`2010학년도 수학능력시험 수리 ‘가’ 형 해설

1. $27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[교과개념] 지수법칙 / 로그의 성질

(1) 지수법칙

$a>0,\ b>0$이고 $m,\ n$이 자연수일 때,

① $a^0=1,\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (정수 지수의 정의)

② $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ (유리수 지수의 정의)

$a>0,\ b>0$이고 $p,\ q$가 실수일 때,

③ $a^p a^q=a^{p+q}$ ④ $a^p\div a^q=a^{p-q}$

⑤ $(a^p)^q=a^{pq}$ ⑥ $(ab)^p=a^p b^p$

(2) 로그의 성질

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$이고,
k가 임의의 실수일 때

① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$

로그의 성질은 다 증명할 수 있어야 해.
교과서의 증명과정을 보면 다 지수법칙임을 알 수 있어. (교과서의 설명 참고)

[행동영역] 간단한 계산

[풀이]

$$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4=(3^3)^{\frac{1}{3}}+\log_2 2^2$$
$$=3^{3\times\frac{1}{3}}+2\log_2 2$$
$$=3+2$$
$$=5$$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB+2B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

[교과개념] 행렬_행렬 연산의 성질

(1) 행렬 곱셈의 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A,B,C에 대하여

① $(AB)C=A(BC)$ (결합법칙)

② $A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$ (분배법칙)

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단, k는 실수)

④ $AE=EA=A$ (단, E는 단위행렬)

$AE=EA=A$
을 만족하는 행렬을 단위행렬이라고 해.
이는 행렬 곱셈의 항등원을 의미하고 있어.
실수에서 1 의 역할을 하고 있는 거지.

[행동영역] 간단한 계산

[풀이]

$A=3E$이므로
$$AB=(3E)B=3(EB)=3B$$
이다. 따라서
$$AB+2B=3B+2B=5B$$
이므로
$$5B=5\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&5\\5&5\end{pmatrix}$$
이다. 따라서 모든 성분의 합은
$$(-5)+5+5+5=10$$

3. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

[교과개념] 함수의 극한 : 극한에 관한 성질
[행동영역] 전형적인 풀이 (교과서 예제 수준)
2010학년도 9월 모의 평가 2번 해설 참고

[풀이]

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$ ··············· ㉠에서

함수의 극한에 관한 성질을 이용하여

$\lim_{x \to 3} (\sqrt{x+a}-b)$의 값을 구해보면

$$\lim_{x \to 3} (\sqrt{x+a}-b) = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} \times (x-3)$$

$$= \frac{1}{4} \times 0 = 0$$

$\therefore \lim_{x \to 3} (\sqrt{x+a}-b) = 0$

$y = \sqrt{x+a}-b$는 구간 $[-a, \infty)$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 3} (\sqrt{x+a}-b) = \sqrt{3+a}-b = 0$

$\therefore b = \sqrt{3+a}$ ····················· ㉡

㉡식을 ㉠식에 대입하면

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$$

분모가 0에 수렴하는 무리식의 극한은 유리화

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+a)-(3+a)}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3+a})}$$

분모가 0이 아닌 극한값을 갖도록 식을 변형
⇨ 약분!

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3+a}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

㉠ 식에서 극한값이 $\frac{1}{4}$

$\therefore 2\sqrt{3+a} = 4$, $a = 1$ ········· ㉢

㉢식을 ㉡식에 대입하면

$b = 2$

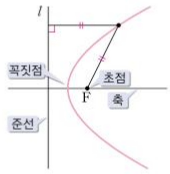
4. 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}} = 4\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

① 21 ② 32 ③ 45 ④ 60 ⑤ 77

[교과개념] 이차곡선 - 포물선 / 포물선의 접선

(1) 포물선의 정의

평면 위에서 한 정직선 l과 그 위에 있지 않은 정점 F에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라고 한다. 이때, 정직선 l을 포물선의 준선, 정점 F를 포물선의 초점이라고 한다.



0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p, 0)$을 초점으로 하고, 직선 $x = -p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

포물선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 직선 $x = -p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의로부터

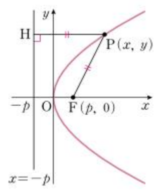
$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$

이므로

$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$

양변을 제곱하여 정리하면

$y^2 = 4px$



이상을 정리하면 다음과 같다.

- 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$, 준선이 $x = -p$인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \text{ (단, } p \neq 0)$$

[보기]

① 초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$, 준선이 $x = -2$인 포물선의 방정식은

$y^2 = 4px$에서 $p = 2$ $\therefore y^2 = 8x$

② $y^2 = -8x$의 초점 F의 좌표와 준선의 방정식은

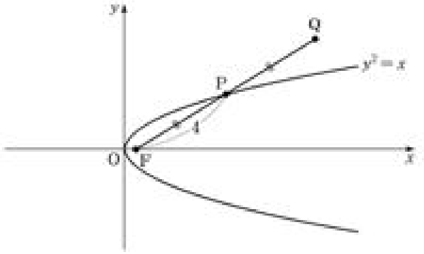
$y^2 = 4(-2)x$에서 $p = 2$

$\therefore \mathrm{F}(-2, 0)$, $x = 2$

이차곡선에 관한 수능, 평가원 모의 기출문제들을 보면 그림과 같이 등장하는데 그림을 정확하게 해석하기 위해서 이차곡선의 정의를 그림과 같이 기억해 두어야 해.
예를 들어 '2007학년도 수능 가형 5번' 문제를 보면

[2007학년도 수능 가형 5번]

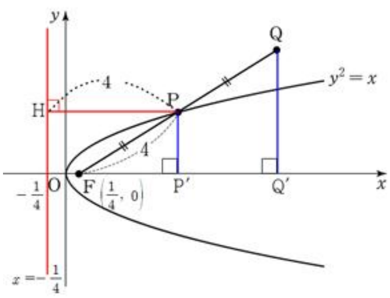
초점이 F인 포물선 $y^2=x$ 위에 $\overline{\mathrm{FP}}=4$인 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x좌표는? [3점]



$y=4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)x,\quad p=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$, $x=-\dfrac{1}{4}$인 포물선이다.

자, 그럼 이제 '포물선의 정의'를 그림으로 표시해보자.



위 그림에서 빨간색 선이 '포물선의 정의'를 그림으로 표시한 거야. 점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′라 하면 P′의 좌표는 $\left(\dfrac{15}{4},\ 0\right)$임을 알 수 있어. 왜? $\overline{\mathrm{PH}}=4$ 이니까. $-\dfrac{1}{4}$에서 오른쪽으로 4만큼 이동하게 되면 $\dfrac{15}{4}$가 되지.

또한 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이고 $\overline{\mathrm{PP'}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{QQ'}}$이므로 점 P′는 $\overline{\mathrm{FQ'}}$의 중점이야. 따라서 Q′의 x좌표를 α라 하면

$$\frac{\frac{1}{4}+\alpha}{2}=\frac{15}{4}$$

가 성립하므로

$$\alpha=\frac{29}{4}$$

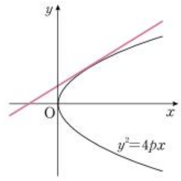
가 돼.

'포물선의 정의'를 그림으로 표시하니까 어떻게 문제를 풀지 보이잖아. 그러므로 포물선뿐만 아니라 이차곡선의 정의들은 그림과 같이 기억해 두도록. 기억해야 할 그림은 교과서에 있다.

(2) 포물선의 접선의 방정식

① 접선의 기울기가 m $(m\neq 0)$일 때

이 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 두 식 $y^2=4px$와 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 x에 대한 이차방정식



$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이 중근을 가져야 한다.

식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$$D=16p(p-mn)=0$$

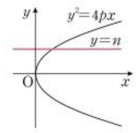
$$\therefore\ n=\frac{p}{m}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

이다.

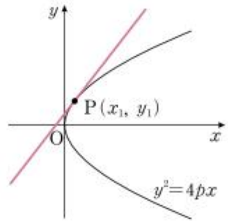
직선 $y=mx+n$에서 $m=0$이면 포물선과의 교점은 1개이지만 접선은 아니다.



② 접점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때

포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서

i) $x_1\neq 0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은



$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

또, 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots \ ㉡ \text{ (위 ①에서)}$$

이므로 ㉠과 ㉡에서

$$x_1m^2-y_1m+p=0$$

$y_1=4px_1$이므로

$$m=\frac{y_1\pm\sqrt{(-y_1)^2-4px_1}}{2x_1}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}\text{이다.}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이다.

ii) $x_1=0$일 때, $y_1=0$이므로 접선의 방정식은 $x=0$이고, 이 경우에도

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이 성립한다.

[음함수미분법을 이용하는 경우]

포물선 $y^2 = 4px$에서 음함수미분법을 이용하면

$$2y\,dy = 4p\,dx, \;\therefore\; \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$$

따라서 $y^2 = 4px$위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 접선의 기울기는

$$\frac{2p}{y_1}$$

이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1 y - y_1^2 = 2px - 2px_1 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; ㉠$$

$(x_1,\ y_1)$은 $y^2 = 4px$위의 점이므로

$$y_1^2 = 4px_1 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; ㉡$$

㉡식을 ㉠식에 대입하면

$$y_1 y - 4px_1 = 2px - 2px_1$$

$$\therefore\; y_1 y = 2px + 2px_1$$

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

이다.

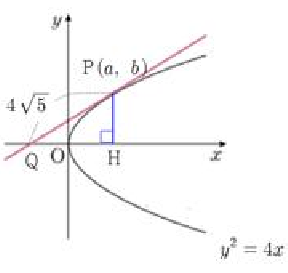
③ 포물선 밖의 한 점이 주어졌을 때
- 기울기를 가정할 경우 ①번 공식 이용
- 접점을 찾을 경우 ②번 공식 이용

접선의 방정식은 모두 세 종류
- 기울기를 알 때,
- 접점을 알 때,
- 곡선 밖의 한 점을 알 때

이 세 가지 경우에 대하여 교과서, 익힘책의 문제들을 점검해주길 바라.

[행동영역] 포물선의 접선의 방정식과 $\overline{\mathrm{PQ}} = 4\sqrt{5}$를 이용하여 $a,\ b$의 값 계산

문제를 어떻게 해결할지를 고민할 때에는 그림과 같이 생각하는 것이 좋아.



위 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PQH는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{QH}}$의 길이만 알면 피타고라스의 정리를 사용할 수 가 있어. Q의 x좌표만 되겠군. 어떻게? 포물선 위의 점 P라 주어져 있으니까 포물선의 접선의 방정식 ②번을 이용하면 Q의 좌표를 구할 수 있겠네.

[풀이]

포물선 $y = 4 \cdot 1 \cdot x$이므로 $p = 1$

또한 포물선 $y = 4px$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $by = 2p(x + a)$ 이므로

$y^2 = 4x$위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$by = 2(x + a)$$

이다.

이 접선이 x축과 만나는 점은 $y = 0$일 때이므로

$$\mathrm{Q}(-a,\ 0)$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore\; 4a^2 + b^2 = 80 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; ㉠$$

또 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 $y^2 = 4x$위의 점이므로

$$b^2 = 4a \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; ㉡$$

$(b^2 > 0$이므로 $a > 0)$

㉡식을 ㉠에 대입하면

$$4a^2 + 4a = 80$$

$$a^2 + a - 20 = 0$$

$$(a+5)(a-4) = 0$$

$$\underline{\therefore\; a = -5 \text{ 또는 } a = 4}$$

이 중 ㉡식을 만족하는 a는 4 뿐이다. 따라서

$$a = 4 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; ㉢$$

㉢식을 ㉡식에 대입하면

$$b^2 = 16$$

따라서

$$a^2 + b^2 = 4^2 + 16 = 32$$

쯔 위에 밑줄 친 부분을 보면 a의 값이 2개가 나옴을 알 수 있어. 둘 다 문제를 만족하는 a값일까? 중간에 빨간 부분을 보면 $a > 0$임을 알 수 있지? 그런데 계산과정을 써 내려가다 보면 이런 문자의 범위를 놓치는 경우가 생겨. 그러고선, '아! 실수 했어' 라고 안타까워하지. 그런 실수를 하지 않기 위해서 눈으로 보는 것이 중요해. 즉, **<u>그림을 그려보라</u>**는 거지. 위의 [행동영역]에서 그림을 그렸잖아. 그 그림을 보면 $a > 0$임을 쉽게 알 수 있어. $a = 0$되지도 않아. $a = 0$이면 P와 Q는 같은 점이기 때문이지.

5. 평면 α 위에 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} = 6$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P에서 이 평면까지의 거리가 4이고, 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A일 때, 점 P에서 직선 BC까지의 거리는? [3점]

① $3\sqrt{2}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

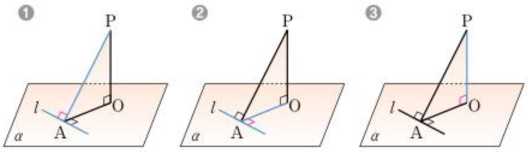
[교과개념] 공간도형 – 삼수선의 정리

삼수선의 정리

① $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OA} \perp l$이면 $\overline{PA} \perp l$

② $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PA} \perp l$이면 $\overline{OA} \perp l$

③ $\overline{PA} \perp l$, $\overline{OA} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OA}$이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



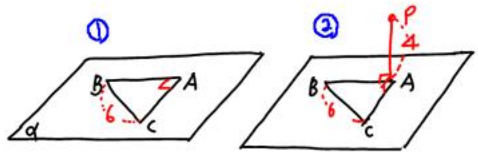
'삼수선'이란 말 그대로 수선이 3개 있다는 거야. 도형이므로 그림과 같이 익히는 것이 좋다^^

[행동영역] 문제를 그림으로 표현하기 (수학적 표현의 교환)

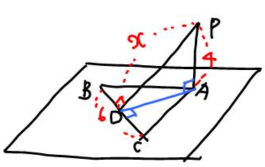
도형에 관련된 문제는 그 문제에 문제만 읽고 문제에 적용하게 될 성질들을 알아내기가 쉽지 않아. 그래서 문제를 그림으로 그려보는 것이 중요해. 그림을 보면서 내가 알고 있는 어떤 성질을 이용할지를 생각하는 거야. 문제를 한 줄 한 줄 읽어 내려가면서 상황을 그림으로 표현해보자.

① 평면 α위에 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{BC} = 6$인 직각이등변삼각형 ABC이 있다.

② α밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발이 A이고 그 길이가 4이다.

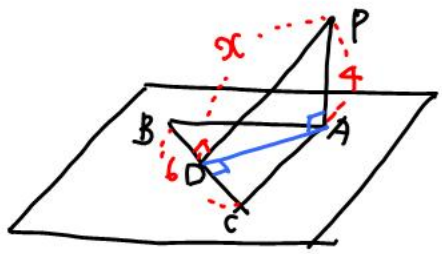


③ P에서 $\overline{BC}$까지의 거리는?



P에서 $\overline{BC}$까지의 거리는 최단거리이므로 수선의 길이야. 따라서 수선의 발을 D라 하면 $\overline{PD} \perp \overline{BC}$, 또한 $\overline{PA} \perp \alpha$ 이므로 '삼수선의 정리 ②'에 의하여 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$가 돼. 그럼 이제 해결할 수 있지?

[풀이]



위 그림에서 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형 이므로 $\overline{BD} = \overline{CD}$이다. 또한 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ 이다. 따라서

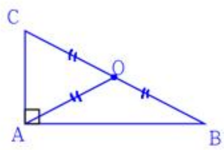
$$\overline{AD} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$

삼각형 PAD는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{PD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

[참고] $\overline{AD} = 3$을 구하는 다른 방법 (중2과정)

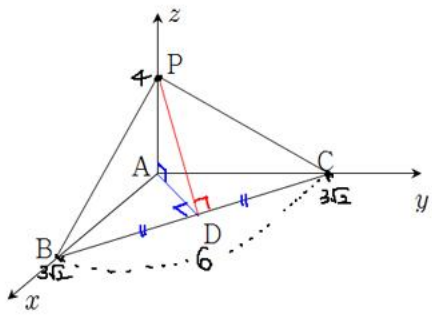
직각삼각형의 빗변의 중심을 외심이라고 부르지? 외심의 성질 : 외심에서 꼭짓점까지의 거리는 같다. 따라서



$$\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 3$$

[추가 학습해 둬야할 내용]

위 풀이의 그림을 다음과 같이 해석할 수도 있어.



A를 원점, 평면 α를 xy평면이라 생각하면 위 그림과 같이 돼. 그럼 교과서 또는 익힘책에 있는 문제의 그림과 동일하게 만들어 지는 거지.

$\overline{PD}$의 길이를 구하는 문제인데. 세 가지 정도의 해결방법이 존재하네.

(1) 공간도형 : 삼수선의 정리

(2) 벡터의 내적 : 삼각형 PBC의 넓이

(3) 공간도형의 방정식 : 직선위의 점 D

이 세 가지를 다 공부해 둬야 해. (1)번의 관점으로는 풀었으니 (2), (3)의 관점에서 해결해 보자.

(2) 벡터의 내적과 삼각형의 넓이.

삼각형 PBC의 넓이를 S라 하면

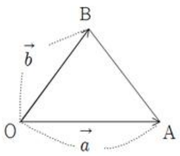
$$S=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PD}=3\overline{PD}$$

이므로 $\overline{PD}$의 길이를 구할 수 있다. 그럼 삼각형 PBC의 넓이를 어떻게 구할 수 있을까?

내적을 이용하면 구할 수 있다.

벡터의 내적을 이용한

삼각형의 넓이 유도.



삼각형 OAB의 넓이

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin(\angle AOB)$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle AOB)$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2(\angle AOB)}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left\{\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right\}^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\times\left[1-\left\{\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right\}^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

성분을 알 때의 공간벡터의 내적

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

위의 교과 내용을 이용하면

$A(0,\ 0,\ 0),\ B(3\sqrt{2},\ 0,\ 0),\ C(0,\ 3\sqrt{2},\ 0),$
$P(0,\ 0,\ 4)$

이므로

$\overrightarrow{BP}=(-3\sqrt{2},\ 0,\ 4),\ \overrightarrow{BC}=(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 0)$

이다. 따라서

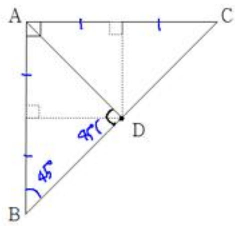
$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{34},\ |\overrightarrow{BC}|=6,\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

이므로

$$\triangle PBC=\frac{1}{2}\sqrt{34\times36-(}$$

$$=\frac{1}{2}\times30$$

$$=15$$



또한

$$\triangle PBC=\frac{1}{2}\times6\times\overline{PD}=3$$

이므로

$3\overline{PD}=15 \quad \therefore\ \overline{PD}=5$

(3) 직선 BC위의 점 D의 좌표를 t를 이용하여 표현한 후 $\overline{PD}$를 t에 관한 식으로 나타낸다. 이 때, 구하는 길이는 최소길이이다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(단, $x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2$)

만약 $z_1=z_2$일 경우에는

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ z=z_1$$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$(0<\theta<\pi)$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

두 점 $B(3\sqrt{2},\ 0,\ 0),\ C(0,\ 3$

직선의 방정식은

$$\frac{x-3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}}=\frac{y}{3\sqrt{2}},\ z=0$$

이다. 따라서 이를 매개변수의 방정식으로 표현하면

$$\begin{cases}x=-3\sqrt{2}t+3\sqrt{2}\\ y=3\sqrt{2}t\\ z=0\end{cases}$$

이다. 따라서 직선 BC위의 임의의 점 Q를

$(-3\sqrt{2}t+3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}t,\ 0)$

로 나타낼 수 있다 따라서

$$\overline{PQ}=\sqrt{(3\sqrt{2}t-3\sqrt{2})^2+(-3\sqrt{2}t)^2+4^2}$$

$$=\sqrt{36t^2-36t+34}$$

$$=\sqrt{36\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+25}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 5이다.

$\overline{PQ}$의 최소길이가 $\overline{PD}$이므로 그 길이는 5이다.

D의 좌표를 바로 구할 수도 있는데. 위 그림을 z축 위에서 바라본 단면을 생각해보자.

오른쪽 그림과 같이

보이겠지? 이 때 점 D에서

x축, y축에 수선의 발을

내리면 합동인 직각이등변

삼각형 4개로 나뉘겠지.

따라서 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$$

가 돼. 따라서

$$\overline{PD}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+4^2}=5$$

위의 (3)번째 풀이에서

$Q(-3\sqrt{2}t+3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}t,\ 0)$에 $t=\frac{1}{2}$를

대입하면 D의 좌표가 되는데 계산해보니

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$가 됨을 알 수 있어.

문제의 상황에 맞게 그림을 그리고 나면 삼수선의 정리를 이용한 간단한 계산 문제인데, 그럼에도 불구하고 설명을 많이 한 이유는 우리가 교과과정에서 배운 내용을 적용할 수 있는 것은 다 적용해 보자는 거야. 이게 학습과정이지. 그냥 문제만 풀고 답만 맞춰보는 것은 학습이 아니야. 그건 Test라고 하잖아.

