b<c<d$이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지난다.

ㄴ. $\int_0^c v(t)\,dt=\int_c^d v(t)\,dt$

ㄷ. $\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^d|v(t)|\,dt$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2019년 09월 평가원 수학(나형) 21번]

21. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020년 07월 평가원 수학 14번]

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t\ge 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3,\infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0,\infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 어려운 문제일수록 꼼꼼하게 읽어야 한다

문제가 복잡하고 정신 없어 보이지만

'기껏해야 사인법칙, 코사인법칙에 원주각의 성질이나 피타고라스 정리 정도를 이용해서 접근하면 해결될 것이다!'

라는 믿음을 갖고 풀자. 더군다나 문제를 푸는데 필요한 보조선들은 전부 제시되어 있다.

두 삼각형 O_1O_2B와 O_2O_1D는 합동이므로 $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이고, 선분 AO_2는 원 C_1의 지름이므로 원주각의 성질에 의해

$\angle ABO_2=\frac{\pi}{2}$이다. 따라서 직각삼각형 ABO_2에 대하여 그 빗변의 길이는 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AO_2}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BO_2}^2}=\sqrt{k^2+8k^2}=3k$$

로 $\boxed{f(k)=3k}$임을 알 수 있다.

한편, 원주각과 중심각의 관계에 의해

$$\angle BO_1A=\theta_1,\ \angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$$

이고, 직각삼각형 AO_2B에서의 삼각비로서

$$\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{\overline{BO_2}}{\overline{AO_2}}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}=p}$$

그리고 $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$를 포함하는 삼각형 BCO_2에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{BC}^2=\overline{BO_2}^2+\overline{O_2C}^2-2\cdot\overline{BO_2}\cdot\overline{O_2C}\cdot\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$\Rightarrow k^2=8k^2+\{g(k)\}^2-2\cdot 2\sqrt{2}k\cdot g(k)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \{g(k)\}^2-\frac{16}{3}kg(k)+7k^2=0$$

$$\Rightarrow \{g(k)-3k\}\left\{g(k)-\frac{7}{3}k\right\}=0$$

에서 $g(k)=3k$ 또는 $\frac{7}{3}k$이다. 이때 원 C_1의 지름의 길이가 $\overline{AO_2}=3k$이니 현의 길이로서

$g(k)=\overline{O_2C}<3k$인 $\boxed{g(k)=\frac{7}{3}k}$만 유의미하다.

$f(k)\times g(k)=3k\times\frac{7}{3}k=7k^2$이므로

$f(p)\times g(p)=7p^2=7\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{56}{9}$이다.

따라서 답은 ②이다.

[정답] ②

※ 빈칸 문제는 2009년 무렵부터 평가원이 즐겨 내던 형식인데, 몇 해 전까지만 하더라도 줄곧 **확률과 통계**에서 빈칸 문제가 나왔었다. 그런데 2015 개정 교육과정에 맞춰 수능 선택과목이 조정되면서 **확률과 통계** 문제로는 빈칸이 나오기 어려워졌다. 마침 2020년 07월에 공개한 평가원 예시문항에서는 빈칸 문제로 훨씬 더 예전 유형이었던 수열에 대한 일반항을 구하는 것이 나왔으나, 막상 올해 06월 평가원과 09월 평가원에서는 빈칸 문제가 출제되지 않았다. 이로 인해 수능에 빈칸 문제가 나오지 않을 것이라고, 그리고 그랬으면 좋겠다고 안일하게 생각했다면 이 문제를 보고 실전에서 당황했을 것이다.

시행	빈칸 문제 출제	소재
2020년 07월 평가원	O	수열
2021년 03월 교육청	O	수열
2021년 04월 교육청	O	수열
2021년 06월 평가원	X	
2021년 07월 교육청	O	수열
2021년 07월 사관학교	O	삼각함수
2021년 07월 경찰대	X	
2021년 09월 평가원	X	
2021년 10월 교육청	O	수열
2021년 11월 대수능	O	삼각함수

2023학년도 수능 대비에 있어서도 당해에 시행할 평가원 모의고사 유형을 너무 맹신해선 안 되고, 사관학교 문제가 수능 적중률이 엄청나다는 것도 아니며, 다양한 가능성을 열어 둔 채, 편식없이 폭넓게 공부해야만 대비할 수 있을 것이다.