공간도형 문제는 보편적으로 두 가지 풀이 방법이 존재 해.

(1) 도형의 성질을 이용하는 방법 (기하적 해법)

- 평면과 직선의 수직에 관한 정리
- 삼수선의 정리
- 각의 정의 (이면각 등)
- 정사영
- 중학교 과정의 기본 도형의 성질 등

이 중 중학교 과정의 기본 도형의 성질은 평면도형의 성질이잖아. 우리는 공간도형을 배우고 있고, 그럼 공간도형을 평면도형으로 표현하는 것이 좋겠네. 그렇지? 그래서 배우는 것이 정사영이야. 공간도형을 평면도형화 시켜서 관찰해보자는 생각.
이걸 단면화 한다고 해. 어느 방향에서 수직으로 바라볼 것인가하는 거. 연습해보길 바람.
다음에 공간도형 문제가 나오면 다시 자세히 얘기할게.

(2) 계산에 의한 방법 (대수적 해법)

- 공간좌표
- 벡터의 연산

공간좌표를 왜 배울까? 좌표도입을 하겠다는 거잖아. 좌표도입을 하면 좌표에 의한 계산을 할 수 있다는 것이고. 따라서 기하적 해법에 의해서 문제를 풀기 어려울 경우 좌표도입을 통해 계산하자는 것이 교과서의 설명이야. 또한 좌표도입을 하겠다는 의미는 '위치벡터'를 생각하겠다는 것이지.
따라서 '공간도형 - 공간좌표 - 벡터'는 한 단원으로 생각하고 교과서의 흐름대로 공부해 두는 것이 좋아. 그리고 벡터의 연산법들을 배우고 나면 다시 공간도형 단원으로 가서 벡터의 연산으로 문제들을 풀어보는 것이 좋은 학습방법이야.

6. 어느 회사원이 처리해야 할 업무는 A, B를 포함하여 모두 6가지이다. 이 중에서 A, B를 포함한 4가지 업무를 오늘 처리하려고 하는데, A를 B보다 먼저 처리해야 한다. 오늘 처리할 업무를 택하고, 택한 업무의 처리 순서를 정하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 66 ③ 72 ④ 78 ⑤ 84

[교과개념] 경우의 수 (고1 과정)
같은 것이 있는 경우의 순열(고2 자연)

인문계열의 학생은 '수형도'를 통해 문제해결을 권함. 같은 것이 있는 경우의 순열은 인문계열에서는 다루지 않기 때문이지. 또한 '확률'단원에서 경우의 수를 구해야 할 필요가 있기 때문에 고1과정의 순열과 조합을 정확하게 이해해야 할 필요가 있다.

(1) 순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

$$ {}_nP_r = \underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}} $$

(2) 조합의 수

n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $r!$이므로, n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{C}_r \times r!\text{(가지)} $$

이다. 그런데 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이므로

$$ {}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r $$

$$ \therefore\ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

이제 ${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$의 의미를 생각해보자.
처음에 순열의 수를 배울 때는 조합의 수를 배우지 않았으므로 '서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수'를 하나로 봤어. 그런데 조합을 배우고 나면 순열의 수를 '서로 다른 n개에서 r개를 뽑는다. (${}_nC_r$)' 'r개를 일렬로 나열한다. ($r!$)'로 구분할 수 있어야 한다는 거야.

[보기1] a_1, a_2, a_3, b, c을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해보면

ⅰ) 일렬로 나열하는 경우의 수 : $5!$

ⅱ) 5자리 중 a_1, a_2, a_3 이 들어갈 자리를 뽑아 나열하고, 나머지 두 자리에 b, c를 나열 : $({}_5C_3\times 3!)\times 2!$

ⅰ), ⅱ)는 같은 경우이므로
$5! = ({}_5C_3\times 3!)\times 2!$ 이다.

[보기2] a, a, a, b, c를 나열하는 경우의 수를 생각해 보자.

ⅰ) 같은 것이 있는 경우의 순열의 수 : $\dfrac{5!}{3!}$

ⅱ) 5자리 중 a 3개가 들어갈 자리를 뽑아 a를 나열(a를 나열하는 경우의 수는 1가지), 나머지 두 자리에 b, c를 나열 : $({}_5C_3\times 1)\times 2!$

ⅰ), ⅱ)는 같은 경우이므로
$\dfrac{5!}{3!} = {}_5C_3\times 2!$ 이다.

[보기 3] 남학생 3명, 여학생 2명을 일렬로 나열할 때, 여학생이 서로 이웃할 경우의 수를 구해보자.

총 5명이 나열할 때 자리를 순서대로
① ② ③ ④ ⑤
라 하자. 이제 여학생 2명이 들어갈 자리를 뽑아야 하는데 여학생 2명은 이웃해야 하므로 ${}_5C_2 = 10$ 가지가 (①②), (②③), (③④), (④⑤)로 4가지.
여학생 2명을 나열하는 경우의 수 $2!$, 나머지 남학생 3명을 나열하는 경우의 수 $3!$이므로
$(4\times 2!)\times 3!$ 가지이다.

이상을 정리하면 ${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$의 의미를 다음과 같이 정리할 수 있어.
'경우의 수를 구할 때에는 선택한 후 나열할 것인지의 여부를 결정한다.'
즉, 사건을 구성하는 작은 여러 개의 사건으로 분해하여 더할 것인지 곱할 것인지를 결정하자는 거야. 다음 [보기 4]를 통해서 좀 더 구체적으로 얘기하자.

[보기 4] $a,\ b,\ c,\ d,\ e$를 일렬로 나열할 때, $a,\ c,\ d$ 순서로 나열하는 경우의 수를 구해보자.

다음과 같이 사건을 분해해보자.

ⅰ) 여섯 자리 중 $a,\ c,\ d$가 들어갈 세 자리를 선택

: ${}_6C_2$ 가지

ⅱ) $a,\ c,\ d$를 위에서 선택한 세 자리에 나열

: 순서가 정해져 있으므로 1 가지

ⅲ) 나머지 세 자리에 $b,\ d,\ e$를 나열

: 순서가 정해져 있지 않으므로 $3!$ 가지

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 은 동시에 일어나고 있으므로 모두 곱해야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는

$({}_6C_2 \times 1) \times 3!$ (가지)

이다.

어때? 이해 돼?

이처럼 교과서의 예제라 할지라도 교과 단원의 개념의 이해를 통해서 풀이하려는 노력을 해야 해. 단순히 공식의 암기를 통해서 문제를 풀려고 한다면 시험장에서 어떻게 풀어야 할지 감이 잘 안 잡히는 당혹스러운 경우가 종종 생기게 돼.

[행동영역] 전형적인 문제(교과서의 예제 수준)

[풀이 1]

다음과 같이 사건을 분해해보자.

회사원이 처리해야 할 업무를 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ 이렇게 6가지가 있다고 하자.

오늘 처리할 업무 4 가지를 일렬로 나열할 때

ⅰ) 네 자리 중 $A,\ B$ 가 들어갈 두 자리를 선택

: ${}_4C_2 = 6$ 가지

ⅱ) $A,\ B$를 위에서 선택한 두 자리에 나열

: 순서가 정해져 있으므로 1 가지

ⅲ) 업무 $C,\ D,\ E,\ F$ 중 나머지 두 자리에 들어갈 업무를 선택 : ${}_4C_2 = 6$ 가지

ⅳ) ⅲ)에서 선택한 업무를 나열

: 순서가 정해져 있지 않으므로 $2!$ 가지

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)는 모두 동시에 일어나므로

$(6 \times 1) \times (6 \times 2) = 72$ (가지)

이다.

ⅲ)과 ⅳ)를 합쳐서 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$로 생각해 볼 수도 있다.

[풀이 2] 수형도를 통한 문제해결

처리할 업무를 순서대로 ① ② ③ ④라 하면

①	②	③	④
A	B	C	D
		C	E
		C	F
		D	C
		D	E
		D	F
		E	C
		E	D
		E	F
		F	C
		F	D
		F	E

①	②	③	④
A	C	B	D
	C		E
	C		F
	D		C
	D		E
	D		F
	E		C
	E		D
	E		F
	F		C
	F		D
	F		E

①	②	③	④
A	C	D	B
		⋮	

①	②	③	④
C	A	B	D
		⋮	

①	②	③	④
C	A	D	B
		⋮	

①	②	③	④
C	D	A	B
		⋮	

업무 A, B의 자리가 정해지면 그에 따라 각각 12 가지씩 업무처리의 경우가 생기므로 택한 업무의 처리 순서를 정하는 경우의 수는

$6 \times 12 = 72$ (가지)

이다.

7. 철수가 받은 전자우편의 10%는 '여행'이라는 단어를 포함한다. '여행'을 포함한 전자우편의 50%가 광고이고, '여행'을 포함하지 않은 전자우편의 20%가 광고이다. 철수가 받은 한 전자우편이 광고일 때, 이 전자우편이 '여행'을 포함할 확률은? [3점]

① $\frac{5}{25}$ ② $\frac{6}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$ ④ $\frac{8}{23}$ ⑤ $\frac{9}{23}$

[교과개념] 조건부확률

(1) 조건부 확률의 뜻

아래 표는 어느 풍물패 동아리의 회원구성을 나타낸 것이다.

회원 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 남자가 선택되었다. 이 사람이 2학년일 확률을 구하여 보자.

	1학년	2학년	합계
남자	10	6	16
여자	7	7	14
합계	17	13	30

한 명을 뽑을 때 전체 사건을 S, 뽑힌 사람이 남자일 사건을 A, 2학년일 사건을 B라고 하면

$n(S)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=13,\ n(A\cap B)=6$

따라서 회원 중에서 한 명을 뽑을 때 뽑힌 사람이 2학년 남자일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{30}$$

그러나 뽑힌 사람이 남자일 때, 그 사람이 2학년일 확률은

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{16}$$

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$\mathrm{P}(B|A)$

와 같이 나타낸다.

(2) 조건부 확률의 계산

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

(단, $\mathrm{P}(A)\neq 0$)

유리식의 성질
분모, 분자를 같은 수로 나누어도 그 값은 변하지 않는다.

확률의 정의
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

조건부 확률은 전체 사건(표본공간)이 축소되었을 때의 확률을 의미해. 확률의 정의는

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\ \ (\text{단, } A\subset S)$$

인데, S는 표본공간을 의미하지. 그런데 조건부 확률은 표본공간을 A로 축소했을 때의 B의 확률이야. 즉,

$$P(B\mid A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이지.

모든 교과서에 조건부 확률 단원을 보면 오른쪽에서 보인 것처럼 '표'를 만들고 있어. 오른쪽 예를 다시 보면 '남자를 한명 뽑았을 때, 이 사람이 2학년일 확률'이야. 즉, 남자 중에 2학년일 확률이지. 표본공간이 남자로 축소되었어. 따라서 그 확률은 $\frac{6}{16}$이야. 이해가 돼?

그럼 왜

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

가 교과서 본문 결론(Box)에 있을까?

그 이유는 조건부 확률 다음에 나오는 '확률의 곱셈정리'때문이야. 위 식의 양변에 $P(A)$를 곱하면 나오는 식

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$$

를 만들기 위해서지.

조건부 확률에 관한 문제라는 결론을 내렸을 경우 교과서 본문의 내용처럼 '표'를 그려서 문제를 해결하면 계산하는 방법보다 쉽게 해결할 수 있어.

또한 한 가지 더 얘기하면 교과서의 결론(Box)부분을 공식처럼 암기하기보다는 교과서 본문의 내용을 꼼꼼히 읽고 그 의미를 이해하는 것이 보다 중요한 학습형태라는 거야.

[행동영역] 문제의 조건을 '표'로 정리한 후 조건부 확률의 정의를 이용한다.

확률은 '비율'이므로 전체의 수를 정한 뒤 문제의 조건에 맞게 비율대로 빈칸을 채우면 돼!

[풀이]

철수가 받은 전자우편의 총 개수를 100개라 하면 문제의 조건을 아래의 표와 같이 정리할 수 있다.

	여행 O	여행 X	계
광고 O	5	18	23
광고 X			
계	10	90	100

따라서 광고 메일 중에 여행이란 단어가 포함될 확률은 $\frac{5}{23}$이다.

8. 실수 a에 대하여 집합

$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a) \neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[교과개념] 함수의 극한 / 함수의 연속성
이차방정식 이론(고1)

[행동영역] 그래프의 관찰을 통한 함수의 극한, 연속성의 판단.

함수의 극한과 연속성은 자주 얘기했는데, 가장 기본적인 방법은 함수의 그래프를 관찰하는 거야. $y=f(a)$의 그래프를 그리자는 거지.

$f(a)$를 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 실근의 개수로 정의했네. 그럼 실근의 개수를 구하면 되는데, 이 때 조심해야할 것이 있어. 문제에서 '이차'라는 말이 없어. 따라서 $a=0$일 때와 $a\neq 0$일 때로 나누어서 생각을 해야 해.

$a\neq 0$일 때를 이차방정식이라 부르고 판별식 D의 부호에 따라서 실근의 개수를 정할 수 있지?

[풀이]

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$에서

ⅰ) $a=0$ 일 때,

$2(-2)x-(-2)=0$

$-4x+2=0 \quad \therefore\ x=\frac{1}{2}$

따라서 $f(0)=1$

ⅱ) $a\neq 0$일 때,

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식은

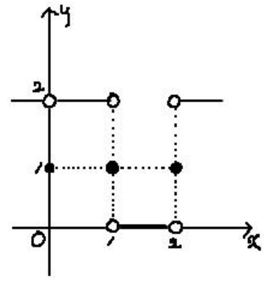
$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a-2)^2-a\{-(a-2)\}\\&=(a^2-4a+4)+(a^2-2a)\\&=2a^2-6a+4\\&=2(a-1)(a-2)\end{aligned}$$

따라서

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<1 \text{ or } a>2)\\ 1 & (a=1 \text{ or } a=2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $f(a)$는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<1 \text{ or } a>2)\\ 1 & (a=0 \text{ or } a=1 \text{ or } a=2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$



ㄱ.

$\lim_{a\to 0} f(a)=2,\ f(0)=1$이므로

$\lim_{a\to 0} f(a)\neq f(0)$

따라서 ㄱ 은 옳지 않다.

ㄴ.

$\lim_{a\to c+0} f(a)\neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 위 그림에서

$c=1,\ c=2$ 2개다.

따라서 ㄴ 은 옳다.

ㄷ.

위의 그림에서 함수 $y=f(a)$는

$x=0,\ x=1,\ x=2$에서 불연속이다. 따라서 불연속인 점은 3개다.

따라서 ㄷ 은 옳다.

9. 어느 공장에서 생산되는 병의 내압강도는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 내압강도가 40보다 작은 병은 불량품으로 분류한다.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
2.2	0.4861
2.3	0.4893
2.4	0.4918
2.5	0.4938

이 공장의 공정능력을 평가하는 공정능력지수 G는

$$G = \frac{m-40}{3\sigma}$$

으로 계산한다. $G=0.8$일 때, 임의로 추출한 한 개의 병이 불량품일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

① 0.0139 ② 0.0107 ③ 0.0082
④ 0.0062 ⑤ 0.0038

[교과개념] 정규분포

(1) 정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 그리고 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 변환하는 것을 확률변수 X를 표준화한다고 한다.

(2) 정규분포에서의 확률계산

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때,

① 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

② $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

표준화의 이유는 두 가지.
첫째, 분포상태가 다른(평균과 표준편차가 다른) 두 확률변수에 대한 객관적인 비교를 하기 위해.
예를 들어 '1997학년도 수능 인문/자연 12번' 문제를 보자.

어느 해 한국, 미국, 일본의 대졸 신입 사원의 월급은 평균이 각각 80 만원, 2000 불, 18 만엔이고 표준편차가 각각 10 만원, 300 불, 2 만 5 천엔인 정규분포를 따른다고 한다. 위 3 개국에서 임의로 한 면씩 뽑힌 대졸 신입 사원 A, B, C 의 월급이 각각 94 만원, 2250 불, 21 만엔이라고 할 때, 각각 자국내에서 상대적으로 월급을 많이 받는 사람부터 순서대로 적은 것은? [2 점]

각 국가의 월급의 평균, 표준편차가 다르기 때문에 단순히 환률 계산해서 원화로 비교하는 것은 무의미하다. 이들이 받는 월급의 대소를 상대적으로 비교하기 위해서는 평균과 표준편차가 같은 상태에서 비교해야 해. 그 방법이 바로 표준화야.
이를 이용해서 문제를 해결해 보면

한국 : $\dfrac{94-80}{10} = \dfrac{7}{2}$

미국 : $\dfrac{2250-2000}{300} = \dfrac{5}{6}$

일본 : $\dfrac{21-18}{2.5} = \dfrac{6}{5}$

따라서 한국, 일본, 미국 순으로 월급을 상대적으로 많이 받는다.

둘째, 표준정규분포표를 이용한 확률 계산을 위해 다음의 교과서 예제를 보자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(6 \leq X \leq 14)$를 구하여라.

$Z = \dfrac{X-10}{4}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(6 \leq X \leq 14) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{6-10}{4} \leq Z \leq \frac{14-10}{4}\right) \\
&= \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 2 \times 0.3413 = 0.6826
\end{aligned}$$

이 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$의 값은 교과서 맨 뒤 쪽에 있는 '표준정규분포표'를 보고 찾은 값이야. 이렇게 일반적인 정규분포에서의 확률은 '표준정규분포표'를 이용해서 계산을 해. '표준정규분포표'를 이용하기 위해서 표준화를 하는 거지.

[행동영역] 전형적인 풀이(교과서 예제 수준)

통계 문제를 파악할 때에는 제일 먼저 확률변수가 무엇인지 파악해야 해. 확률변수가 이산확률변수인지 아니며 연속확률변수인지를 파악해야 해.
이산확률변수라고 판단이 되면 '확률분포표'를 작성해야 할 것이고, 연속확률변수라고 판단이 되면 어떤 정규분포를 따르는지 확인해야 할 거야.

이 문제를 분석해보자.

① 병의 내압강도를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

② 내압강도가 40보다 작으면 불량품일 때, 불량품을 뽑을 확률은 $\mathrm{P}(X < 40)$이다.

③ 확률 계산을 위해서 확률변수 X를 확률변수 Z로 변형한다.(표준화)

$$\mathrm{P}(x < 40) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{40-m}{\sigma}\right)$$

그런데 여기에서 문제가 발생. m과 σ를 모르기 때문에 $Z < \dfrac{40-m}{\sigma}$를 알 수 없다는 거야.

문제를 다시 보자. 사용하지 않은 조건이 있는지. 보여? $G = \dfrac{m-40}{3\sigma}$, $G = 0.8$일 때의 불량을 뽑을 확률인거? 즉,

$$\frac{m-40}{3\sigma} = 0.8$$

을 이용해서 $Z < \dfrac{40-m}{\sigma}$를 계산하라는 거네.

[풀이]

생산되는 병의 내압강도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

내압강도가 40보다 작을 경우 불량품이므로 불량품을 뽑을 확률은 $\mathrm{P}(X < 40)$이다.

공정능력지수 $G = \dfrac{m-40}{3\sigma}$가 0.8이므로

$$\frac{m-40}{3\sigma} = 0.8,\quad \therefore\ \frac{40-m}{\sigma} = -2.4$$

이다. 따라서 공정능력지수 G가 0.8일 때의 임의로 추출한 한 개의 병이 불량품일 확률은

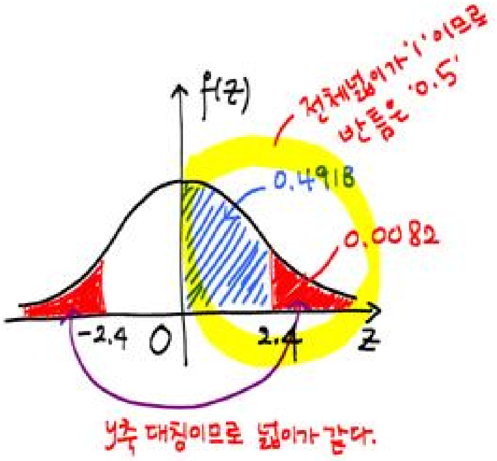
$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X < 40) \\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{40-m}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z < -2.4) \\ &= 0.5 - \mathrm{P}(-2.4 < Z < 0) \\ &= 0.5 - \mathrm{P}(0 < Z < 2.4) \\ &= 0.5 - 0.4918 \\ &= 0.0082 \end{aligned}$$

$\dfrac{40-m}{\sigma} = -2.4$

표준정규분포곡선의 성질 이용

문제에 주어진 표준정규분포표를 이용

표준정규분포곡선의 성질과 표준정규분포표에서의 확률은 아래와 같이 그림과 같이 보면 실수할 일이 없겠지?



10. 조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 w(g)일 때, A 조개와 B 조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_{A}, Q_{B}라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$Q_{\mathrm{A}} = 0.01 t^{1.25} w^{0.25}$$
$$Q_{\mathrm{B}} = 0.05 t^{0.75} w^{0.30}$$

수온이 20℃이고 A 조개와 B 조개의 개체중량이 각각 8g일 때, $\dfrac{Q_{\mathrm{A}}}{Q_{\mathrm{B}}}$의 값은 $2^a \times 5^b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [3점]

① 0.15 ② 0.35 ③ 0.55 ④ 0.75 ⑤ 0.95

[교과개념] 지수

[행동영역] 지수법칙을 이용한 간단한 계산

전형적인 풀이(반복기출, 교과예제수준)

이런 문제는 주어진 식에서 문자의 의미를 정확하게 판단한 후 주어진 식을 어떻게 이용하면 쉽게 계산할 수 있는지를 조금만 고민해보면 어렵지 않게 해결할 수 있어.

[풀이]

수온이 20°이므로 $t = 20$, 개체중량이 $8g$이므로 $w = 8$ 이다. 이를 주어진 식에 대입하면

$$Q_{\mathrm{A}} = 0.01 \times 20^{1.25} \times 8^{0.25}$$
$$Q_{\mathrm{B}} = 0.05 \times 20^{0.75} \times 8^{0.30}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{Q_B} &= \frac{0.01 \times 20^{1.25} \times 8^{0.25}}{0.05 \times 20^{0.75} \times 8^{0.30}} \\ &= \frac{1}{5} \times (2^2 \cdot 5)^{1.25-0.75} \times (2^3)^{0.25-0.30} \\ &= 5^{-1} \times (2^2 \cdot 5)^{0.5} \times (2^3)^{-0.05} \\ &= 5^{-1} \times (2 \cdot 5^{0.5}) \times 2^{-0.15} \\ &= 2^{1-0.15} \times 5^{-1+0.5} \\ &= 2^{0.85} \times 5^{-0.5} \end{aligned}$$

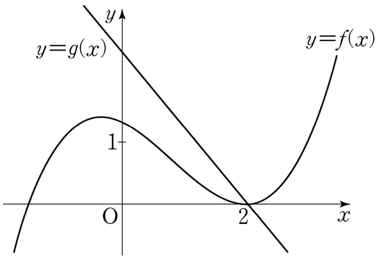
따라서 $a = 0.85$, $b = -0.5$이다.

$$a + b = 0.85 - 0.5 = 0.35$$

11. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다. $1<f(0)<g(0)$일 때, 방정식

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

의 실근의 개수는? [4점]



① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

[교과개념] 분수방정식 /
함수의 그래프와 방정식과의 관계
(고1과정 '함수'단원의 연장 학습)
도형의 이동(고1과정) - 대칭이동

(1) 분수방정식의 풀이

분수방정식은 먼저 분모의 최소공배수를 분수방정식의 양변에 각각 곱하여 다항방정식으로 고친 다음에 푼다.

예를 들어 다음 분수방정식을 풀어 보자.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

분모의 최소공배수 $3(x^2-1)$을 ㉠의 양변에 곱하여 다항방정식을 만들면

$$3(x+1)-3\cdot 2=x^2-1$$

$$x^2-3x+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

방정식 ㉡을 풀면

$$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x=1$은 분수방정식 ㉠의 분모를 0이 되게 하므로 $x=2$만이 분수방정식 ㉠의 근이다.

주어진 분수방정식을 푸는 과정에서 얻어진 다항방정식의 근 중에서 주어진 분수방정식을 만족하지 않는 것을 무연근이라고 한다.

즉, 분수방정식을 푸는 과정에서 얻어진 다항방정식의 근 중에서 분수방정식의 분모를 0이 되게 하는 것이 무연근이다.

분수방정식을 풀 때에는 양변에 같은 식을 곱하여 다항방정식(정 방정식)으로 고친 후에 풀고 있어. 이처럼 식을 변형할 때에는 '필요・충분조건'이 되도록 변형을 해야 하는데, 위의 방법처럼 어떤 식을 곱하게 되면 '필요조건'일 뿐 '충분조건'이 아니야. 즉, 명제 '$a=b$이면 $ac=bc$이다.'는 참이지만, 명제 '$ac=bc$이면 $a=b$이다.'는 거짓이야.

그래서 '$a=b$'는 '$ac=bc$'이기 위한 필요조건인 거야. 이를 필요・충분조건으로 만들려면? '$c\neq 0$'이란 조건이 있으면 돼. $c=0$을 만족하는 근이 '무연근'이란 얘기지.

그런데, '무연근이 존재할 수도 있으니 정방정식을 풀고 난 후에는 꼭 근을 확인해봐'라고 한다면 사람은 망각의 동물이라 "깜빡"할 때가 있어. 나중에 답을 체크할 때라야 '아! 무연근을 안 없앴다.'라고 후회하게 되지. 그리고는 '실수'라 치부하고 넘어가버리지. 그럼 다음에 또 틀릴 수 있어.

그래서 처음 식을 변형할 때부터 '필요・충분조건'을 만들자는 거야. 예를 들어

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

분모의 최소공배수 $3(x^2-1)$을 ㉠의 양변에 곱하여 다항방정식을 만들면

$$3(x+1)-3\cdot 2=x^2-1 \quad x\neq -1,\ x\neq 1$$

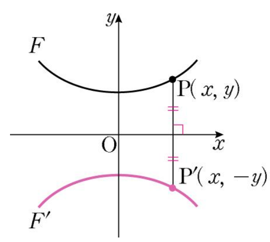
와 같이 무연근을 미리 써 놓자고. 그럼 나중에 답을 구한 후에 저 빨간색이 눈에 보이면 "깜빡"이란 것을 안 할 거 아냐?

(2) 함수의 그래프와 방정식과의 관계

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

(3) 도형의 이동 중 대칭이동 (고1 과정)

좌표평면 위의 도형 F의 방정식을 $f(x,y)=0$이라고 할 때, 도형 F를 x축에 대하여 대칭 이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.



도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 도형 F' 위의 점 $\mathrm{P}'(x',y')$에 대응한다고 하면

$$x'=x,\ y'=-y$$

$$\therefore\ x=x',\ y=-y'$$

그런데 점 $\mathrm{P}(x,y)$는 도형 F 위의 점이므로 $f(x,y)=0$을 만족한다. 따라서

$$f(x',y')=0$$

즉, 도형 F' 위의 점 $\mathrm{P}'(x',y')$은 다음 방정식을 만족한다.

$$f(x,-y)=0$$

이를 함수식으로 표현하면

$$y=f(x) \to -y=f(x) \quad \therefore\ y=-f(x)$$

같은 방법으로 좌표평면 위의 점(x, y)에 대한 도형 F의 방정식이 $f(x, y)=0$일 때, 도형 F를 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각 $f(-x, y)=0$, $f(-x, -y)=0$, $f(y, x)=0$임을 알 수 있다.

[행동영역] 분수방정식의 풀이한 후 주어진 그래프를 이용하여 그래프의 교점의 개수를 구한다.

[풀이]

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)} \quad \cdots\cdots\cdots ㉠$$

㉠식의 양 변에 $f(x)g(x)$를 곱하면

$\{f(x)+g(x)\}f(x)g(x)=g(x)+f(x)$

(단, $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$)

$\{f(x)+g(x)+f(x)g(x)-\{f(x)+g(x)\}=0$

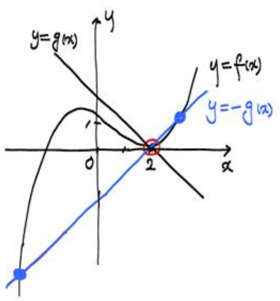
$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0$

$\therefore\ f(x)=-g(x)$ 또는 $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$

ⅰ) $f(x)=-g(x)$일 때,

$y=f(x)$와 $y=-g(x)$의 그래프의 교점의 개수이므로 $y=-g(x)$의 그래프를 그리자.

$y=-g(x)$는 $y=g(x)$를 x축 대칭한 그래프이므로 아래 그림과 같다.



오른쪽 그림에서 $y=f(x)$, $y=-g(x)$의 그래프의 교점은 3개이다. 그러나 $x=2$는 $f(x)=0$, $g(x)=0$이 되게 하므로 무연근이다.

따라서 $f(x)=-g(x)$의 실근의 개수는 2개이다.

ⅱ) $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$일 때,

$y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프의 교점의 개수이므로 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프를 그리자.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{g(x)}=-0$

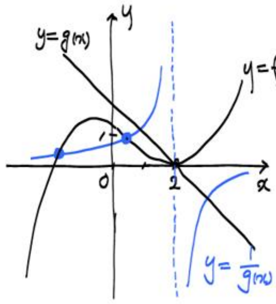
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{g(x)}=+0$

$\lim\limits_{x\to 2+0} g(x)=-0$이므로 $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2-0} g(x)=+0$이므로 $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$이다.

또한 $1<g(0)$이므로 $1>\dfrac{1}{g(0)}>0$이다.

따라서 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프는 아래와 같다.



오른쪽 그림에서 $y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프의 교점의 개수는 2개이고 그 때의 x값에 대하여 $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ 이므로 $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$의 실근의 개수는 2개이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 구하는 실근의 개수는 4개이다.

$y=g(x)$의 그래프를 보고 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프의 개형을 그릴 때 사용한 것이 함수의 극한이야. x값의 변화에 따라 $g(x)$값의 변화를 보고 그 후에 $\dfrac{1}{g(x)}$의 변화를 생각해야 하지. 마치 합성함수의 극한을 구할 때처럼. 교과서에서 배운 개념, 성질들이 이렇게 문제에 다양하게 적용할 수 있어. 그런데, 실전 문제에서 사용하기 위해서는 학습과정에서 연습을 좀 많이 해야 해. '쌍곡선'에서 점근선을 극한으로 구하고 있다는 것을 배울 거야. 그러면 함수의 극한을 이용해서 고1 과정의 유리함수의 점근선도 생각해 볼 필요가 있다는 거지. 만약 그렇게 학습을 했다면 이 문제 풀이의 ⅱ)과정은 어렵지 않게 해결할 수 있었겠지.

만약 극한의 개념을 생각하지 못하고 있었다면 간단한 예를 들어볼 수도 있어. $y=g(x)$는 직선이잖아. x절편은 2인데, y절편을 몰라. 다만 y절편은 1보다 크다는 것 밖에. 그럼 y절편을 2라고 가정해도 문제를 해결하는 데는 지장이 없잖아. 즉

$g(x)=-x+2$

라 하면

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{-x+2}=\frac{-1}{x-2}$$

가 되어 위의 그림처럼 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프의 개형을 그릴 수 있어. 이 때 주의해야 할 것은 문제의 조건에 맞는 값을 가정한다는 거지. 이런 걸 '발견적 추론'이라 하는 거야.

12. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{n+5}{5}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}} + \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}} = \frac{6}{5},$$

$$(\text{우변}) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(\text{가})} + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

$${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1} = \boxed{(\text{나})} \cdot {}_{l}\mathrm{C}_{k} \quad (0 \leq k \leq l)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \boxed{(\text{다})} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(\text{가})} + \boxed{(\text{다})} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+6}{5}$$

이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$
②	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
③	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$

[교과개념] 수열 - 수학적 귀납법
조합의 수

(1) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다는 것을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

수학적 귀납법이란 자연수 n에 대한 명제가 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하는 수학적 약속이라 생각하면 돼. 약속은 지키라고 있는 거야.

$n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립함을 보이는 것은 계산 즉, $p(1)$을 계산하여 보이면 되고, $n=k$일 때 명제 $p(k)$가 성립한다고 가정한 후 $p(k+1)$이 성립함을 증명하면 되는데, 이 때는 $p(k)$를 적절히 변형하여 식으로 보여주면 돼.

교과서에 있는 예제 몇 개만 풀어보면 쉽게 이해될 거야.

(2) 조합의 수

$${}_{n}C_{r} = \frac{{}_{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \leq r \leq n)$$

${}_{n}C_{0} = 1$으로 정의

[행동영역] 연역적 추론 (빈칸 채우기)

이 문제와 같이 증명과정에서 빈칸을 채우는 문제를 학습할 때에는 증명과정의 처음부터 끝까지 직접 써 보는 것이 좋다. 증명하는 과정에서 생략된 부분(주로 교과 개념)을 찾고 이를 어떻게 이용해서 증명할 것인지를 고민할 필요가 있다.

[풀이]

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}C_{k}}{{}_{n+4}C_{k}} = \frac{n+5}{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

(1) $n=1$일 때

$$(\text{좌변}) = \sum_{k=0}^{1} \frac{{}_{1}C_{k}}{{}_{5}C_{k}} = \frac{{}_{1}C_{0}}{{}_{5}C_{0}} + \frac{{}_{1}C_{1}}{{}_{5}C_{1}} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{1+5}{5}$$

$$(\text{우변}) = \frac{1+5}{5}$$

이므로 ㉠식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때

$$a_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}C_k}{{}_{m+4}C_k}=\frac{m+5}{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

식이 성립한다고 가정하자.

이제 증명하고자 하는 것은 $a_m=\frac{m+5}{5}$일 때,

$a_{m+1}=\frac{(m+1)+5}{5}=\frac{m+6}{5}$가 성립함을 보여야 해. 그러기 위해서는 a_{m+1}을 a_m에 관한 식으로 만들어야 해. 이걸 생각하기가 쉽지 않지? 그래서 증명과정에서 식을 변형하는 관점을 보여주고 있어.

$n=m+1$일 때

$$a_{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{(m+1)+4}C_k}=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k} \quad \cdots ㉢$$

이 식을 어떻게 변형을 해야 $\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}C_k}{{}_{m+4}C_k}$가 생길까?

어렵지? 그래서 일단은 $\square+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$의 형태로 만들어야겠지? $\sum$의 정의를 이용하여

$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}$을 나열해보자.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}\\
&=\frac{{}_{m+1}C_0}{{}_{m+5}C_0}+\frac{{}_{m+1}C_1}{{}_{m+5}C_1}+\frac{{}_{m+1}C_2}{{}_{m+5}C_2}\cdots+\frac{{}_{m+1}C_{m+1}}{{}_{m+5}C_{m+1}}\\
&=\frac{1}{1}+\frac{{}_{m+1}C_{0+1}}{{}_{m+5}C_{0+1}}+\frac{{}_{m+1}C_{1+1}}{{}_{m+5}C_{1+1}}+\cdots+\frac{{}_{m+1}C_{m+1}}{{}_{m+5}C_{m+1}}\\
&=1+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉣
\end{aligned}$$

아싸! (가)에는 '1'이 들어간다는 것을 알아냈어.

이제 $\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$을 $\frac{{}_{m}C_k}{{}_{m+4}C_k}$로 식을 변형해야지?

이를 위해서 문제에서

$${}_{l+1}C_{k+1}=\square\cdot{}_{l}C_k$$

가 있는 거야.

$$\begin{aligned}
{}_{l+1}C_{k+1}&=\frac{(l+1)!}{(k+1)!\cdot(l-k)!}\\
&=\frac{(l+1)\times l!}{(k+1)\times k!\cdot(l-k)!}\\
&=\frac{l+1}{k+1}\times\frac{l!}{k!\cdot(l-k)!}\\
&=\frac{l+1}{k+1}\cdot{}_{l}C_k
\end{aligned}$$

(나)에 들어갈 $\frac{l+1}{k+1}$도 찾았다.

이를 이용하면

$$\begin{cases}{}_{m+1}C_{k+1}=\dfrac{m+1}{k+1}\cdot{}_{m}C_k\\[2mm]{}_{(m+4)+1}C_{k+1}=\dfrac{(m+4)+1}{k+1}\cdot{}_{m+4}C_k\end{cases} \quad \cdots ㉤$$

($m+5=(m+4)+1$ 고쳐서 위의 식을 이용)

가 될 거야.

자, 이제 준비 끝. ㉢식에서부터 증명을 다시 해보자.

$$\begin{aligned}
a_{m+1}&=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k} && \because ㉣\\
&=1+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}} && \because ㉤\\
&=1+\sum_{k=0}^{m}\frac{\frac{m+1}{k+1}\cdot{}_{m}C_k}{\frac{m+5}{k+1}\cdot{}_{m+4}C_k} && k+1\text{을 약분}\\
&=1+\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)\cdot{}_{m}C_k}{(m+5)\cdot{}_{m+4}C_k} && \textstyle\sum\text{의 성질 } \sum_{k=0}^{n}ca_k=c\sum_{k=0}^{n}a_k\\
&=1+\frac{m+1}{m+5}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}C_k}{{}_{m+4}C_k} && \because ㉡\\
&=1+\frac{m+1}{m+5}\times\frac{m+5}{5}\\
&=1+\frac{m+1}{5} && (\text{다})=\frac{m+1}{m+5}\\
&=\frac{(m+1)+5}{5}
\end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때에도 ㉠식은 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠식은 성립한다.

13. 이차정사각행렬 A와 행렬 $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 $(BA)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(AB)^2$은? [4점]

① $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$

[교과개념] 행렬의 연산 / 역행렬의 정의

(1) 행렬의 곱셈의 성질

① $AB\neq BA$
② $(AB)C=A(BC)$
③ $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
④ $AE=EA=A$ (단, E는 단위행렬)
⑤ $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (단, A^{-1}은 A의 역행렬)
⑥ $A^n=AA^{n-1}=A^{n-1}A$

행렬문제를 보면 크게 두 종류가 있어.
- 행렬 연산의 정의를 이용 (성분에 의한 계산)
- 행렬 연산의 성질을 이용

(2) 역행렬의 정의

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

를 만족하는 행렬 A^{-1}이 존재하면 이를 A의 역행렬이라고 한다.

역행렬의 존재여부 판단.
- 행렬 연산의 정의를 이용(성분에 의한 계산)

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}를 구해보자.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$라 하면 역행렬이 정의

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

에 의해 성분으로 계산해보면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(중략)

i) $ad-bc=0$일 때, 위 식은 성립하지 않음
ii) $ad-bc\neq 0$일 때,

$x=\dfrac{d}{ad-bc}$, $y=\dfrac{-b}{ad-bc}$,

$z=\dfrac{-c}{ad-bc}$, $w=\dfrac{a}{ad-bc}$

이므로 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$이다.

- 행렬 연산의 성질 이용

$AB=E$ 이면
① A, B는 서로 역행렬
② $AB=BA$

이므로 행렬 연산의 성질을 이용하여 $AB=E$의 꼴로 식을 변형해본다. 예를 들어

$A^2-A-E=O$일 때 A의 역행렬을 구해보면

$A^2-A=E$
$A(A-E)=E$
$\therefore\ A^{-1}=A-E$

행렬 연산의 성질 중
- 분배법칙이 성립
$A^2-A=A^2-AE$
$=A(A-E)$

[행동영역] $(AB)^2$을 행렬 연산의 성질을 이용하여 성분이 주어진 행렬로 표현하기.

행렬 연산의 성질에 의해

$(BA)^2=(BA)(BA)=B(ABA)$
$(AB)^2=(AB)(AB)=(ABA)B$

로 표현이 가능하잖아. 문제에 행렬 B와, $(BA)^2$의 성분이 주어져 있으므로 이를 이용해서 ABA의 성분만 알아낼 수 있다면 $(AB)^2$의 성분을 구할 수 있어. 행렬 B의 성분을 보니 $ad-bc\neq 0$이어서 B^{-1}이 존재하므로

$B^{-1}(BA)^2=B^{-1}\{B(ABA)\}=(B^{-1}B)(ABA)=ABA$

가 성립하겠네. (행렬의 곱셈에서 결합법칙이 성립함)

[풀이]

행렬 연산의 성질을 이용하여 $(AB)^2$을 변형하면

$(AB)^2=(AB)(AB)=(ABA)B$ …… ㉠

마찬가지로 방법으로 $(BA)^2$을 변형하면

$(BA)^2=(BA)(BA)=B(ABA)$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에서 $ad-bc=1\neq 0$이므로 역행렬

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$로 존재한다. 따라서

$ABA=B^{-1}(BA)^2$ …………………… ㉡

㉡식을 ㉠식에 대입하면

$$\begin{aligned}(AB)^2&=B^{-1}(BA)^2B\\&=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이다.

14. 평면에서 그림의 오각형 ABCDE가

$$\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED},\ \angle B=\angle E=90^{\circ}$$

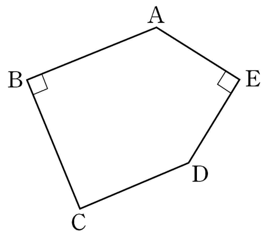
를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

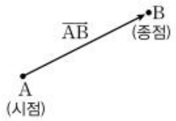
[교과개념] 벡터의 연산

(1) 벡터의 정의

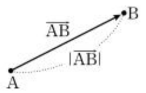
오른쪽 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 유향선분이라고 한다. 이때, 점 A에서 점 B로 향하는 유향선분 AB를 벡터 AB라 하고, 기호로

$\overrightarrow{AB}$

와 같이 나타낸다.



이때, 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점이라고 한다.



선분 AB의 길이는 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기라 하고, 기호로

$|\overrightarrow{AB}|$

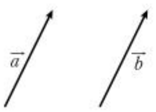
와 같이 나타낸다.

(2) 두 벡터가 서로 같다.

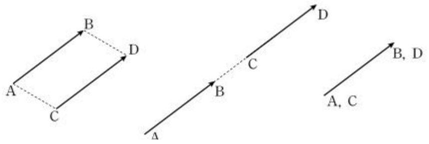
벡터는 크기와 방향만으로 정해지므로 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 크기와 방향이 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고, 기호로

$\vec{a}=\vec{b}$

와 같이 나타낸다.