16. 15번 풀기 전에 16, 17번 먼저 푸는 사람?

$$\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}=\log_2 120-\log_2 15$$

$$=\log_2\frac{120}{15}=\log_2 8=3$$

[정답] 3

※ 시험지의 6페이지에는 15, 16, 17번이 제시된다. 그런데 15번은 공통과목 객관식 최고난이도 문제일 가능성이 높기 때문에 보자말자 풀기가 어려울 것이다. 이때, 그 옆에 있는 16번과 17번은 아주 기본적인 수준의 주관식 문제이므로 이들을 먼저 푸는 것이 15번을 바로 풀려는 것보다 심리적으로 안정감을 줄 것이다. 15번 한 문제는 4점인데, 16, 17번은 합해서 총 6점이니까. 그렇게 16, 17번을 먼저 풀었는데 15번이 생각대로 잘 풀리지 않는다면 일단 그 다음 문제로 넘어가는 것도 좋다. 흐름을 끊는 문제가 나왔을 때 마냥 붙잡고 있는 것보다, 차라리 흐름을 유지하도록 더 쉬운 문제들을 우선적으로 풀어서 머릿속을 환기한 다음, 다시 15번에 도전했을 때 아이디어가 번뜩이는 경우도 있기 때문이다. 실제로 수능 수학을 만점 받는 학생들 중 1번부터 30번까지 단순에 풀어내는 경우보다, 막히는 문제는 잠시 건너뛰고 몇 번씩이나 왔다 갔다 시험지를 넘기다 시간 내에 킬러 문제를 간신히 풀어내는 사례도 적지 않다.

17. 이 문제 틀리는 법 알려주세요

$f(x)=x^3+x^2+2$이고, 따라서 $f(1)=4$이다.

[정답] 4

18. 시그마 기호에 대한 이해

시그마의 위끝을 맞춰주기 위해

$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{7} a_k + a_8$로 툭 떼어내어 생각하면

$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 100 + a_8$이고,

한 번 더 양변을 2로 나눠주면

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 50 + \frac{a_8}{2}$이다.

이를 $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56$과 연립해보면

$50 + \frac{a_8}{2} = 56$으로 $a_8 = 12$이다.

[정답] 12

[2021년 11월 고2 교육청 수학 19번]

19. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right)a_k = n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구하는 과정이다.

$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right)a_k$라 하자.

(i) $T_1 = 1$이므로 $a_1 = \boxed{\text{(가)}}$이다.

(ii) 2 이상의 자연수 n에 대하여

$T_n = n^2$에서

$T_n - T_{n-1} = 2n - 1$이고

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} - \frac{1}{\boxed{\text{(나)}}} \times \sum_{k=1}^{n} a_k$에서

$T_n - T_{n-1} = \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} \times \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n-1) \times \left(\boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n-1) \times \left(\boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

(가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(2p) \times g(3p)$의 값은? [4점]

① 190 ② 200 ③ 210 ④ 220 ⑤ 230

19. 깜짝 퀴즈 하나!

삼차함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$

이고, 실수 전체의 집합에서 삼차함수 $f(x)$가

증가하려면 $f'(x) \geq 0$이 성립해야 한다.

따라서 $D/4 = a^2 + 3(a^2 - 8a) = 4a(a-6) \leq 0$으로

실수 a의 최댓값은 6이다.

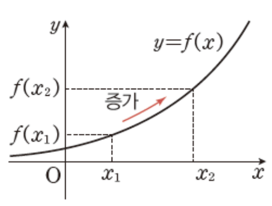
[정답] 6

※ **수학Ⅱ**에서도 증가/감소함수 개념은 다항함수의 미분법 중 '도함수의 활용' 부분에서 제법 뒤에 다룬다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

그러므로 상수함수는 증가함수가 될 수 없고,

$y = -\frac{1}{x}$는 증가함수로 볼 수 있는 것이다.



한편, 함수의 증가/감소를 도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법을 생각할 수 있다.

함수 $f(x)$가 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이라고 하자.

구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때,

닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c) > 0$이고 $x_2 - x_1 > 0$이므로

$f(x_2) - f(x_1) > 0$이다.

즉, $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 증가한다.

이상을 정리하면 다음과 같다. 전부 교과서 내용을 ctrl+c, ctrl+v 한 것에 불과하니 의심 없이 받아들여도 된다.

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고,
이 구간에 속하는 모든 x에 대하여
$f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

그렇다면 여기서 질문!

모든 실수 x에 대하여

$f'(x) > 0$이 성립해야 하고,

$D/4 = 4a(a-6) < 0$으로

$0 < a < 6$이기 때문에,

조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은

존재하지 않으니

문제가 잘못된 것이 아닐까?