특히, 시점과 종점이 주어진 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CD}$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이면 선분 AB를 평행이동하여 선분 CD에 겹칠 수 있다.



두 벡터가 서로 같다면 한 벡터를 '평행이동'시켜서 겹칠 수 있다는 말은 '평행사변형'을 만들 수 있다는 말이야. 즉 위의 그림 중 제일 왼쪽에 있는 그림에서 사각형 ABCD는 평행사변형이야. 따라서

명제 1 : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이면
사각형 ABCD는 평행사변형이다.

명제 2 : 사각형 ABCD가 평행사변형이면
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다

는 모두 '참'이야.

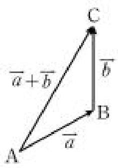
(3) 벡터의 덧셈

① 삼각형의 법칙

오른쪽 그림과 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AC}$로 나타나는 벡터 $\vec{c}$를두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

와 같이 나타낸다.

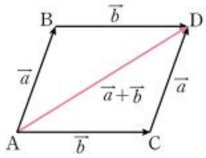


② 평행사변형의 법칙

두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$에 대하여 점 D를 사각형 ACDB가 평행사변형이 되도록 잡으면 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

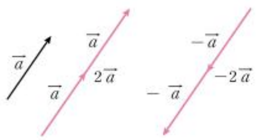
이다. 즉, 두 벡터의 합 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$는 평행사변형의 대각선인 $\overrightarrow{AD}$이다.



삼각형의 법칙을 이용할 경우에는 한 벡터의 종점이 다른 벡터의 시점이 될 경우에 이용되고, 평행사변형의 법칙은 두 벡터의 시점이 같을 때 이용되고 있어. 벡터의 합의 정의는 '삼각형'의 법칙이야. 정의는 하나밖에 없거든. 이 삼각형의 법칙에 두 벡터가 서로 같을 조건을 이용해서 평행사변형의 법칙을 유도한 거야.
또 한 가지 명심해야 될 것은 '벡터의 합'은 기하적(도형)으로 정의되기 때문에 도형과 같이 기억해야 한다는 거야.

(4) 벡터의 실수배

영벡터가 아닌 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터의 합 $\vec{a}+\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 2배인 벡터이다.



이것을 $2\vec{a}$로 나타낸다. 또, $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 2배인 벡터이다.

이것을 $-2\vec{a}$로 나타낸다.

일반적으로 임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$와의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라고 한다.

이를 정리하면 다음과 같다.

실수 k에 대하여

① $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

(i) $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고,

크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

(ii) $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고,

크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

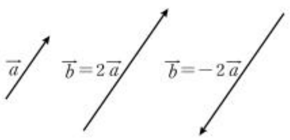
(iii) $k=0$이면 $\vec{0}$이다.

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

---

(5) 두 벡터의 평행 조건

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 또는 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고, 기호로



$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

와 같이 나타낸다.

일반적으로 벡터의 실수배의 정의에 의해 다음이 성립한다.

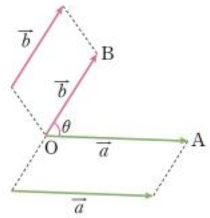
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$

일반적으로 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족하는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 역으로, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족하는 실수 k가 존재한다.

(6) 벡터의 내적의 정의

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 한 점 O를 잡아서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$가 되도록 A, B를 정할 때, $\angle AOB$의 크기 θ는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고,



$\theta=\angle AOB\ (0\le\theta\le\pi)$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이라고 한다.

이때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로

$\vec{a}\bullet\vec{b}$

와 같이 나타낸다. 즉,

$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

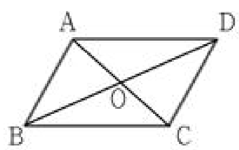
이다. 또, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$으로 정한다.

벡터의 내적의 정의를 한 점 O를 잡아서 두 벡터의 시점을 O가 되도록 평행이동 시키고 있어. 즉, 내적을 정의하려면 시점이 같아야 한다는 거야. 또한 평행이동 시키는 이유는 두 벡터가 서로 같을 조건에 의해 평행이동한 벡터는 같은 벡터이기 때문이야. 그런데 여기서 중요한 정보가 하나 있네. 두 벡터가 이루는 각 θ는 평행이동을 시켜도 변화가 없다는 것! 평행선에 대하여 동위각은 동위각끼리, 엇각은 엇각끼리 같기 때문에 당연한 것인데 이 정보를 문제에 적용 시키지 못할 때가 많아.

(7) 평행사변형의 정의와 성질

정의: $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$,

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$



성질

① $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$

② $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$

③ $\angle A+\angle B=180^\circ$

④ $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

[행동영역] 연역적 추론 - 합답형 문제

벡터의 연산의 정의와 문제에 주어진 도형을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판단하는 문제네.

벡터의 연산의 정의에서 도형을 같이 생각하라고 했지? 또한 문제에 도형이 있지?

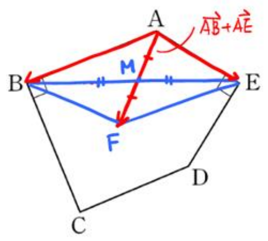
문제에 주어진 도형에 우리가 알고 있는 문제의 정보, 교과 개념의 정보를 추가하면 새로운 정보를 알 수 있어. 이를 통해서 문제를 해결할 수 있는 거지.

또한 합답형 문제의 특성상 ㄱ, ㄴ을 정확하게 판단하고 나면 이를 이용해서 ㄷ을 해결할 수 있어.

[풀이]

ㄱ

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$를 평행사변형의 법칙에 따라 주어진 그림에 표현을 하면 오른쪽 그림과 같다.



이때 사각형 ABFE는 평행사변형이므로 $\overline{BE}$의 중점 M은 $\overline{AF}$의 중점이기도 하다. 따라서

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$$

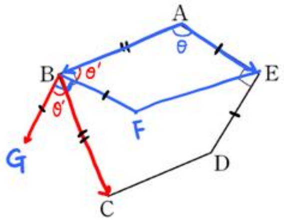
이므로

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\,//\,\overrightarrow{AM}$$

이다. 따라서 ㄱ 은 옳다.

ㄴ

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$를 정의하기 위해서는 시점이 같아야 한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BG}$가 되도록 점 G를 정하자. 또한



$\angle A=\theta$, $\angle CBG=\theta'$

라 하자.

$\overrightarrow{BF}$는 $\overrightarrow{AE}$를 평행 이동한 벡터이고

$\overrightarrow{BG}$는 $\overrightarrow{ED}$를 평행 이동한 벡터이다.

문제의 조건에서 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B=\angle E=90^\circ$이므로

$$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{BG}|,\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|,\ \overline{BF}\perp\overline{BG}$$

이다. 또한 $\angle ABC=\angle FBG=90^\circ$이므로 $\angle ABF=\angle CBG=\theta'$이다. 그런데 사각형 ABFE는 평행사변형이므로 $\theta+\theta'=180^\circ$이다. 따라서 $\theta'=180^\circ-\theta$이다.

내적을 계산할 준비 끝! 이제 내적을 구해보면

따라서

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}\\&=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BG}|\cos\theta'\\&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos(180^\circ-\theta)\\&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|(-\cos\theta)\\&=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta\end{aligned}$$

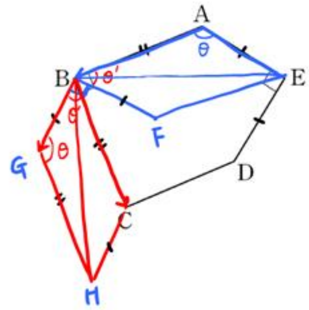
따라서

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$$

이다. 그러므로 ㄴ 은 옳다.

ㄷ

위의 ㄴ의 그림에서 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GH}$가 되도록 점 H를 잡으면 아래 그림과 같다.



$$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BH}|$$

인데, 위 그림에서

$$\overline{AB}=\overline{BC},\quad \overline{BF}=\overline{BG},\quad \angle ABF=\angle CBG$$

이므로 사각형 ABFE와 사각형 BGHC는 합동인 평행사변형이다. 그러므로 대각선의 길이인 $|\overrightarrow{BE}|$와 $|\overrightarrow{BH}|$는 서로 같다. 따라서

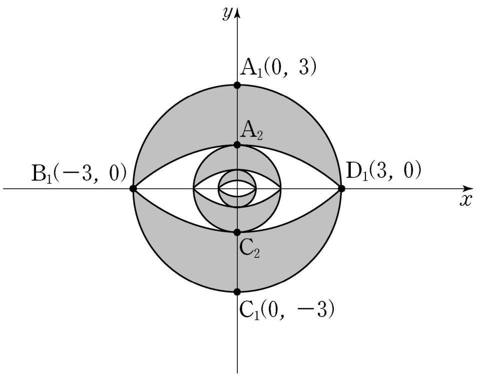
$$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BH}|=|\overrightarrow{BE}|$$

이다. 그러므로 ㄷ 도 옳다.

문제에 주어진 그림에 벡터의 연산의 정의에 따라 하나씩 그림을 추가해 보면 ㄱ⇨ㄴ⇨ㄷ 순서로 그림이 점점 완성되어 가지? 그러면서 문제도 어렵지 않게 해결할 수 있어.
다만 이 문제에서는 평행사변형의 성질 등 중학교 과정의 기본적인 도형의 성질을 이용하고 있으므로 그 내용만 기억하고 있다면 좋겠군.

벡터에 관련된 문제는
첫째, 도형에 관한 문제이므로 문제의 조건에 맞게 도형을 그린다.
둘째, 도형의 성질을 적용하기 어려운 경우(중학교 과정의 도형의 성질이 아닌 경우) 좌표 도입을 이용하여 계산한다.

15. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,\ 3)$, $B_1(-3,\ 0)$, $C_1(0,\ -3)$, $D_1(3,\ 0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.
호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자.
호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은? [4점]

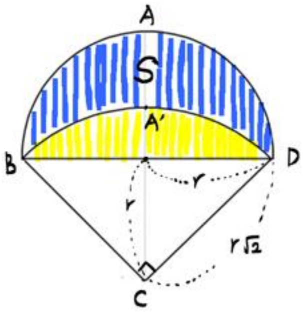


① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

[교과개념] 무한등비급수의 활용
[행동영역] 전형적인 풀이를 요하는 문제
도형의 성질을 이용해서 첫째 항과 둘째 항을 구한다.
S_n과 T_n은 합동이므로 그 넓이가 같아야 해.
따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2S_n$$

가 돼. 따라서 S_1과 S_2를 구하면 되겠네.



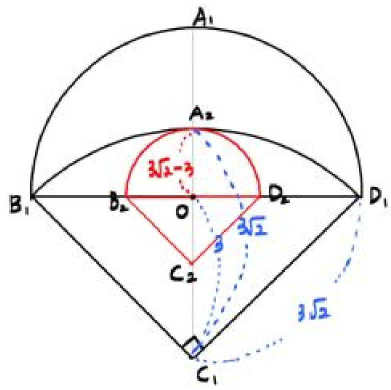
위 그림에서 S를 구해보자. 반원 ABD의 넓이에서 활꼴 A′BD의 넓이를 빼면 되는데, 활꼴 A′BD는 부채꼴 A′BCD에서 삼각형 BCD를 빼면 돼.
따라서

$$S=\frac{1}{2}\pi r^2-\left\{\frac{1}{4}\pi(r\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(r\sqrt{2})^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\pi r^2-\left(\frac{1}{2}\pi r^2-r^2\right)$$
$$=r^2$$

이야.

[풀이]
S_1에서 바깥쪽 원의 반지름이 3이므로

$$S_1=3^2=9$$



위 그림에서와 같이 S_2의 바깥쪽 원의 반지름은

$$\overline{C_1A_2}-\overline{C_1O}$$

이므로

$$3\sqrt{2}-3$$

이다. 따라서

$$S_2=(3\sqrt{2}-3)^2=3^2\times(\sqrt{2}-1)^2=9\times(3-2\sqrt{2})$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2S_n$$

$$=2S_1+2S_2+\cdots$$

$$=2\times9+2\times9\times(3-2\sqrt{2})+\cdots$$

$$=\frac{2\times9}{1-(3-2\sqrt{2})}$$

공비가 $3-2\sqrt{2}$ 인
무한등비급수이므로

$$=\frac{2\times9}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{2}-1}$$

분모의 유리화 :
분모, 분자에 $\sqrt{2}+1$을
곱한다.

$$=9(\sqrt{2}+1)$$

[다른 풀이]
닮음비가 일정하므로 닮음비를 생각해보자.
S_1과 S_2의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OA}_1}$과 $\overline{\mathrm{OA}_2}$의 길이의 비와 같다. 따라서

$$3:(3\sqrt{2}-3)=1:(\sqrt{2}-1)$$

S_1과 S_2의 넓이의 비는 닮음비의 제곱에 비례하므로

$$1:(\sqrt{2}-1)^2=1:(3-2\sqrt{2})$$

S_1의 하나에 S_2가 하나만 생기므로 공비는

$$r=3-2\sqrt{2}$$

이다. 이 때 $0<r<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 수렴한다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2S_n$$

무한급수의 성질

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}S_n$$

$S_1=9,\ r=3-2\sqrt{2}$
이므로

$$=2\times\frac{9}{1-(3-2\sqrt{2})}$$

$$=2\times\frac{9}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{2}-1}$$

$$=9(\sqrt{2}+1)$$

이다.

16. 자연수 n $(n\geq2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n<b_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_2<\frac{1}{4}$

ㄴ. $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$

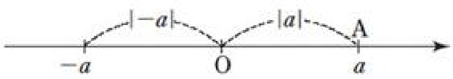
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[교과개념] 함수의 그래프 / 수열의 일반항

(1) $y=|f(x)|$의 그래프

① 절댓값의 뜻

수직선 위에서 실수 a에 대응하는 점을 A라 할 때, 원점 O에서 점 A까지의 거리 $\overline{\mathrm{OA}}$를 a의 절댓값이라 하고, 기호로 $|a|$와 같이 나타낸다.



따라서 절댓값의 정의에 의하여 다음이 성립한다.

$a>0$이면 $|a|=a$

$a=0$이면 $|a|=0$

$a<0$이면 $|a|=-a$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geq0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

절댓값을 없애기 위해서는 절댓값 안이 0이 되는 점을 기준으로 나누어서 생각해야 해.

② $y=|f(x)|$을 생각해보자

먼저 $f(x)=0$을 기준으로 나누어서 생각하면

$$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq0)\\-f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

로 나타낼 수 있다.

따라서 $y=|f(x)|$의 그래프는 $f(x)\geq0$인 부분은 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 $f(x)<0$인 부분은 $y=-f(x)$의 그래프를 그린다.

이 때, $y=-f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭한 그래프이다.

그러므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $f(x)<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭시키면 된다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항

수열에서 제n항 a_n이 n에 대한 식으로 주어지면 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하여 그 수열의 모든 항을 구할 수 있으므로 n에 대한 식으로 나타낸 제n항 a_n을 그 수열의 일반항이라고 한다.

[보기]

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$ 의 일반항은

$a_1=2\times1,\ a_2=2\times2,\ a_3=2\times3,$

$a_4=2\times4,\ a_5=2\times5,\ \cdots$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=2\times n=2n$

이다.

위 [보기]에서 일반항을 구하는 과정을 잘 살펴보면 5개의 항을 나열하여 규칙을 찾고 있어.

$a_1=2\times1,\ a_2=2\times2,\ \cdots,\ a_5=2\times5,\ \cdots$

이렇게 규칙을 찾고 있는 거지.

교과서를 잘 읽다보면 위와 같은 방법으로 등차수열의 일반항을 구하고 있음을 파악할 수 있지.

[행동영역] 문제에 제시된 $a_n,\ b_n$을 그래프를 사용하여 수학적으로 표현하기.

그래프의 관찰을 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하고 이를 적용하기.

직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 $a_n,\ b_n\ (a_n<b_n)$라 했으므로 그래프를 그려서 교점을 찾아봐야지?

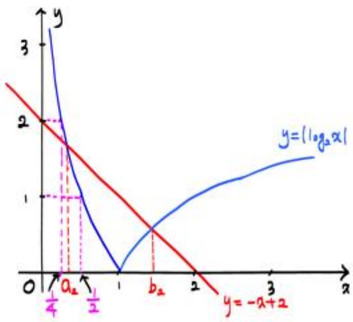
또한 ㄱ에서 $a_2<\dfrac{1}{4}$를 제시한 이유도 알아내야 해.

그럼 a_2를 그래프를 통해서 찾아보자.

$y=|\log_2 x|$의 그래프는 $\log_2 x=0$ 즉, $x=1$인 점을 기준으로 나누어서 생각하면

$$y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x & (x<1)\\ \log_2 x & (x\geq1)\end{cases}$$

와 같다. 따라서 직선 $y=-x+2$와 곡선 $y=|\log_2 x|$의 그래프를 그려보면



와 같이 그릴 수 있어.

이 때, a_2는 $y=-x+2$와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와의 교점의 x좌표 이므로

$-a_2+2=\log_{\frac{1}{2}} a_2$

로 계산할 수 있어. 그런데 이걸 풀이할 수가 없잖아.

a_2의 값을 구할 수 없으므로 $\dfrac{1}{4}$의 의미를 알아내야 해. 위 그림에서 보듯이 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프와 $y=2$가 만나는 x의 좌표 값이 $\dfrac{1}{4}$야.

즉, $2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$인 거야. 이것을 그래프에 표시해보면

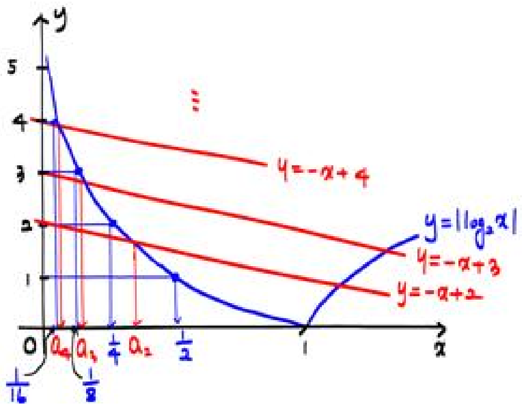
$\dfrac{1}{4}<a_2<\dfrac{1}{2}$

임을 알 수 있어.

이걸 파악하라고 a_2를 제시한 거야.

즉, 수열의 일반항을 구하기 위해서 $a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots(\because\ n\geq2)$를 나열하여 규칙을 찾아보라는 뜻이야.

그럼 ㄱ에서 제시한 방법대로 $a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n$을 구해보자.



위 그래프를 관찰해보면

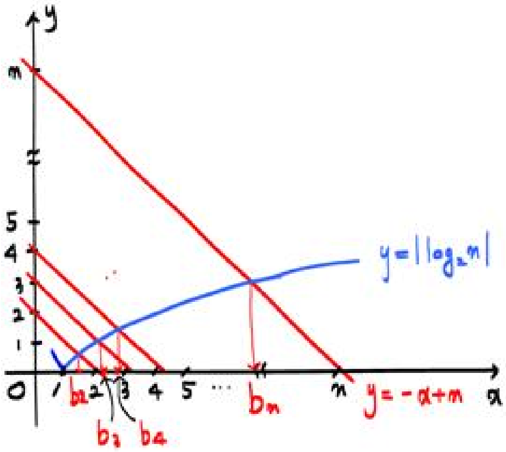
$\dfrac{1}{4}<a_2<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}<a_3<\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}<a_4<\dfrac{1}{8},\ \cdots$

임을 알 수 있어. 따라서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<a_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

임을 추론할 수 있지?

같은 방법으로 $\{b_n\}$을 추론해보자.



위의 그림과 같이 그래프를 그리고 교점의 x좌표를 추론해보면 $\{a_n\}$를 추론할 때와는 다르게 규칙을 찾을 수 없어.

다만 b_n은 $y=\log_2 x$와 $y=-x+n$의 교점의 x좌표이므로

$$\log_2 b_n = -b_n + n$$

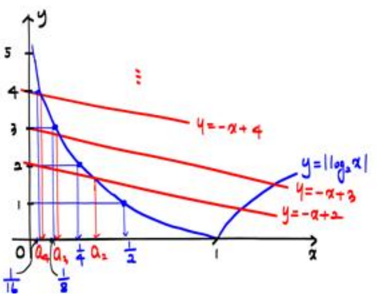
이 성립한다는 것 밖에 몰라.

여기까지가 ㄱ을 보고 생각할 수 있는 내용이야.

이처럼 합답형 문제(ㄱ, ㄴ, ㄷ 형태)의 문제는 ㄱ 의 의미를 정확하게 해석하는 것이 제일 먼저야^^

[풀이]

ㄱ



위의 그림에서

$$\frac{1}{4} < a_2$$

이므로 ㄱ 은 옳지 않다.