이에 대한 이유는,

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고,
이 구간에 속하는 모든 x에 대하여
$f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

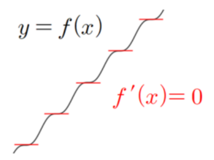
의 역이 성립하지 않기 때문이다.

되짚어보면 증가함수의 '정의'에 함수의 미분가능성 여부는 포함되어 있지 않다. 그렇기에 미분불가능한, 심지어 불연속 함수라 하더라도 증가함수가 될 수 있다. 그런데 **수학Ⅱ**에서 미분법을 배우기 때문에 미분과 연관지어 함수의 증가/감소를 따지게 되고, 증가함수를 판별하는 충분조건으로서 미분가능한 함수로 범주를 축소하여 '도함수의 부호가 0보다 크다'고 볼 수 있는 것이다. 증명은 평균값 정리에 의해.

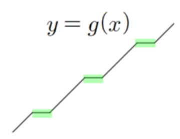
하지만 우리는 함수의 증가/감소에 대한 필요충분조건으로서 접근해야 하며, 개념의 빈 자리는 '도함숫값이 0인 순간이 있음에도 불구하고 증가함수가 되는 상황'이 차지하고 있다.

예컨대 $y = x^3$처럼.

요약하자면, 원래 증가함수의 정의에 있어서 그 함수가 미분가능해야 할 필요가 없으나, 미분가능한 함수로 한정하면 증가함수 여부를 따질 때 도함수의 부호로 파악할 수 있다. 그리고 순간적으로 도함수가 0이 되는 $y = x^3$과 같은 경우는 $y' = 3x^2 \geq 0$임에도 증가함수로 인정한다. 도함수가 순간적으로 0이 되어도 상관없다는 것이다. 하지만 상수함수와 같이 특정 구간에서 도함수가 계속 0이어서 상수인 구간을 포함한다면 증가함수로 볼 수 없다.



증가함수 O



증가함수 X

그리고 수능 문제로 직전에 보았던 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$은 실수 전체의 집합에서 기껏해야 두 번 $f'(x) = 0$이 되기 때문에 그러한 순간까지 증가하는 상황에 포함시켜서 $f'(x) \geq 0$인 a의 범위를 찾아주는 것이 맞다.

나아가, 훗날에 상수함수가 아닌 어떤 미분가능한 함수 $g(x)$가 감소함수가 되게 하는 상황을 찾아야 한다면 $g'(x) \leq 0$이라는 부등식을 해결해야 할 것이다.

[2011년 06월 평가원 수리(나형) 15번]

15. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[2013년 09월 평가원 수학(A형) 21번]

21. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$$

이다. 함수 $y = f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여, $a^2 + b^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M + m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

20. 한 칸씩 밀어내기

(가) 조건은 닫힌구간 $[0,\ 1]$에 한정하여 $f(x)$를 정의하고 있는데, (나) 조건은 이를 확장시켜준다. 즉,

$$f(x+1)=xf(x)+ax+b$$

는 0 이상의 모든 실수 x에 관하여 항상 성립하는 식이다. 특히나 $0 \le x \le 1$로 한정하면 $f(x)=x$이므로 이를 우변에 적용하면

$$f(x+1)=x^2+ax+b \quad (0 \le x \le 1)$$

임을 알 수 있다. $x+1=t$로 치환하면

$$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+b \quad (1 \le t \le 2)$$

가 되고, 편의상 t를 다시 x로 바꿔서 표현하면

$$f(x)=(x-1)^2+a(x-1)+b \quad (1 \le x \le 2)$$

임을 알 수 있다. 그리고 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수라고 하였으므로 함수식이 달라지는 지점인 $x=1$에서도 미분가능하다.

$$f(x)=\begin{cases} \quad\vdots & \\ x & (0 \le x \le 1) \\ (x-1)^2+a(x-1)+b & (1 \le x \le 2) \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

로 보았을 때 함숫값의 관점에서 $1=b$이고, 미분계수의 관점에서 $1=a$임을 알 수 있다. 따라서

$$f(x)=(x-1)^2+(x-1)+1 \quad (1 \le x \le 2)$$

이므로

$$60 \times \int_1^2 f(x)dx = 60 \times \int_0^1 f(x+1)dx$$

$$= 60 \times \int_0^1 (x^2+x+1)dx = 60 \times \frac{11}{6} = 110$$

이며, 답은 110이다.