ㄴ

위의 그림에서 $\{a_n\}$의 규칙을 추론해보면

$$\frac{1}{4} < a_2 < \frac{1}{2},\ \frac{1}{8} < a_3 < \frac{1}{4},\ \frac{1}{16} < a_4 < \frac{1}{8},\ \cdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < a_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n} < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로

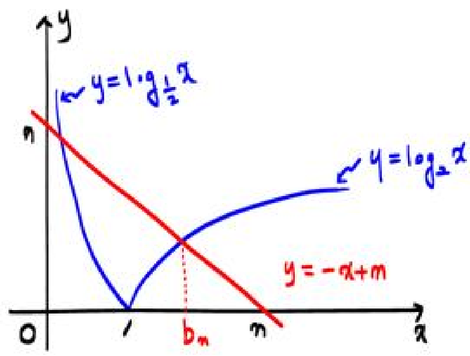
$$0 < a_{n+1} < a_n$$

이 성립한다. 따라서

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

이다. 그러므로 ㄴ 은 옳다.

ㄷ



위의 그림에서

$$1 < b_n < n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

$$\log_2 b_n = -b_n + n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠식의 양변을 n으로 나누면

$$\frac{1}{n} < \frac{b_n}{n} < 1 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉢$$

이고, ㉠ 식의 양변을 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$0 < \log_2 b_n < \log_2 n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉣$$

이다. ㉣식에 ㉡식을 대입하여 정리하면

$$-b_n + n < \log_2 n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉤$$

㉤식의 양변을 n으로 나누면

$$-\frac{b_n}{n} + 1 < \frac{\log_2 n}{n}$$

$$\therefore\ 1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉥$$

이다. ㉢식과 ㉥식을 이용하면

$$\therefore\ 1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$$

이다. 따라서 ㄷ 은 옳다.

따라서 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

17. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x < 1$일 때, $g(x) = f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여
$g(x+2) = g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(-1) = f(1)$이고 $f'(-1) = f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1) < 0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1) > 0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c) = 0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

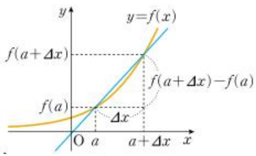
[교과개념] 미분가능성 / 도함수의 활용
함수의 주기성 (고1과정 삼각함수 편에서)

(1) 미분가능성과 미분가능한 함수

함수 $y = f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a + \Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다.



여기서, $\Delta x \rightarrow 0$일 때 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하며, 기호로

$f'(a)$

와 같이 나타낸다.

또한, 함수 $y = f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y = f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 특히, 함수 $y = f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y = f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

평균변화율의 극한값이 존재하면 미분가능하다고 정의하고 있어. 그럼 극한값이 존재하기 위한 조건은? 그렇지!! (좌극한)=(우극한)일 때야. 따라서 미분가능하다는 것은 (좌미분계수)=(우미분계수)일 때 겠지? 즉,

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

일 때 미분가능하다고 하는 거야.

(2) 주기함수 (고1 과정)

일반적으로 상수함수가 아닌 함수 $f(x)$의 정의역의 모든 원소 x에 대하여

$f(x+p) = f(x)$

를 만족시키는 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고, 이 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 주기함수 $f(x)$의 **주기**라고 한다.

예를 들어, 함수 $y = \sin\theta$ 는 주기함수이고 그 주기는 2π이다.

$y = f(x)$의 주기가 p이면 $f(x+p) = f(x)$이다.
하지만, 그 역은 성립하지 않는다.
무슨 말이냐면
$g(x+2) = g(x)$가 성립한다고 해서 주기가 2인 함수라고 얘기할 수 없다는 거야.
주기가 1이라도

$g(x) = g(x+1) = g(x+2) = \cdots$

가 되어 $g(x+2) = g(x)$를 만족하기 때문이지.
그런데 문제에서

$-1 \leq x < 1$

이라는 범위가 정해졌고, 이 범위와 함께 $g(x+2) = g(x)$를 생각하면 $g(x)$는 주기가 2인 함수가 되겠지.

[행동영역] 미분가능성의 정의와 함수의 주기성을 이용하여 참 거짓을 판단하기.

먼저 ㄱ이 무엇을 얘기하는지 확인해볼 필요가 있어.

$x = a$미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $h(x)$를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$$

와 같이 정의할 때, $h(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다는 것을 어떻게 판단할 수 있을까?
첫 째, $x = a$에서 $h(x)$는 연속이어야 해. 즉,

$f(a) = g(a)$

둘 째, (우 미분계수)=(좌 미분계수)임을 보여주면 되는데 이때, 우 미분계수는 $f'(a)$이고 좌 미분계수는 $g'(a)$이므로 $f'(a) = g'(a)$이면 $h'(a)$가 존재하게 돼. 이해 돼?

$y=f(x)$는 사차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하지?

그럼 $y=g(x)$는?

$x=\cdots,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \cdots$

에서는 미분가능한지 불가능하지는 몰라. 하지만 위의 x를 제외하면 사차함수 $y=f(x)$ $(-1 \leq x < 1)$의 그래프가 반복해서 그려지므로 미분가능하게 돼.

따라서 $y=g(x)$가

① $x=1$에서 연속. 즉, $f(-1)=f(1)$

② $x=1$에서 미분 가능 즉,

(우 미분계수)는

$$\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$$

$g(x+2)=g(x)$ 이므로

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$-1\leq x<1$에서 $g(x)=f(x)$ 이므로

$$=f'(-1)$$

(좌 미분계수)는

$$\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$-1\leq x<1$에서 $g(x)=f(x)$ 이므로

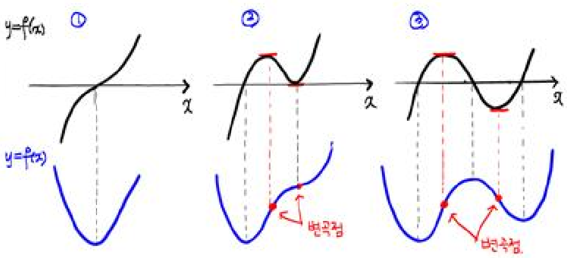
$$=f'(1)$$

이므로 $f'(-1)=f'(1)$

위의 ①, ②조건을 모두 만족하면 $y=g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분 가능한 함수가 돼.

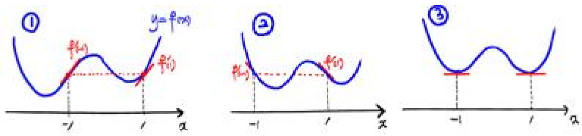
자 그럼 $y=g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분 가능하도록 하게 만드는 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 어떻게 생겼는지 생각해보자. (ㄷ의 질문이 이 내용을 묻고 있다.)

사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 도함수 $y=f'(x)$(삼차함수)에 의해 정해지므로 도함수의 그래프를 그리고 그에 따른 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 아래와 같이 크게 3가지 경우로 나눌 수 있어.



이 중에서 $f'(-1)=f'(1)$이 될 수 있는 그래프는 ③번 경우밖에 없어.

③번 경우에 대하여 $f'(-1)=f'(1)$이 되는 경우는 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있어.



여기까지가 ㄱ을 해석한 내용이야 ^^;

이처럼 합답형 문제에서는 ㄱ이 문제를 해결하는 중요한 정보를 가지고 있는 경우가 많아. 따라서 ㄱ을 정확하게 해석하는 것이 무엇보다 중요해.

[풀이]

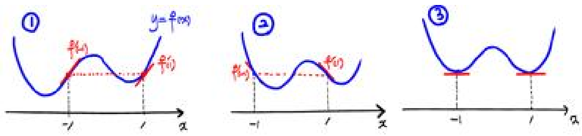
ㄱ

$f(-1)=f(1)$, $f'(-1)=f'(1)$이면 $y=g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분 가능하다.

따라서 ㄱ은 옳다.

ㄱ의 결론!

모든 실수 x에 대하여 $y=g(x)$가 미분가능하도록 하는 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 세 종류이다.



ㄴ

$y=g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분 가능하면 $f(-1)=f(1)$, $f'(-1)=f'(1)$이다.

그러나 $f'(1)$, $f'(0)$의 값은 알지 못한다.

$y=f(x)$에 따라서 $f'(1)$ 또는 $f'(0)$은 양수, 음수, 0 모두 가질 수 있다.

그러므로 항상 $f'(0)f'(1)<0$가 성립한다고 할 수 없다. ㄱ 결론의 그림에서 ③번 그림이 반례이다.

따라서 ㄴ은 옳지 않다.

좀 더 확실히 하기 위해서 반례가 되는 함수식을 찾아보면 되는데

$f(x)=(x+1)^2(x-1)^2$이라 하면

$f(-1)=f(1)=0,\ f'(-1)=f'(1)=0$

이므로 $f'(0)f'(1)=0$ 이므로 옳지 않다는 것을 알 수 있어.

ㄷ

ㄱ의 결론에서 모든 실수 x에 대하여 $y=g(x)$가 미분가능하도록 하는 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 세 종류이다. 이 때 $f'(1)>0$인 그림은 ①번 그림이다.

①번 그림을 보면 $c<-1$인 c에 대하여 $f'(c)=0$이 되는 $x=c$가 존재하므로 ㄷ은 옳다.

따라서 ㄱ, ㄷ이 옳다.

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[교과개념] 다항함수의 미분법_곱의 미분법

(1) $y=f(x)g(x)$의 미분법

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

[행동영역] 다항함수의 미분법의 계산

[풀이]

$f(x)=(x^2+1)(x^2+x-2)$

$f'(x)=2x(x^2+x-2)+(x^2+1)(2x+1)$

$\therefore\ f(2)=2\cdot 2(2^2+2-2)+(2^2+1)(2\cdot 2+1)$

$=16+25$

$=41$

[풀이 2]

$x^2-7x=t$ ⋯⋯㉠ 로 치환하면

$\sqrt{x^2-7x+15}=x^2-7x+9$

$\sqrt{t+15}=t+9$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉡

이때 (근호 안)≥ 0 이므로 $t\geq -15$

또한 좌변, $\sqrt{t+15}\geq 0$이므로 우변, $t+9\geq 0$

이어야 한다. 따라서 $t\geq -9$

($t\geq -9$ 이게 무연근을 없애는 역할을 한다.)

㉡ 식의 양변을 제곱하면

$t+15=(t+9)^2\quad (t\geq -9)$

$t+15=t^2+18t+81$

$t^2+17t+66=0$

$(t+11)(t+6)=0$

$\therefore\ t=-6\quad (\because t\geq -9)$ ⋯⋯㉢

㉢식을 ㉠식에 대입하면

$x^2-7x=-6$

$x^2-7x+6=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 모든 실근의 곱은

$1\times 6=6$

이다.

19. 무리방정식 $\sqrt{x^2-7x+15}=x^2-7x+9$의 모든 실근의 곱을 구하시오. [3점]

[교과개념] 무리방정식

(1) 무리방정식의 풀이

무리방정식을 풀 때에는 양변을 제곱하여 무리식을 없앤다.

하지만 이 방법은 필요조건일 뿐 충분조건이 아니다.

즉, $a=b\rightarrow a^2=b^2$ 은 참이지만, 그 역은 거짓이다.

따라서 변형된 방정식의 해이지만 원래 방정식을 만족하지 않는 해가 존재하게 된다. 이를 무연근이라 한다. 따라서 무리방정식을 풀 때에는 반드시 무연근인지 아닌지를 확인해야 한다.

[행동영역] 전형적인 풀이(교과서의 예제 수준)

이 문제는 치환을 하는 전형적인 문제야. 이 때

$x^2-7x=t$

$x^2-7x+15=t$

$x^2-7x+9=t$

$\sqrt{x^2-7x+15}=t$

이렇게 치환의 방법도 여러 가지가 있어. 어떻게 치환할지는 문제를 보고 그 때 그 때 결정하는 것이 좋아.

또한 치환할 때에는 새로운 변수 t의 범위를 파악해 주어야 해.

[풀이 1]

$\sqrt{x^2-7x+15}=x^2-7x+9$에서

$\sqrt{x^2-7x+15}=t\quad (t\geq 0)$이라 하면

$x^2-7x+15=t^2$⋯⋯㉠, $\therefore\ x^2-7x=t^2-15$

이므로

$\sqrt{x^2-7x+15}=x^2-7x+9$

$t=t^2-15+9$

$t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$

$\therefore\ t=3\quad (\because t\geq 0)$⋯⋯㉡

$t\geq 0$ 이 무연근을 없애는 역할을 하고 있다.

㉡식을 ㉠식에 대입하면

$x^2-7x+15=9$

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=6$

따라서 모든 실근의 곱은

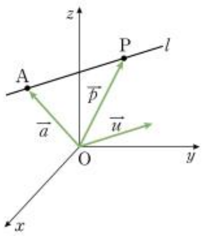
$1\times 6=6$

이다.

20. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$에 수직이고 점 $(1,\ -5,\ 2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

[교과개념] 직선과 평면의 방정식

(1) 직선의 방정식



점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식을 구해 보자.

직선 l 위의 임의의 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}$이므로

$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$ (두 벡터가 평행일 필요충분조건)

를 만족하는 실수 t가 존재한다.

그런데 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ ………… ㉠

이다.

역으로, ㉠을 만족하는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 실수 t의 값이 변함에 따라 직선 l을 그린다.

이때, ㉠을 직선 l의 벡터방정식이라 하고, 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

이제, 직선 l의 벡터방정식 ㉠을 성분으로 나타내어 보자.

벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$라 하고, 점 P, A의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라고 하면

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$이므로 ㉠은

$$(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(a,\ b,\ c)$$
$$=(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

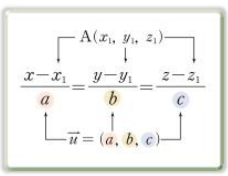
㉡을 직선 l의 매개변수방정식이라 하고, t를 매개변수라고 한다.

$t=\frac{x-x_1}{a}$, $t=\frac{y-y_1}{b}$

$t=\frac{z-z_1}{c}$

여기서, $abc\neq 0$일 때, ㉡에서 t를 소거하면

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$



이 된다. 이때, 이 직선 l의 방향벡터는

$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$

이다.

직선의 방정식에서 방향벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$, 직선위의 정점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 알면

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \quad \cdots\cdots\ ①$$

로 직선의 방정식을 만들 수 있어.

그런데, 직선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$를 구할 때에는 매개변수의 방정식

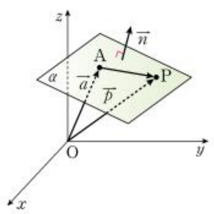
$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

을 이용하여 $\mathrm{P}(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$로 잡을 수 있어.

문제에 따라서 직선의 방정식을 ①번으로 잡을 때도 있고 ②번으로 잡을 때도 있어. 이는 교과서의 기본 예제를 통해서 익히도록 하자.

(2) 평면의 방정식

좌표공간에서 주어진 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 방정식을 구해 보자.



평면 α 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$이다.

여기서, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라고 하면

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ ………………………… ㉠

역으로, ㉠을 만족하는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 평면 α 위에 있다.

이때, ㉠을 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 벡터방정식이라 하고, 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 **법선벡터**라고 한다.

이제, 평면 α의 벡터방정식 ㉠을 성분으로 나타내어 보자.

벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하고, 점 P, A의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라고 하면

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$

이고,

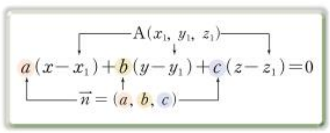
$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$

이므로 ㉠은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이 된다.

이때, 이 평면 α의 법선벡터는



$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

이다.

평면의 방정식을 이렇게도 생각할 수 있어.

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ ………………… ㉠

에서

$\vec{p}\cdot\vec{n}-\vec{a}\cdot\vec{n}=0$

$\therefore \vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$

따라서 법선벡터와의 내적이 일정한 점 P의 자취가 평면이 됨을 알 수 있어.

[행동영역] 전형적인 문제(교과서의 예제 수준)

평면의 방정식을 구할 때에는 두 가지만 알면 돼.

(1) 법선벡터(평면에 수직인 벡터)

(2) 평면 위의 한 정점의 좌표

문제에서 평면 위의 한 정점의 좌표는 있는데 법선벡터가 없어. 대신에 평면에 수직인 직선의 방정식이 주어져 있네?

직선의 방정식에는 방향벡터(직선과 평행인 벡터)가 주어지는데, 이 방향벡터가 바로 평면의 법선벡터의 역할을 하고 있어.

[풀이 1]

직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$ 에서 방향벡터 $\vec{u}$는

$\vec{u}=(2,\ 3,\ 1)$

이다. 이 벡터 $\vec{u}$는 평면의 방정식에서 법선벡터의 역할을 하므로 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 3,\ 1)$, 평면 위의 정점 $\mathrm{A}(1,\ -5,\ 2)$인 평면의 방정식을 구하는 문제이다. 따라서

$2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$

$2x+3y+z+11=0$

이다. 따라서

$a=3,\ b=1,\ c=11$

이므로

$a+b+c=3+1+11=15$

이다.

[풀이 2]

$\vec{n}=(2,\ 3,\ 1)$, $\mathrm{A}(1,\ -5,\ 2)$, $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하면 평면의 방정식은

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$(2,\ 3,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 1)\cdot(1,\ -5,\ 2)$

$2x+3y+z=2-15+2$

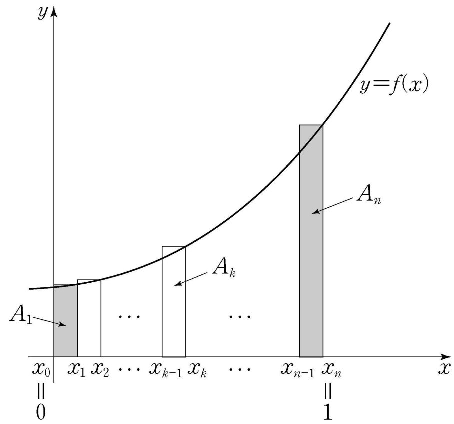
$\therefore\ 2x+3y+z=-11$

이다.

21. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\ (a\geq 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$

이라 하자. 폐구간 $[x_{k-1},x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\ )$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오. [4점]

[교과개념] 정적분의 정의

(1) 정적분의 정의

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구해 보자.

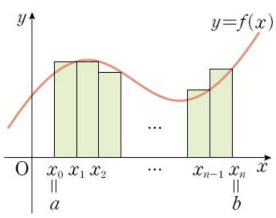
구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$(a=)x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n(=b)$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면 다음과 같다.

$\Delta x=\frac{b-a}{n}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값이 세로의 길이인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면



$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다.

여기서, $n \to \infty$ 이면 S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워진다.

$$\therefore\ S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재한다. 이때, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

구분구적법이란 구하고자하는 넓이(또는 부피)를

① n 등분

② 넓이(또는 부피의) 근삿값

③ Squeeze 정리를 이용한 근삿값의 극한값을 계산

이야.

정적분의 정의 또한 이와 마찬가지 방법으로 하고 있어. 그런데 왜 하필 $f(x) \geq 0$일 때를 가정해서 설명하고 있을까? 그것은 $f(x) \geq 0$일 때는 정적분과 넓이가 같기 때문이지. 그래서 넓이로 정적분을 설명하고 있어.

그럼 $f(x) < 0$일 경우에 정적분은? 이때는 넓이와는 다른 값을 갖지. 이 경우의 넓이를 S라 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = -S$$

가 돼.

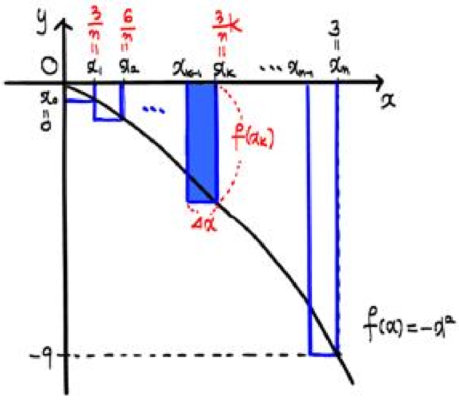
교과서의 학습과정 상 위의 내용을 배울 때에는 정적분의 기본정리를 배우지 않았으므로 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$의 값을 구할 수 있는 방법은 무한급수로 바꾸어(구분구적법) 계산할 수밖에 없어.

[예제]

정적분의 정의에 의하여 $\int_0^3 (-x^2)dx$의 값을 구하여라.

[풀이]

* 무엇인가를 외우려고 하지 말고 교과서에 설명대로 한 번 따라해 보는 것이 좋아.



위 그림과 같이 $f(x)=-x^2$의 그래프에서 구간 $[0,\ 3]$을 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n = 3$$

이라 하면 소구간의 길이는

$$\triangle x = \frac{3}{n}$$

이다. 따라서 정적분의 정의에 의해

$$\int_0^3 (-x^2)\,dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^2\right\}\frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{27}{n^3}\right)k^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$
$$= -9$$

이다.

이처럼 정적분의 정의를 무한급수로 고칠 때 그림을 한 번 그려보면 쉽게 고칠 수 있어.

정적분의 기본성질을 배우고 나면

$$\int_0^3 (-x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\times 3^3 = -9$$

로 쉽게 계산할 수 있어.
그럼 정적분의 정의를 이제 써먹을 일은 없는 것일까?
정적분의 기본성질을 배우고 나면 이제는 무한급수를 정적분으로 고친 후 위의 방법대로 쉽게 계산할 수 있어. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

로 식을 변형하는 거지. 이 때 역시 그래프를 그려보면 쉽게 알 수 있어.

[예제]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(2+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

의 값을 구하여라.

[풀이 1]

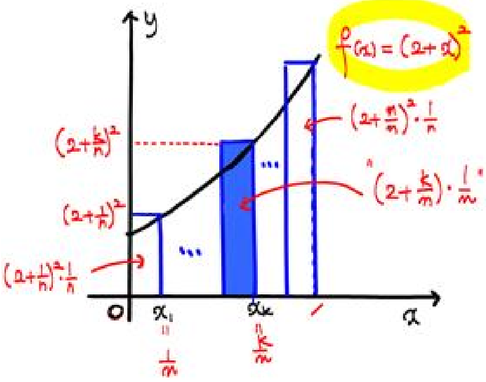
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(2+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이 때, $x_k = \dfrac{k}{n}$ 이라 하면

$$0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n = 1$$

이므로 $f(x) = (2+x)^2$의 그래프에 대하여 구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 것이다.



위의 그림에서 파란색 직사각형의 넓이의 합이

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 (2+x)^2dx = \left[\frac{1}{3}(2+x)^3\right]_0^1 = \frac{19}{3}$$

[풀이 2]

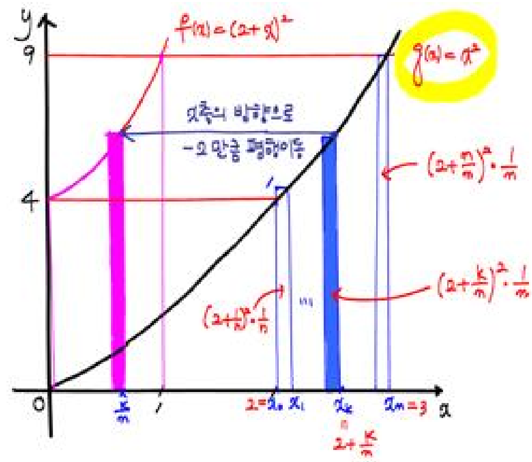
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(2+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이 때, $x_k = 2 + \dfrac{k}{n}$이라 하면

$$2 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n = 3$$

이므로 $g(x) = x^2$의 그래프에 대하여 구간 $[2,\ 3]$을 n등분한 것이다.



위의 그림에서 파란색 직사각형의 넓이의 합이

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이다 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$=\int_2^3 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 = \frac{1}{3}(27-8) = \frac{19}{3}$$

이다.

[풀이 1] 과 [풀이 2]는 x_k를 어떻게 잡느냐에 따라 함수식이 달라짐을 보여주고 있어. x_k를 어떤 식으로 잡느냐에 따라서 구간이 정해지고, 함수식이 정해져.
그런데, 함수식이 다를 지라도 그 값은 같지?
그 이유는 $g(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동($x \to x+2$)시킨 함수가 $f(x)$이기 때문이지.
그래서 넓이가 같을 수밖에 없는 거야^^

[예제]

극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$을 구하여라.

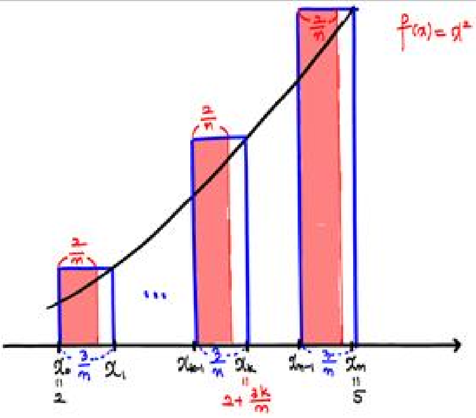
[풀이]

$x_k=2+\frac{3k}{n}$이라 하면

$2=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=5$

이므로 $f(x)=x^2$의 그래프를 구간 $[2,\ 5]$를 n등분한 것임을 알 수 있다.

따라서 $\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$은 아래 그림에서 색칠된 직사각형의 넓이임을 알 수 있다.



이는 전체 넓이$\left(\int_2^5 x^2dx\right)$의 $\frac{2}{3}$이므로

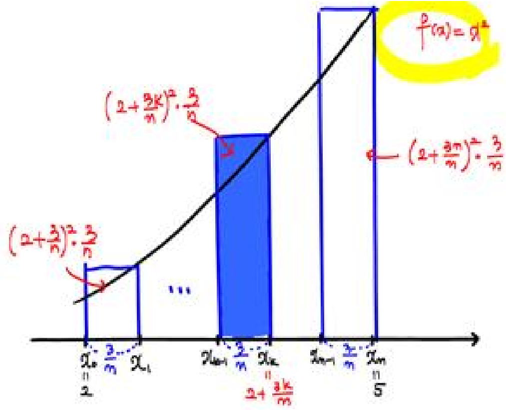
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$
$$=\frac{2}{3}\int_2^5 x^2dx$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}(5^3-2^3)=26$$

[다른 풀이]

$x_k=2+\frac{3k}{n}$이라 하면

$2=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=5$

이므로 $f(x)=x^2$의 그래프를 구간 $[2,\ 5]$를 n등분한 것임을 알 수 있다.



따라서 위 그림에서 보듯이

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}=\int_2^5 x^2dx$$

이다. 그런데 구하라는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

이다. 따라서

$$\frac{2}{n}=\frac{3}{n}\times\frac{2}{3}$$

으로 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}$$
$$=\frac{2}{3}\int_2^5 x^2dx$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}(5^3-2^3)=26$$

이다.

이와 같이 무한급수를 정적분으로 고칠 때에도 함수의 그래프를 그려서 확인해보는 습관을 들이는 것이 좋아.

이상을 다음과 같이 공식화 시킬 수 있지.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

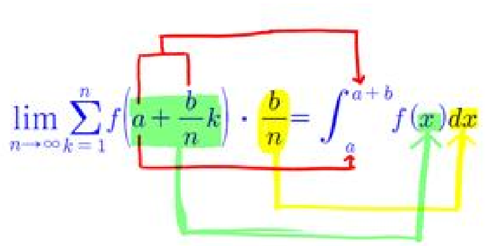
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a}{n}k\right)\cdot\frac{a}{n}=\int_0^a f(x)dx$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b}{n}k\right)\cdot\frac{b}{n}=\int_a^{a+b} f(x)dx$

$\displaystyle =\int_0^b f(a+x)dx$

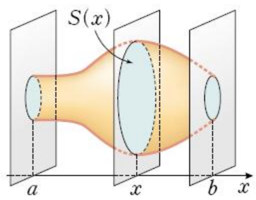
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

여러 참고서를 보면

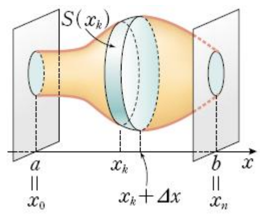


와 같이 변형되는 과정을 암기하기 쉽도록 표현한 것들이 많은데, 다시 강조하지만, 암기보다는 그래프를 이용해서 식을 변형하는 과정을 이해하는 것이 더욱 중요해!!!
따라서 위의 (1)~(4)의 공식을 모두 그래프를 그려서 확인해보는 것이 좋은 학습방법임을 명심하자 ^^

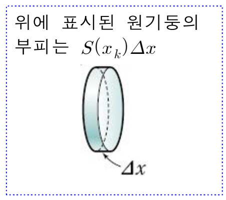
(2) 입체도형의 부피



오른쪽 그림과 같이 어떤 입체도형이 주어져 있고 한 직선을 x축으로 정하였을 때, x좌표가 a, b인 두 점을 지나 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부분의 부피를 구해 보자.
x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 분점을 차례로
$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n(=b)$
이라 하고, 소구간의 길이를 Δx라고 하자.



또, 좌표가 x_k인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 입체를 잘랐을 때, 생기는 단면의 넓이를 $S(x_k)$라고 하자.
그러면 밑면의 넓이가 $S(x_k)$이고 높이가 Δx인 k번째 기둥의 부피는 $S(x_k)\Delta x$이므로 n개의 기둥의 부피의 합 V_n은



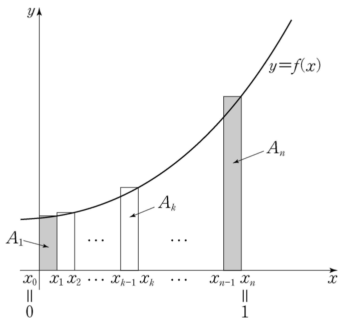
$$V_n=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

따라서 구하는 입체의 부피 V는 구분구적법과 정적분의 정의에 의하여

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$
$$=\int_a^b S(x)dx$$

입체도형의 부피 또한 구분구적법을 이용하여 무한급수로 표현하고 이를 정적분으로 고쳐서 해결하고 있어.
따라서 무한급수로 표현된 식의 의미를 해석하여 그림으로 표현해 보는 것이 중요해.

이제 문제를 다시 보자.



이런 그림이 하나 주어져 있고

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$$

를 구하라고 했네.

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=1$$

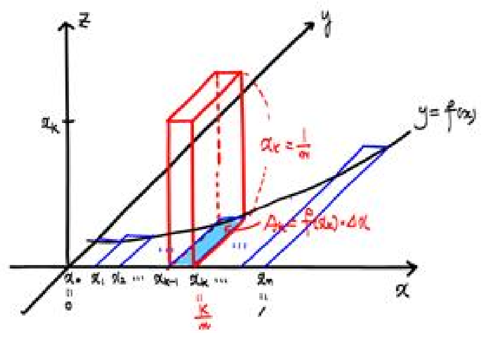
이므로 $x_k=\dfrac{k}{n}$, $\triangle x=\dfrac{1}{n}$이고 따라서 A_k는 k번째 직사각형의 넓이이므로

$$A_k=f(x_k)\triangle x=f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

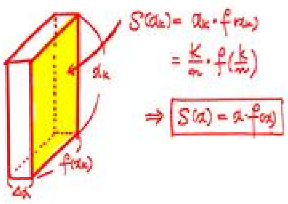
겠지? 그럼

$$\frac{k}{n}A_k=\frac{k}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=x_kf(x_k)\triangle x$$

의 의미가 뭘까?



위 그림에서 빨간색 직육면체의 부피를 의미하게 돼. 이 부피를 다른 식으로 표현하면



$\dfrac{k}{n}A_k=S(x_k)\triangle x$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\triangle x=\int_0^1 S(x)\,dx$$

이다. 이 때 $S(x)=xf(x)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}A_k=\int_0^1 xf(x)dx$$

이다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$$
$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}A_k=8\int_0^1 xf(x)dx$$

를 구하라는 문제야.

이제 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a\geqq 0,\ b>0)$에서 $a,\ b$만 구하면 되는데, 이는

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

을 이용해서 구하면 되겠네.

[풀이]

$$A_1=f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+a\left(\frac{1}{n}\right)+b\right\}$$

$$A_n=f(1)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1+a+b)$$

위의 두 식을 더하면

$$A_1+A_n$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b\right)+(1+a+b)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{1+an+(1+a+2b)n^2}{n^2}$$
$$=\frac{(1+a+2b)n^2+an+1}{n^3}$$

이다. 문제에서 $A_1+A_n=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$이라 했으므로

$$\begin{cases}1+a+2b=7\\ a=0\end{cases}$$

이 성립해야 한다. 따라서 $b=3$ 이다.

$$\therefore\ f(x)=x^2+3$$

따라서 구하라는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$$
$$=8\int_0^1 xf(x)dx$$
$$=8\int_0^1 x(x^2+3)dx$$
$$=8\int_0^1 (x^3+3x)dx$$
$$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$
$$=2+12=14$$

이다.

다른 방법!
이 방법은 무한급수로 표현된 식을 정적분으로 고치는 방법론적(공식처럼 사용)인 얘기인데,
구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점의 좌표를

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=1$$

라 잡았으니까 $x_k=\dfrac{k}{n}$이 되어야 해. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8\cdot\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8x_kf(x_k)\triangle x\\&=\int_0^1 8xf(x)\,dx\end{aligned}$$

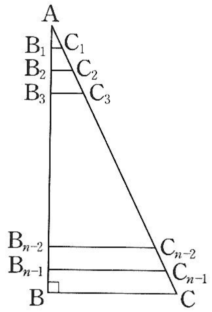
> $a=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k,\ x_n=b$일 때
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x=\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> 이므로
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\to\int_a^b,\ x_k\to x,\ \triangle x\to dx$$
>
> 로 바꿔주면 된다.

이다.

그런데 수험생들이 공식처럼 암기하고, 문제에 적용하고 있으니 평가원에서는 이미 1996학년도 수능에서부터 무한급수를 그림으로 식의 의미를 해석하는 문제를 냈어.
이 문제 전에 출제되었던 무한급수와 정적분에 관한 문제를 세 문제 정도 살펴보자.

[1996학년도 수능 인문/자연 11번]

$\overline{\mathrm{AB}}=2,\overline{\mathrm{BC}}=1,\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다.
변 AB를 n등분한 점을 오른쪽 그림과 같이
$\mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3,\ \cdots,\mathrm{B}_{n-1}$
이라 하고, 각 점에서 변 BC에 평행하게 직선을 그어 변 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만나는 점을 각각
$\mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3,\ \dots\ ,\mathrm{C}_{n-1}$
이라 할 때



$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B_kC_k}}^{\,2}$$

의 값은? [1 점]

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{2\pi}{3}$ ⑤ π

이 문제는

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^{2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\pi\cdot\overline{\mathrm{B_kC_k}}^{2}\cdot\frac{2}{n}$$

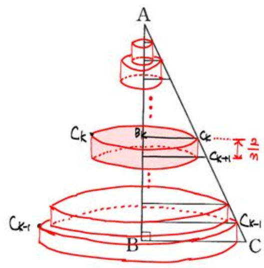
의 의미를 주어진 그림을 통해 해석해보자는 거야.

[풀이]

$\pi\cdot\overline{\mathrm{B_kC_k}}^2\cdot\dfrac{2}{n}$은 반지름의 길이가 $\overline{B_kC_k}$이고 높이가 $\dfrac{2}{n}$인 원기둥의 부피이다. 또한 $\overline{\mathrm{AB}}=2$를 n등분한 점이 $\mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3,\ \cdots,\mathrm{B}_{n-1}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}}=\frac{2}{n}$$

이다. 따라서



$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\pi\cdot\overline{\mathrm{B_kC_k}}^2\cdot\frac{2}{n}$은 오른쪽 그림에서의 원기둥의 부피의 합을 의미한다.

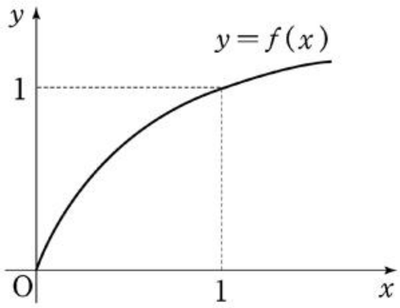
그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\pi\cdot\overline{\mathrm{B_kC_k}}^2\cdot\frac{2}{n}$는 구분구적법에 의해 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BC}}=1$이고 높이가 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 직원뿔의 부피를 의미한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\pi\cdot\overline{\mathrm{B_kC_k}}^2\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot2=\frac{2\pi}{3}$$

이렇게 풀고 나니 완벽한 교과서에서 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구하는 문제와 똑같음을 알 수 있어.

[2005학년도 수능 가형 10번]

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

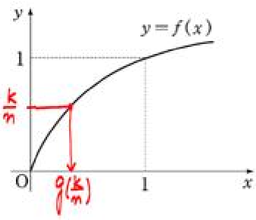
와 같은 값을 갖는 것은? [4점]

① $\int_0^1 g(x)\,dx$　　② $\int_0^1 xg(x)\,dx$

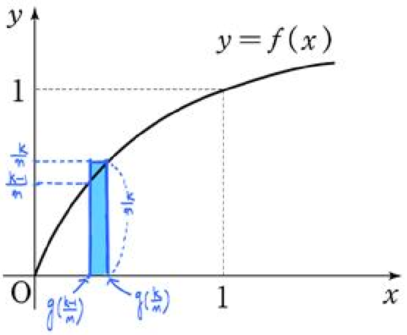
③ $\int_0^1 f(x)\,dx$　　④ $\int_0^1 xf(x)\,dx$

⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

이 문제 역시 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 의미를 주어진 그래프를 이용해서 해석하라는 문제야. 여기서 역함수는 정의역이 y축이라는 것만 알고 있다면 어렵지 않게 해결할 수 있어. 즉, 오른쪽 그림과 같이 $g\left(\frac{k}{n}\right)$의 값을 x축 위에 표현해보자는 거야.

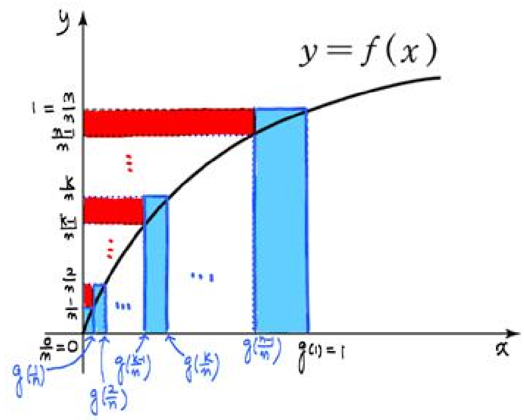


따라서 $\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 의미는 아래 그림에서 직사각형의 넓이를 의미하게 돼.



[풀이]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$은



위 그림에서 파란색 직사각형의 넓이의 합의 극한값을 의미한다.

이 때 빨간색 직사각형의 넓이의 합의 극한값은 $y=g(x)$, x축, 그리고 $x=1$에 둘러싸인 부분의 넓이를 의미하고, $y=g(x)$와 $y=f(x)$는 서로 역함수의 관계에 있으므로

『$y=f(x)$, y축, 그리고 직선 $y=1$에 둘러싸인 부분의 넓이』

로 해석할 수 있다. 따라서 파란색 직사각형의 넓이의 합의 극한값은

『$y=f(x)$, x축, 직선 $x=1$에 둘러싸인 부분의 넓이』

로 해석할 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

이다.

[2009학년도 수능 가형 27번]

폐구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0,\ f(1)=1$이며, 개구간 $(0,\ 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$일 때, $\displaystyle\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은? [3점]

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$ ② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

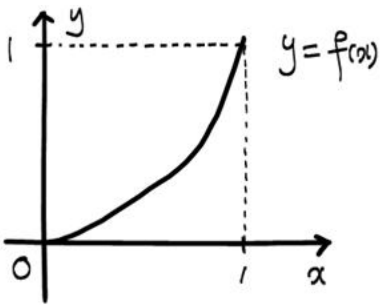
③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ ④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

이번 문제는 지금까지 풀었던 문제의 반대과정을 묻고 있어. 즉, 정적분을 무한급수로 표현하라는 거야.
이 문제 역시 그림을 그려서 확인해보면 쉬워.
먼저 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$가

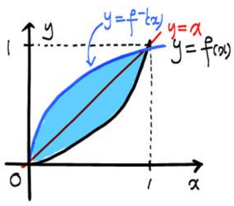
① $f(0)=0,\ f(1)=1$
② $f'(x)>0$
③ $f''(x)>0$

이렇게 세 조건이 있어.
①번 조건은 함수가 지나는 점이고
②번 조건은 증가함수를 의미하며
③번 조건은 아래로 볼록한 함수를 의미하지.
따라서 위의 세 조건에 의해 함수 $y=f(x)$를 아래 그림과 같이 그릴 수 있어.



그럼 $\displaystyle\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$

는 무엇을 의미할까?
$y=f^{-1}(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 $y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭시키면



오른쪽 그림과 같이 그릴 수 있고 이때 파란색이 칠해진 부분의 넓이가 바로 $\displaystyle\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$가 돼.

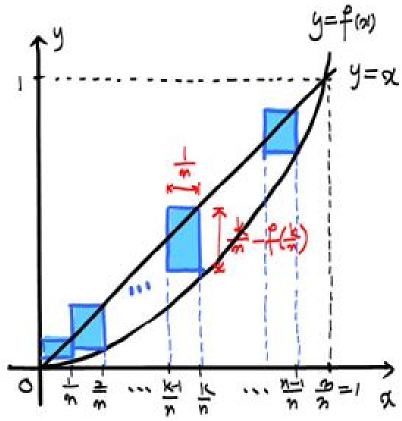
이 넓이를 어떻게 구할까?
위 그림이 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=x,\ y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배가 되겠지? 따라서

$$\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx=2\times\int_0^1 \{x-f(x)\}dx$$

가 돼.

[풀이]

$\displaystyle\int_0^1 \{x-f(x)\}dx$를 정적분의 정의를 이용하여 무한급수로 표현해 보자.