[정답] 110

[2014년 07월 교육청 수학(B형) 29번]

29. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)\,dx=50$, $\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=2$

$\int_{-3}^{3}x^2f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[2020년 07월 교육청 수학(나형) 19번]

19. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
(나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.
(다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x \ge 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치할 때, $\int_1^{11}f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

21. '눈치'도 수학인가요??

(가), (나) 조건을 이용하여 먼저 수열 $\{|a_n|\}$의 초반 10개 항들을 나열하면 다음과 같다.

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024$$

제11항 이후는 중요치 않다.

그리고 이때, 다소 뜬금없지만

$$2+4<8$$
$$2+4+8<16$$
$$2+4+8+16<32$$
$$\vdots$$
$$2+4+8+16+32+\cdots+512<1024$$

임을 파악해야 한다. 아니면

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$$

라는 등비수열의 합 관계를 떠올릴 수도 있다.

수열 $\{|a_n|\}$과 $\{a_n\}$은 항들에 절댓값을 취한 것에 불과하므로 실제 각 항들의 부호를 고려한 수열 $\{a_n\}$에 대하여 (다) 조건인 $\sum_{n=1}^{10}a_n=-14$를 만족하려면 양수인 항들과 음수인 항들의 총합이 적당히 비슷해야 할 것이다. 만약 a_{10}만 음수이고, 그 이전 항들은 모두 양수라고 가정하면

$$(2+4+8+16+\cdots+512)-1024=-2$$

이므로 (다) 조건을 만족시키기 위해 몇몇 항들의 부호를 고정해 주어야 할 것이다.

	양수인 항들	음수인 항들
	2, 4, 8, 16, ⋯ , 512	-1024
합	1022	-1024

만약 양수인 항인 k가 $-k$로 바뀐다면
양수인 항들의 합은 $1022-k$가 되고,
음수인 항들의 합은 $-1024-k$가 되어서
$(1022-k)+(-1024-k)=-2-2k$이고,
$\sum_{n=1}^{10}a_n=-14$를 만족시키기 위해

$$-2-2k=-14 \quad \Rightarrow \quad k=6$$

이 되어야 할 것이다. 하지만 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 2^n 또는 -2^n 뿐이므로 $k=6$을 $2+4$로서 만들어 줄 수 있다! 그러면 다음과 같이 수치가 조절되어서

	양수인 항들	음수인 항들
	$\cancel{2}$, $\cancel{4}$, 8, 16, ⋯ , 512	-2, -4, -1024
합	$1022-6=1016$	$-1024-6=-1030$

(다) 조건인 $\sum_{n=1}^{10}a_n=-14$를 만족시키게 된다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은

$$\{a_n\} : -2,\ -4,\ 8,\ 16,\ 32,$$
$$64,\ 128,\ 256,\ 512,\ -1024$$

이며, 답은

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$$
$$=(-2)+8+32+128+512=678$$

임을 알 수 있다.

[정답] 678

※ 이 정도면 수열 킬러 대비로 시중에 나와 있는 각종 n제나 모의고사 문제를 푸는 것이 무색할 만큼 실제 수능에서는 상당히 쉽게 나온 것으로 볼 수 있다. 그렇다고 다양한 문제들을 많이 푸는 학습 방식을 부정하는 것은 결코 아니다. 직관적으로 2의 거듭제곱 수들의 합에 대한 관계를 인지하기를 요구하긴 하지만, 21번급 난이도의 문제를 맞출 학생이라면 이러한 감각은 충분히 갖추고 있으리라 본다.

대부분 고난이도 문항을 풀 때에는 계산만 직진하듯 밀어 붙여서 답이 뚝딱 나오는 경우가 굉장히 드물다. 그러니 문제에 마주하게 되면 비슷한 문제들을 풀어본 적은 없는지, 특정 조건을 완화하여 파악할 수는 없는지 등등 여러 문제해결 전략을 통해 풀어야 한다.

지금 문제에서는 부호가 전부 양수인 수열 $\{|a_n|\}$을 나열해보고, 합에 대한 귀납적 관찰을 토대로 조건을 만족하도록 수치를 조절한 것이 핵심 전략에 해당한다.