위 그림과 같이 구가 $[0,\ 1]$을 n등분하여 각 분점(양 끝점 포함)의 x좌표를 차례로

$$0=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=1$$

이라 하면 $x_k=\dfrac{k}{n},\ \triangle x=\dfrac{1}{n}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \{x-f(x)\}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x_k-f(x_k)\}\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

이다. 따라서

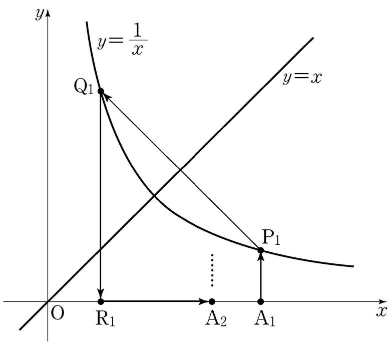
$$\begin{aligned}&\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx\\&=2\times\int_0^1 \{x-f(x)\}dx\\&=2\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}\end{aligned}$$

이다.

22. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(2, 0)$이다.
> (나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
> (2) 점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
> (3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (4) 점 R_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

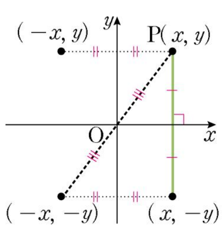


[교과개념] 수열_수열의 귀납적 정의
도형의 이동(고1 과정)_대칭이동

(1) 점의 대칭이동

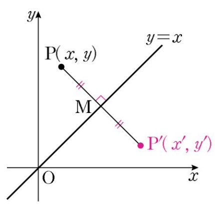
(i) x축에 대한 대칭이동 :
$x'=x,\ y'=-y$
즉, $(x,\ -y)$

(ii) y축에 대한 대칭이동 :
$x'=-x,\ y'=y$
즉, $(-x, y)$



(iii) 원점에 대한 대칭이동 :
$x'=-x,\ y'=-y$
즉, $(-x, -y)$

(iv) $y=x$에 대한 대칭이동 :
$x'=y,\ y'=x$
즉, $(y,\ x)$



[행동영역] 관찰을 통한 문제해결의 핵심원리를
발견하는 능력이 필요

문제의 상황을 잘 관찰해보니, 같은 과정을 무한 반복하게 되어 있어. 이런 문제는 나열 즉,
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots$
을 통해 규칙을 찾는 것보다 x_{n+1}과 x_n의 관계식(이를 점화식이라 한다.)을 만들어서 이 관계식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하는 것이 더 효율적이야.

[풀이]
점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$이라 하면 점 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$이다.
(나)에서 제시된 조건에 따라 x_{n+1}과 x_n과의 관계식을 유도해 보자.
점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$에서

(1) 점 P_n의 좌표는 $\left(x_n,\ \dfrac{1}{x_n}\right)$

(2) 점 Q_n의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{x_n},\ x_n\right)$

(3) 점 R_n의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{x_n},\ 0\right)$

(4) 점 A_{n+1}의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{x_n}+1,\ 0\right)$

따라서

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+1 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ㉠$$

이다. 문제에서 $x_1=2$이므로 이를 ㉠식에 대입하면

$$x_2=\frac{1}{x_1}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

마찬가지 방법으로 $x_3,\ x_4,\ x_5$를 구해보면

$$x_3=\frac{1}{x_2}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

$$x_4=\frac{1}{x_3}+1=\frac{3}{5}+1=\frac{8}{5}$$

$$x_5=\frac{1}{x_4}+1=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$$

따라서 $p=8,\ q=13$ 이다.
$\therefore\ p+q=8+13=21$

이 문제에서 x_5까지 나열하여 관찰해보니 수열 $\{x_n\}$은 '피보나치수열'과 관계있음을 알 수 있어.
수열 $\{a_n\}$을 $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots$
이라 하면 $x_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$임을 알 수 있어. 고등학교 과정에서는 피보나치수열의 일반항을 구하지 않아.
따라서 이 문제에서 일반항 x_n을 구할 수 없어.
그러니까 x_5를 구하라고 문제를 낸 거야.

23. 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_5 = \dfrac{1}{6}$을

만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{q}{p}$일 때,

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는

서로소인 자연수이다.) [4점]

[교과개념] 등비수열 / 무한등비급수

(1) 등비수열의 일반항

수열

은 첫째항 1에 차례로 2를 곱하여 얻은 수열이다. 일반적으로 첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 각 항이 얻어질 때, 이 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이라고 할 때, 제n항 a_n과 제$n+1$항 a_{n+1} 사이에는

$$a_{n+a} = ra_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같은 관계가 성립한다.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 r = ar$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$$
$$\vdots$$

따라서 일반항 a_n은

$$a_n = a_{n-1}r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

등비수열의 일반항을 구하는 과정을 보자.

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = ra_n$$

에서 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$를 대입하여 규칙을 추론하고 있지? 이 과정이 중요해. 지금 문제와는 상관이 없지만 수열 뒤쪽에 있는 '수열의 귀납적 정의'에서 점화식으로 주어진 수열의 일반항을 찾는 과정과 동일하기 때문이야.

등비수열의 일반항 $a_n = a_1 r^{n-1}$을 두 가지 의미로 해석을 해 둘 필요가 있어.

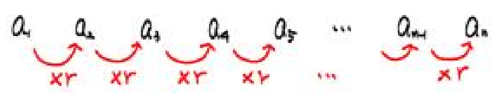
첫 째는 함수식의 역할을 한다는 거야.
일반항을 알고 있다면 자연수 n에 대한 그 함숫값 a_n을 구할 수 있고, 그 역의 과정 a_n의 값에 대한 자연수 n을 구할 수 있지.
예를 들어 $a_n = 2^{n-1}$일 때, 제10항 a_{10}과 $a_n = 1024$일 때의 n을 구해보자.

$$a_{10} = 2^{10-1} = 2^9 = 512$$

$1024 = 2^{10} = 2^{11-1}$이므로 제11항, 즉 $n = 11$

와 같이 마치 공식처럼 계산할 수 있는 거지.

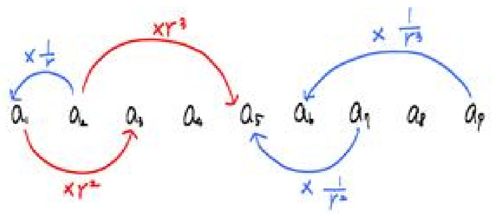
둘째는 두 항간의 관계를 의미해.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r이라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있어.



이를 관찰해보면 공비 r을 곱할때마다 오른쪽으로 한 칸씩 이동함을 알 수 있어. 즉,

$$a_1 \times r \times r = ar^2 = a_3$$

이 되는 거지. 따라서 $a_n = a_1 r^{n-1}$은 a_1에서 오른쪽으로 $n-1$번 이동했음을 의미하게 돼. 그럼 왼쪽으로 이동하려면? 그렇지 공비 r의 곱셈에 관한 역원이 $\dfrac{1}{r}$을 곱해주면 되겠지.



따라서

$$a_1 \times r^2 = a_3,\ a_2 \times r^3 = a_5,\ \cdots$$

$$a_2 \times \frac{1}{r} = a_1,\ a_7 \times \frac{1}{r^2} = a_5,\ a_9 \times \frac{1}{r^3} = a_6,\ \cdots$$

(위 식을 변형하면 $\dfrac{a_2}{a_1} = r$, $\dfrac{a_7}{a_5} = r^2$, $\dfrac{a_6}{a_9} = \dfrac{1}{r^3}$, $\cdots$)

와 같이 나타낼 수 있어.
이와 같이 두 항간의 관계를 표현한 식의 표준이 일반항 $a_n = a_1 r^{n-1}$이라고 할 수 있어. 따라서 굳이 첫째항 a_1을 포함한 식으로 표현해야할 필요는 없는 거야. 문제에 따라서 그 때 그 때 필요한 두 항의 관계를 표현하면 돼.
등차수열도 이와 마찬가지 방법으로 점검해 두자.

(2) 무한등비급수의 수렴과 발산

무한등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

$(a \neq 0)$은

① $|r| < 1$이면 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$이면 발산한다.

[행동영역] 두 단계의 사고 과정을 요하는 문제

2010학년도 9월 모의 나형 21번과 동일한 형태의 문제임을 알 수 있지?

등비수열의 일반항을 $a_n = a_1 r^{n-1}$이라 하면

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = (a_1 r^{n-1})(a_1 r^n)(a_1 r^{n+1}) = a_1^3 r^{3n}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_1^3 (r^3)^n$$

$$= a_1^3 r^3 + a_1^3 r^6 + a_1^3 r^9 + \cdots$$

$$= \frac{a_1^3 r^3}{1-r^3}$$

(단, $-1 < r^3 < 1$)

이다.

그럼 이제 $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_5 = \dfrac{1}{6}$을 이용하여

a_1^3과 r^3을 구하면 되겠네.

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

이라 하자.

i) $a_5 = a_2 r^3$ 이므로

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} r^3 \quad , \quad r^3 = \frac{1}{3} \quad \therefore\ r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

ii) $a_1 = a_2 \times \dfrac{1}{r}$ 이므로

$$a_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt[3]{3} \quad \therefore\ a_1^3 = \frac{3}{8}$$

따라서 구하라는 무한급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_1^3 (r^3)^n$$

$$= \frac{a_1^3 r^3}{1-r^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$$

이다. 따라서 $p = 16,\ a = 3$이다.

$\therefore\ p + q = 16 + 3 = 19$

24. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t $(t \geq -1)$에 대하여 $-1 \leq x \leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.

$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[교과개념] 도함수의 활용_그래프 그리기 / 정적분

[행동영역] 주어진 문제의 상황을 그래프를 통하여 해석하기.

두 단계 이상의 사고 과정을 요하는 문제

$y=f(x)$의 그래프

⇨ $y=|f(x)|$의 그래프

⇨ $y=g(t)$의 그래프

⇨ $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

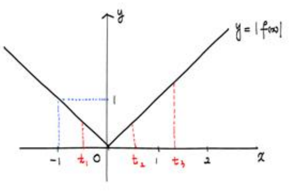
이렇게 단계별로 사고를 해야 하는 문제야.

특히 $y=|f(x)|$의 그래프를 관찰하여 $y=g(t)$의 그래프를 찾는 것이 중요하지.

이를 위해서 간단한 예를 스스로 생각하는 것도 좋은 학습 방법이야.

예를 들어 $f(x)=x$라 가정하고 $y=g(t)$ $(t \geq -1)$의 그래프를 그려보자.

먼저 $y=|f(x)|$를 그려보면 오른쪽 그림과 같다.



이 때 t의 다음과 같이 나누어서 생각해보자.

i) $-1 \leq t_1 < 0$일 때,

$|f(x)|$의 최댓값은 $x=-1$일 때의 1이다.

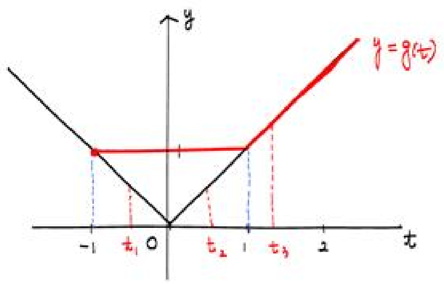
ii) $0 \leq t_2 < 1$일 때,

$|f(x)|$의 최댓값은 $x=-1$일 때의 1이다.

iii) $t_3 \geq 1$일 때,

$|f(x)|$의 최댓값은 $x=t_3$일 때 $|f(t_3)|$이다.

따라서 $y=g(t)$의 그래프는 아래와 같다.



어때? 이해 돼?

[풀이]

i) 먼저 $y=f(x)$의 그래프를 그려보자.

$f(x)=x^3-3x-1$

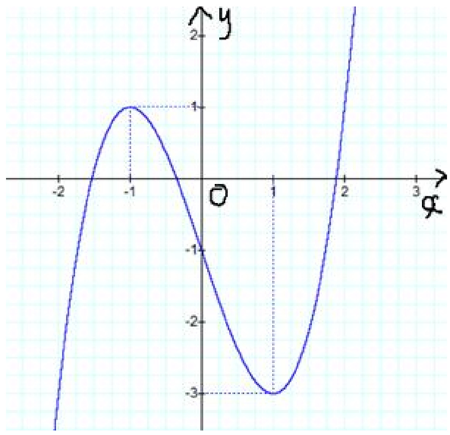
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$의 근을 구하면

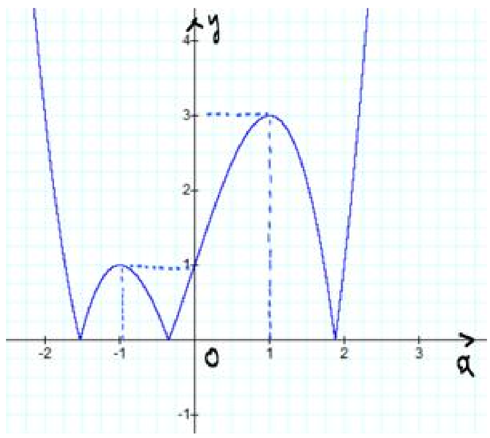
$x=-1$ 또는 $x=1$이다.

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고 이를 이용해서 그래프를 그리면 다음과 같다.

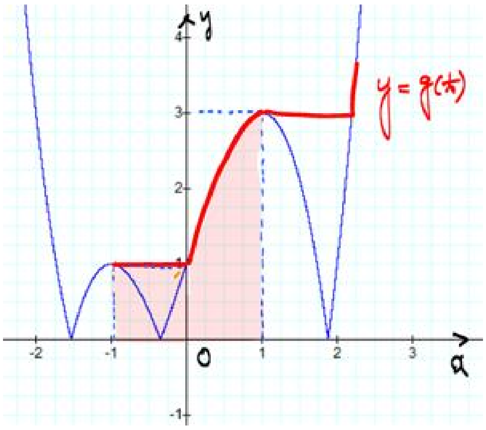
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극댓값 1	↘	극솟값 -3	↗



ii) $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 중에서 $f(x)<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭시킨 그래프이므로 다음과 같다.



iii) $y=|f(x)|$의 그래프를 관찰하면서 $t \geq -1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값 $g(t)$를 찾아보면 아래 그림과 같다.



$$g(t)=\begin{cases} 1 & (-1 \leq t<0) \\ |f(t)|=-f(t) & (0 \leq t<1) \\ 3 & (1 \leq t<\alpha) \\ \cdots & \end{cases}$$

이다.

문제에서 구하라는 $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ 은 위 그림에서 색칠된 부분의 넓이이다. 따라서

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{0} 1\,dt+\int_{0}^{1}\{-f(t)\}\,dt$$

$$=1+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)\,dt$$

$$=1+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$$

$$=1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{13}{4}$$

이다. 따라서 $p=4,\ q=13$

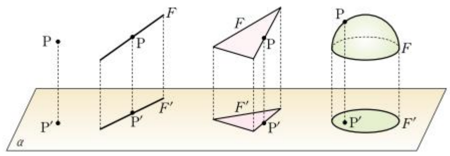
$\therefore\ p+q=4+13=17$

25. 좌표공간에서 x축을 포함하고 xy평면과 이루는 각의 크기가 $\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 α라 하자. 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy평면 위로의 정사영이 영역 $\{(x,\ y,\ 0)\,|\,x+3y-2 \leq 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의 값을 구하시오. [4점]

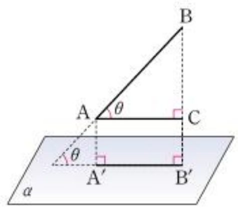
[교과개념] 공간도형_정사영
이차곡선_타원, 타원의 접선
부등식의 영역(고1 과정)

(1) 정사영

점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P$'$을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 또, 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A$'$B$'$이라 하고, 직선 AB가 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ라고 하면



$\overleftrightarrow{AA'} \perp \alpha,\ \overleftrightarrow{BB'} \perp \alpha$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AA'}\ /\!/\ \overleftrightarrow{BB'}$

점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 C라고 하면 □AA$'$B$'$C는 직사각형이므로

$\overline{A'B'}=\overline{AC},\ \overline{A'B'}\ /\!/\ \overline{AC}$

$\therefore\ \angle BAC=\theta$

따라서 △ABC에서 $\overline{AC}=\overline{AB}\cos\theta$이므로

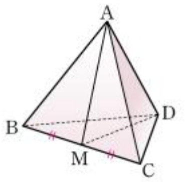
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

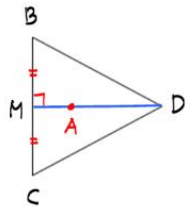
정사영이란 '수선의 발'의 모임 이라고 생각해야 해. '그림자'라고 기억하고 있다가는 문제를 풀이할 때 실수할 수 있어.
정사영을 배우는 가장 큰 목적은 공간도형을 평면도형으로 만들기 위함이야. 공간도형(삼차원)을 평면에 그리다보면 왜곡이 생기는데 이 왜곡을 없애는 방법 중 하나가 단면의 관찰 즉, 정사영을 그려보는 거야.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이
정사면체 ABCD에서
$\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 위치관계를
살펴볼 때, 점 A를
평면 BCD위로의 수선의 발을
내린 단면을 살펴보면
오른쪽 그림과 같이
보일 것이고,

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

임을 쉽게 알 수 있어.
참고로 단면의 관찰을 하면
면 AMD는 선분 MD로 보일
거야.



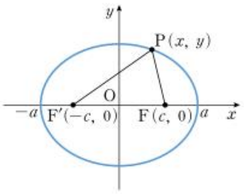


(2) 타원의 방정식

초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식
두 초점
$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$
으로부터 거리의 합이
$2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(단, $a>b>0,\ b^2=a^2-c^2$)



(3) 타원의 접선의 방정식

① 접선의 기울기가 m일 때

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인
접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

② 접점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의
접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

여러 가지 미분법에서 '음함수의 미분법'을
배웠으므로 이를 이용해서 접선의 방정식을 구할 수도
있어.
음함수 미분법을 이용해서 접점에서의 접선의
기울기를 구할 수 있잖아.
이 방법은 스스로 해 보길 바라.

③ 곡선 밖의 한 점이 주어질 때

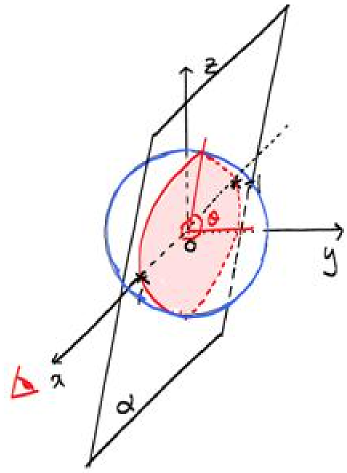
이때는 위의 두 공식중 하나를 사용하면 돼.

[행동영역] 두 단계 이상의 사고과정을 요하는 문제

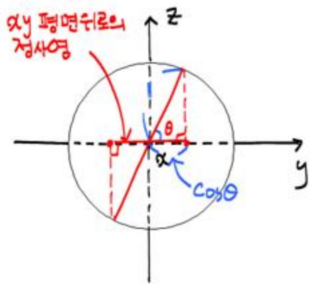
[1단계]

주어진 문제의 상황을 그림을 그려 확인한다.

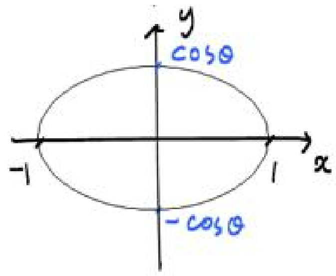
$x^2+y^2+z^2=1$과 평면 α를 공간상에서 그려보면
다음과 같다.



그림에서 빨간색 부분이 구와 평면이 만나는
도형이야. 이 부분은 원인데, 평면에다 공간도형을
그리다 보니 왜곡이 생길 수밖에 없어. 이 도형을
xy평면위로 정사영을 내리기 전에 x축에서 이
도형을 바라본 단면을 생각해보자.
오른쪽 그림과 같이
구와 평면이 만나는
도형은
빨간색 직선처럼
보일거야.
xy평면위로 정사영은
오른쪽 그림에서 빨간색
직선이 y축 위로
정사영을 내린 모습이야.



이 모습을 xy평면위에 그려보면 다음과 같이 돼.

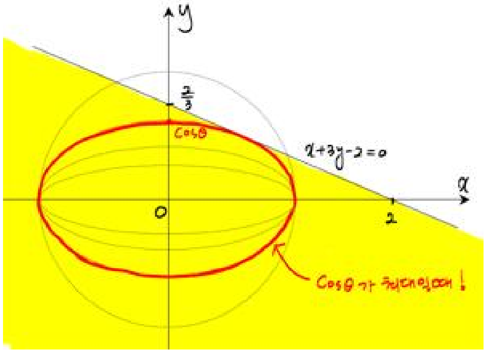


장축의 길이가 2, 단축의 길이가
$2\cos\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$인 타원이 되는 거야.

[2단계]

이제 부등식의 영역 $x+3y-2\leqq 0$ 안에 위에서
그린 타원을 그려보자.

타원의 꼭지점은 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ \cos\theta)$, $(0,\ -\cos\theta)$ 이고 $0<\cos\theta<1$이므로 $\cos\theta$의 값에 변화를 주면서 타원을 그려보면 다음과 같다.



이 때 부등식의 영역 $x+3y-2 \leqq 0$에 포함되면서 $\cos\theta$가 최대일 때는 위의 그림과 같이 빨간색 타원일 때야. 즉, 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$의 접선이 $x+3y-2=0$일 때 $\cos\theta$가 최대가 됨을 알 수 있어.