[2019년 11월 대수능 수학(나형) 21번]

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63}a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

[2020년 07월 평가원 수학 15번]

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$ 이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

[2021년 04월 교육청 수학 21번]

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \ge 0) \\ a_n+5 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

[2021년 09월 평가원 수학 15번]

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

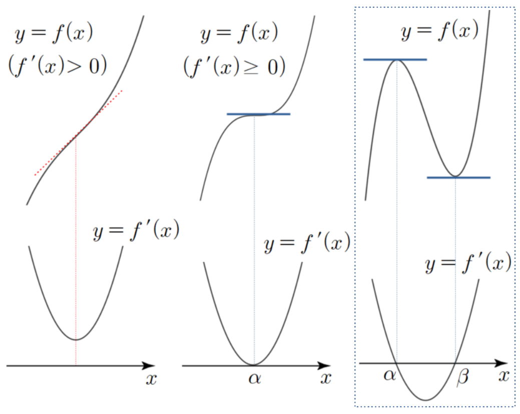
을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

오타/오류 제보 : ictteru_@naver.com

22. 실수의 조밀성 : 임의의 서로 다른 두 실수 사이에는 항상 다른 실수가 존재한다

삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0, 1, 2만이 가능하다.



그리고 t의 값에 따라 움직이는 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$로 한정하여도 $g(t)$는 0, 1, 2의 값만 취할 수 있다. 그런데 반드시 $g(t)=2$인 어떤 t가 존재해야 하는 것은 아니지만, (나) 조건으로 미루어 보아 $g(t)=2$인 어떤 실수 t가 $f(1)$이나 $f(4)$로서 존재한다. 그러므로 서로 다른 두 개의 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$만으로 가능성을 좁혀도 충분하다.

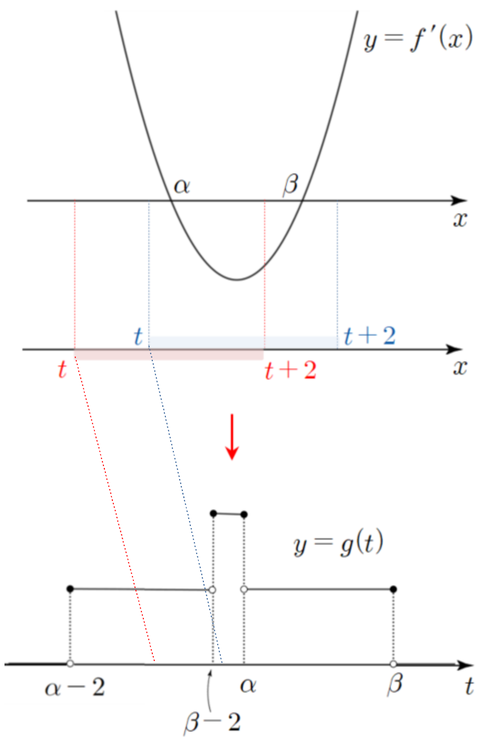
$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\cdots$ 이므로

$$\boxed{f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\ \ (\alpha<\beta)}$$

라 둘 수 있다. 이때, 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차이인 $\beta-\alpha$와 관찰하는 닫힌구간의 길이인 2와의 대소관계를 파악해야 한다.

$t=\alpha$ 또는 β인 경우와 $t+2=\alpha$ 또는 β인 상황을 기준으로 하여 구간 $[t,\ t+2]$를 움직여보자.

(i) $\beta-\alpha<2$일 때

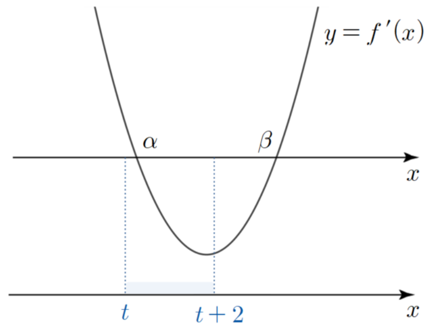


그러면 구간 $[\beta-2,\ \alpha]$에서의 실수의 조밀성에 의해 $\beta-2<a<\alpha$인 무수히 많은 a에 대하여

$$\lim_{t\to a-}g(t)=g(a)=\lim_{t\to a+}g(t)=2$$

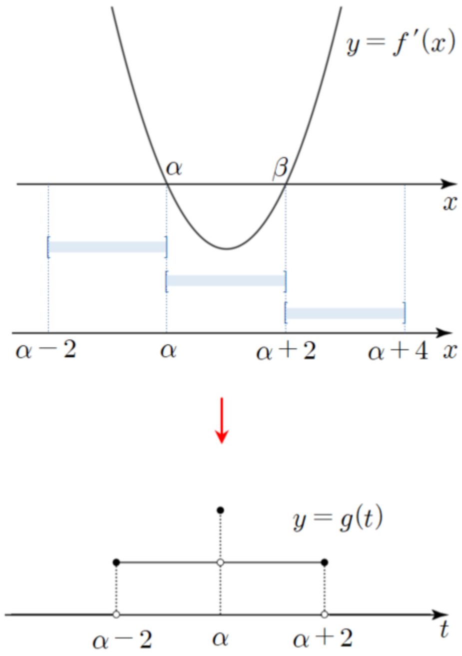
이므로 $\displaystyle\lim_{t\to a+}g(t)+\lim_{t\to a-}g(t)=4>2$가 되어서 (가) 조건에 위배된다. 그리고 이로부터 $\beta-\alpha\geq 2$여야 함을 알 수 있다.

(ii) $\beta-\alpha>2$



하지만 이 경우 굳이 $g(t)$의 그래프를 세세하게 따지지 않더라도 $g(t)=2$인 t가 존재하지 않아서 (나) 조건에 모순임을 알 수 있다. 결국 $\beta-\alpha=2$여야만 한다. 일어날 일은 일어나게 되어 있다.

(iii) $\beta-\alpha=2$



이때는 $t=\alpha$라 할지라도

$\displaystyle\lim_{t\to\alpha+}g(t)=\lim_{t\to\alpha-}g(t)=1$이기 때문에 (가) 조건을 만족시키고, (나) 조건 역시 만족시키게 된다.

계속해서 논리를 이어가면, $g(t)=2$인 t의 값은 α가 유일하므로 (나) 조건에서 $f(1)=f(4)=\alpha$라는 것과, $\alpha-2\leq f(0)\leq\alpha+2,\ f(0)\neq\alpha$임을 알 수 있다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$이고, $x=\alpha,\ \beta$에서 극값을 갖는 삼차함수이므로 인수정리에 의해

$$f(x)-\alpha=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)(x-k)\ \ (k\text{는 상수})$$

라는 것, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0\ (\beta=\alpha+2)$임을 이용할 수 있다.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{(x-1)(x-4)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-4)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{3x^2-2(5+k)x+4+5k\}$$

에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \alpha+2$이므로 근과 계수의 관계를 적용하면 계산이 조금 있다.

$$2\alpha+2=\frac{2}{3}(5+k),\ \ \alpha^2+2\alpha=\frac{4+5k}{3}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{5+k}{3}\right)^2=(\alpha+1)^2=\frac{7+5k}{3}$$

$$\Rightarrow\ (5+k)^2=3(7+5k)$$

$$\Rightarrow\ k^2-5k+4=(k-1)(k-4)=0$$

따라서 $\boxed{k=1\text{이면 }\alpha=1}$이고, $\boxed{k=4\text{이면 }\alpha=2}$가 된다. 그리고 이들을 판별하기 위해서 아직까지 쓰지 않은 조건인 $f(0)=\alpha-2k$의 범위 $\alpha-2\leq f(0)\leq\alpha+2,\ f(0)\neq\alpha$를 이용할 수 있다. 평가원 문제에서 의미 없이 주어진 조건은 없다.

$\alpha=2$이면 $0\leq f(0)=-6\leq 4$가 되어 모순이지만, $\alpha=1$이면 $-1\leq f(0)=-1\leq 3$으로 (나) 조건을 마저 만족시키게 된다. 따라서

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$$

로 $f(5)=8+1=9$가 답이 된다.

[정답] 9

[2010년 09월 포카칩 수리(가형) 9번]

9. 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\lim_{x\to t+0}\{f(x)-f(2t-x)\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}x^2+a & (x\geqq 1)\\ 3x-a & (x<1)\end{cases}$이고 $g(1)=0$이면 $a=1$이다.

ㄴ. $g(1)=0$이면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $g(0)+g(1)=0$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)$이면 $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 8번]

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<-1)\\ 0 & (x=-1)\\ x^2 & (-1<x<1)\\ x-2 & (x\geqq 1)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

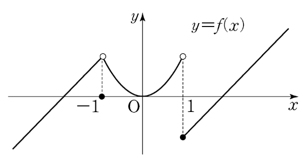
<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[2020년 07월 교육청 수학(나형) 30번]

30. $t\geq 6-3\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+tx & (x<0)\\ -3x^2+tx & (x\geq 0)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다.
(나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\displaystyle\int_2^4\{6g(t)-3\}^2dt$의 값을 구하시오. [4점]