이제 계산할 일만 남았지?

[풀이]

타원 $x^2+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$의 접선이 $x+3y-2=0$ 즉, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$일 때 $\cos\theta$가 최대가 된다.

접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이므로 타원의 접선의 방정식의 공식 중 기울기에 관한 공식

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

에 $m=-\dfrac{1}{3}$, $a=1$, $b=\cos\theta$를 대입하면

$$y=-\frac{1}{3}x\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}$$

이므로 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$과 $y=-\dfrac{1}{3}x+\sqrt{\dfrac{1}{9}+\cos^2\theta}$는 같은 식이다. 따라서

$$\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{9}+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3} \quad \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because 0<\cos\theta<1)$$

따라서 $\cos\theta$의 최댓값 $M=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

$$60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$$

26. $\tan\theta = -\sqrt{2}$ 일 때, $\sin\theta\tan2\theta$의 값은?

(단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[교과개념] 삼각함수_배각의 공식

삼각함수의 정의 (고1 과정)

(1) 배각의 공식

① $\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

② $\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

③ $\tan2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

배각의 공식은 삼각함수의 덧셈정리에서 유도한다.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

에서 $\alpha = \beta = \theta$라 하면

$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$\therefore\ \cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

이다. 마찬가지 방법으로 $\sin2\theta$, $\tan2\theta$를 유도하기 바라.

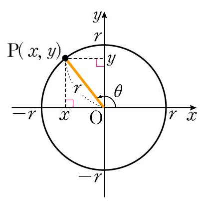
(2) 삼각함수의 정의

삼각함수의 정의

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

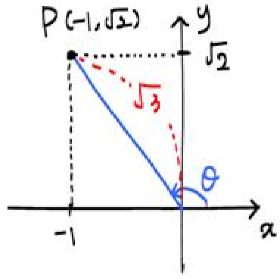


[행동영역] 기본적인 삼각함수의 공식 적용하기

배각의 공식을 적용하기 전에 $\tan\theta = -\sqrt{2}$를 이용하여 $\sin\theta$를 구해야 해. 이때 삼각함수의 정의에 의해서 구하면 돼.

$\tan\theta$의 정의는 $\dfrac{y}{x}$ 즉, $\dfrac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}$ 로 정의하잖아.

따라서 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{2})$에 대하여 동경 $\overline{\mathrm{OP}}$가 이루는 각을 θ라 생각하면 돼.



따라서 위 그림과 같이 점 P를 잡으면

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

임을 알 수 있어.

[풀이]

$\tan\theta = -\sqrt{2}$ 일 때, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이므로

$\sin\theta\tan2\theta$

$$= \sin\theta \cdot \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2(-\sqrt{2})}{1-(-\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{-2\sqrt{2}}{-1}$$

$$= \frac{-4}{-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

27. 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접할 때, 실수 k의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{e^2}$ ③ $\dfrac{1}{e^4}$ ④ $\dfrac{1}{1+e}$ ⑤ $\dfrac{1}{1+e^2}$

[교과개념] 도함수의 활용_접선의 방정식
여러 가지 미분법

(1) $y=\sqrt{f(x)}$의 미분법

멱공식 $y=x^n$일 때, $y'=nx^{n-1}$(n은 유리수)와 합성함수의 미분법을 이용하여 유도한다.

$$y=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}-1}\times f'(x)$$

$$=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(x)$$

$$=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

(2) 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

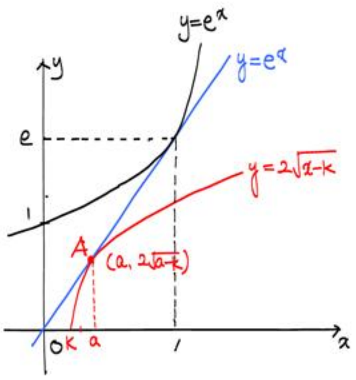
[행동영역] 문제의 상황을 그래프를 이용하여 해석하기.

$y=e^x$ 위의 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식을 구해보면

$$y=e(x-1)+e$$

$$\therefore\ y=ex$$

이다. 이제 문제의 상황을 그림으로 표현해보면 다음과 같다.



$y=2\sqrt{x-k}$ 위의 점 $\mathrm{A}\,(a,\ 2\sqrt{a-k})$에서의 접선의 방정식이 $y=ex$임을 알 수 있다.

따라서 $y=2\sqrt{x-k}$의 접선의 방정식과 $y=ex$가 같음을 이용해서 k값을 구할 수 있겠네.

[풀이]

$y=2\sqrt{x-k}$ 위의 점 $\mathrm{A}\,(a,\ 2\sqrt{a-k})$에서의 접선의 방정식을 구해보자.

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x-k}}$이므로 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{\sqrt{a-k}}$이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{a-k}}(x-a)+2\sqrt{a-k}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{a-k}}x-\frac{a}{\sqrt{a-k}}+2\sqrt{a-k}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이다. ㉠ 식과 $y=ex$는 같은 식이어야 하므로

$$\frac{1}{\sqrt{a-k}}=e\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉡$$

$$-\frac{a}{\sqrt{a-k}}+2\sqrt{a-k}=0\ \cdots\cdots\ ㉢$$

이다. ㉢식을 먼저 간단히 하면

$$2\sqrt{a-k}=\frac{a}{\sqrt{a-k}}$$

$$2(a-k)=a$$

$$2a-2k=a,\quad \therefore\ a=2k\ \cdots\cdots\cdots\ ㉣$$

㉣식을 ㉡식에 대입하면

$$\frac{1}{\sqrt{2k-k}}=e$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=e,\quad \therefore\ k=\frac{1}{e^2}$$

이다.

[다른 풀이] 고1 과정의 무리함수와 직선과의 관계를 이용하면

$y=2\sqrt{x-k}$와 $y=ex$가 접하므로

$ex=2\sqrt{x-k}$는 중근을 가져야 한다.

위 식을 양변 제곱하면

$$e^2x^2=4x-4k$$

$$e^2x^2-4x+4k=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠식이 중근을 갖기 위해서는 $\dfrac{D}{4}=0$ 이므로

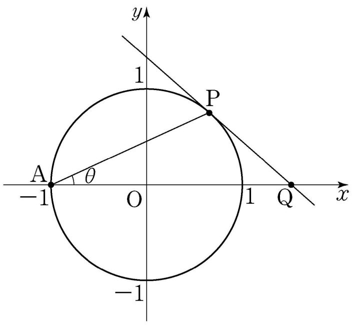
$$2^2-e^2\cdot 4k=0$$

$$4e^2k=4,\quad \therefore\ k=\frac{1}{e^2}$$

이다.

28. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(-1,\,0)$과 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값은?

(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[교과개념] 삼각함수의 극한

삼각함수의 각 변환 공식 (고1 과정)

(1) 삼각함수의 극한

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$와 함수의 극한에 관한 성질을 이용

[보기]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

(2) 삼각함수의 각 변환 공식

단위원에서 직각삼각형의 합동임을 이용

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

[증명]

오른쪽 그림에서

점 P의 좌표 $(a,\ b)$는

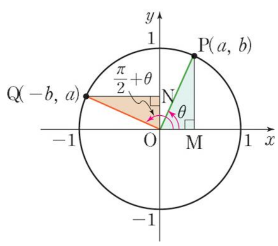
$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$

로 나타낼 수 있고

점 Q의 좌표 $(-b,\ a)$는

$$-b=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$a=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$



로 나타낼 수 있다. ($\because\ \triangle\mathrm{OPM}\equiv\triangle\mathrm{OQN}$)

따라서

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

이다.

[행동영역] 길이를 각의 함수로 표현하기.

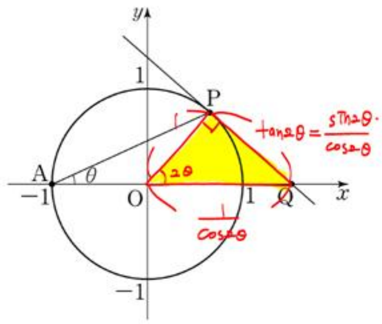
원 위의 점 P에서의 접선? 그럼 $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{OQ}}$겠네?

따라서 삼각형 OQP는 직각삼각형이다.

또한 (중심각)$=2\times$(원주각) 이므로

$\angle\mathrm{POQ}=2\angle\mathrm{PAQ}$, $\therefore\ \angle\mathrm{POQ}=2\theta$

이다.



위 그림과 같이

$\overline{\mathrm{PQ}}=\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{\cos 2\theta}$이다.

[풀이]

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}-\frac{1}{\cos 2\theta}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{1}{\cos 2\theta}\cdot\frac{\sin 2\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

여기서 $\theta-\frac{\pi}{4}=t$로 치환하면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-0$일 때,

$t\to -0$이고, $2\theta=\frac{\pi}{2}+2t$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=-\sin 2t$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=\cos 2t$이다.

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{t\to -0}\frac{1}{-\sin 2t}\cdot\frac{\cos 2t-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to -0}\frac{1}{-\sin 2t}\cdot\frac{(\cos 2t-1)(\cos 2t+1)}{t(\cos 2t+1)}$$

$$=\lim_{t\to -0}\frac{1}{-\sin 2t}\cdot\frac{-\sin^2 2t}{t}\cdot\frac{1}{\cos 2t+1}$$

$$=\lim_{t\to -0}2\times\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{1}{\cos 2t+1}$$

$$=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$$

삼각함수의 각 변환 공식의 유도과정 (공식의 암기보다는 유도과정의 이해가 중요)

삼각함수의 각 변환 공식

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

(3) $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

(5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

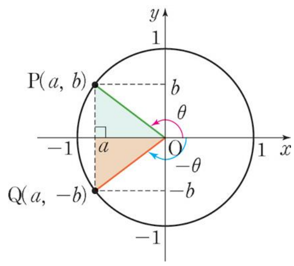
오른쪽 그림에서
점 P의 좌표 $(a,\ b)$는
$a=\cos\theta$
$b=\sin\theta$
로 나타낼 수 있고,
점 Q의 좌표 $(a,\ -b)$는
$a=\cos(-\theta)$
$-b=\sin(-\theta)$
로 나타낼 수 있다. (∵ P, Q는 x축 대칭)
따라서

$\cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$

이다. 한편 $\tan(-\theta)=\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$이므로

$\tan(-\theta)=\dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

이다.



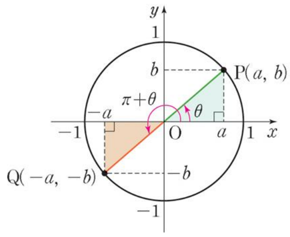
오른쪽 그림에서
점 P의 좌표 $(a,\ b)$는
$a=\cos\theta$
$b=\sin\theta$
로 나타낼 수 있고
점 Q의 좌표 $(-a,\ -b)$는
$-a=\cos(\pi+\theta)$
$-b=\sin(\pi+\theta)$
로 나타낼 수 있다. (∵ P, Q는 원점 대칭)
따라서

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\ \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

이다. 또한

$\tan(\pi+\theta)=\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\tan\theta$

이다.



$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$에서 θ에 $-\theta$을 대입하면

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\theta)&=\cos\{\pi+(-\theta)\}\\&=-\cos(-\theta)\\&=-\cos\theta\end{aligned}$$

이다. 마찬가지방법으로

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\theta)&=\sin\{\pi+(-\theta)\}\\&=-\sin(-\theta)\\&=\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\theta)&=\tan\{\pi+(-\theta)\}\\&=\tan(-\theta)\\&=-\tan\theta\end{aligned}$$

이다.

오른쪽 그림에서
점 P의 좌표 $(a,\ b)$는
$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$
로 나타낼 수 있고
점 Q의 좌표 $(-b,\ a)$는

$-b=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

$a=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

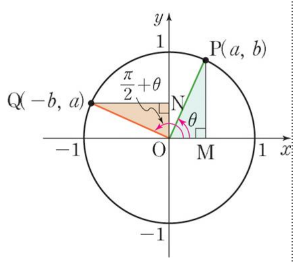
로 나타낼 수 있다. (∵ $\triangle OPM\equiv\triangle OQN$)
따라서

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

이다. 또한

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

이다.



$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$에서 θ에 $-\theta$을 대입하면

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}\\&=-\sin(-\theta)\\&=\sin\theta\end{aligned}$$

이다. 마찬가지 방법으로

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}\\&=\cos(-\theta)\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\tan\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}\\&=-\frac{1}{\tan(-\theta)}\\&=\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

[참고] $\dfrac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$ 로 표현 가능

29. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin \pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[교과개념] 정적분의 기본정리

(1) 부정적분과 미분과의 관계

① $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

② $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

(2) 정적분의 기본정리

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

$F'(x)=f(x)$ 이므로 $\int f(x)dx=F(x)+C$이다.

이 말의 의미는 부정적분과 미분은 서로 역연산의 관계라는 거야. 즉 $F(x)$를 미분한 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 할 수 있어.
따라서 정적분을 계산할 때에는 미분해서 $f(x)$가 되는 $F(x)$ (단, 적분상수 $C=0$)인 함수를 찾으면 돼.

예를 들어 $\int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$를 생각해보자.

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

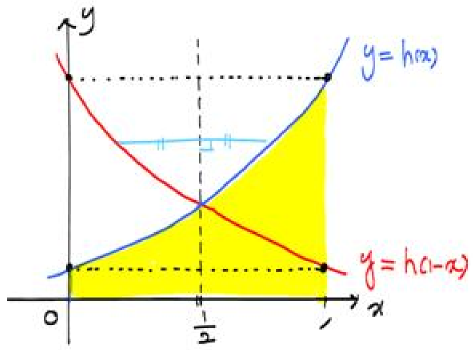
이므로

$$\int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=[f(x)g(x)]_a^b$$
$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

로 계산할 수 있는 거야.
이를 조금 변형한 것이 '부분적분법'이지.

[행동영역] 주어진 식의 의미를 이해하여 k값 구하기.

먼저 $\int_0^1 h(x)dx$와 $\int_0^1 h(1-x)dx$의 관계를 생각해보자.
$y=h(x)$와 $y=h(1-x)$의 관계는?
그래, 직선 $x=\dfrac{1}{2}$에 대한 대칭이야. 따라서 다음과 같이 그림을 그릴 수 있어.



위 그림에서 보면 $x=\dfrac{1}{2}$에 대한 대칭인 구간 $[0,\ 1]$에서는

$$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 h(1-x)dx$$

임을 알 수 있어.

또한 합답형 문제(ㄱ, ㄴ, ㄷ 형태)에서는 ㄱ의 해석이 제일 중요하다고 여러 차례 강조를 했는데,
문제에서 $f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)$ 라고 했고, ㄱ에서 $f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)$라고 했어. 이 둘의 관계를 살펴보기 위해

$f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)$
$=-\{f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}$

로 식을 변형해 봤더니

$h(x)=f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)$

라 하면

$h(1-x)=f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)$

가 되어 ㄱ에서 주어진 함수가 $-h(1-x)$임을 알 수 있어.

또한 $\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 h(1-x)dx$이므로

$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=k$ ⋯㉠

$\int_0^1 h(1-x)dx=\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}dx=k$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉡

$\therefore \int_0^1 \{-h(1-x)\}dx=\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

임을 알 수 있어.
(따라서 ㄱ은 옳다.)

㉠식과 ㉡식을 더해보면

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)$$
$$+f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(1-x)f(x)\}\,dx$$
$$+\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(x)f(1-x)\}\,dx$$

$\{f(x)g(1-x)\}'=f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)$
$\{-f(1-x)g(x)\}'=f'(1-x)g(x)-f(1-x)g'(x)$
이므로

$$=[f(x)g(1-x)]_0^1+[-f(1-x)g(x)]_0^1$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)-f(0)g(1)+f(1)g(0)$$
$$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}=2k$$

$\therefore\ f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$

또한 문제에서

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=k$$

이므로

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$$

임을 알 수 있어.

즉, $\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$를 계산하기 위한 방법을 제시해 주고 싶어서 ㄱ을 준 것임을 알 수 있어.

여기까지 생각을 하고 나니 ㄱ, ㄴ은 해결할 수 있겠지?

[풀이]

ㄱ은 위에서 설명 (생략)

ㄴ

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$$

이다. 따라서 $f(0)=f(1)=\alpha,\ g(0)=g(1)=\beta$라 하면

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$
$$=\alpha\beta-\alpha\beta$$
$$=0$$

이므로 $k=0$이다. 따라서 ㄴ은 옳다.

ㄷ

ㄴ에서

$f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$

이므로

$f(x)=\ln(1+x^2)$에서

$f(0)=\ln 1=0,\ f(1)=\ln 2$

$g(x)=\sin\pi x$에서

$g(0)=\sin 0=0,\ g(1)=\sin\pi=0$

이다. 따라서

$$k=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$
$$=\ln 2\times 0-0\times 0$$
$$=0$$

이다. 따라서 ㄷ은 옳다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 이다.

[참고]

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=k$$

에서 $x=1-t$라 치환하면

$x=0\to t=1,\ x=1\to t=0,\ dx=-dt$

이므로

$$\int_1^0 \{f'(1-t)g(t)-g'(1-t)f(t)\}(-dt)=k$$

$$\int_0^1 \{f'(1-t)g(t)-g'(1-t)f(t)\}dt=k$$

$$\therefore \int_0^1 \{g'(1-t)f(t)-f'(1-t)g(t)\}dt=-k$$

따라서 ㄱ은 옳다.
ㄱ을 이처럼 치환한다고 생각할 수도 있어.
치환하는 방법이라 생각을 했다면 ㄴ을 다음과 같이 해결할 수 있다.

$$k=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

$$=\int_0^1 f'(x)g(1-x)dx-\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx$$

$\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx$에서 $x=1-t$로 치환하면

$x=0\to t=1,\ x=1\to t=0,\ dx=-dt$

이므로

$$\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx=\int_1^0 g'(1-t)f(t)(-dt)$$

$$=\int_0^1 g'(1-t)f(t)dt$$

$$=\int_0^1 g'(1-x)f(x)dx$$

이므로

$$=\int_0^1 f'(x)g(1-x)dx-\int_0^1 g'(1-x)f(x)dx$$

$$=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)\}dx$$

$\{f(x)g(1-x)\}'=f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)$

이므로

$$=[f(x)g(1-x)]_0^1$$

$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$

이다.

이하 ㄴ, ㄷ의 풀이는 위의 풀이과정과 동일

이처럼 ㄱ에서 주는 힌트를 잘 발견할 수 있어야 해.

30. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

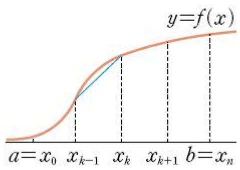
$$\begin{cases} x=4(\cos t+\sin t) \\ y=\cos 2t \end{cases}\quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

이다. 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리(경과 거리)를 $a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

[교과개념] 정적분의 활용_운동 거리(평면운동) (곡선의 길이)

(1) 곡선의 길이

함수 $f(x)$가 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l을 구해 보자.



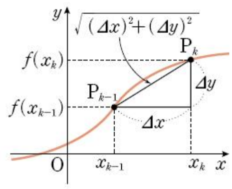
(구간 $[a,\ b]$를 n등분 한 소 구간에서의 곡선의 길이의 근삿값이 직선임을 이용한다. 이때 직선의 길이는 피타고라스의 정리에 의해 구한다.)

구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 각각

$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_k,\ \cdots,\ x_n=b$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$이다.



또, 각 분점

$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$에 대응되는 곡선 위의 점을

$P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_n$이라 하고, $l_k=\overline{P_{k-1}P_k}$라고 하자.

이때, 두 점 $P_{k-1}(x_{k-1},\ f(x_{k-1})),\ P_k(x_k,\ f(x_k))$에 대하여

$\Delta x=x_k-x_{k-1},\ \Delta y=f(x_k)-f(x_{k-1})$

이므로

$$l_k=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

평균값의 정리로부터

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f'(c_k)$$

인 c_k가 x_{k-1}과 x_k 사이에 존재한다.

따라서 $l_k=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x$이므로

$$l=\lim_{n\to\infty}(l_1+l_2+\cdots+l_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x$$

한편, $n\to\infty$이면 $\Delta x\to 0$이므로 $c_k\to x_k$이다.

따라서 정적분의 정의를 이용하면

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

한편 곡선의 방정식이 매개변수 t를 사용하여

$$x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

와 같이 나타내어질 때, $x = f(t)$, $y = g(t)$를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = f'(t),\ \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

이고, $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$라고 하면 곡선의 길이 l은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt}\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

(1) 곡선 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$의 길이 l은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

(2) 곡선 $x = f(t)$, $y = g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$의 길이 l은

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt$$

(2) $\sqrt{a^2}$ 의 계산법

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

[행동영역] 공식을 이용한 곡선의 길이 계산

[풀이]

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + \sin t) \\ y = \cos 2t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

에서

$$\frac{dx}{dt} = 4(-\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$$

이므로 움직인 거리(곡선의 길이)는

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{4(-\sin t + \cos t)\}^2 + (-2\sin 2t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16(1 - \sin 2t) + 4\sin^2 2t}\, dt$$

$(\because\ \sin^2 t + \cos^2 t = 1,\ 2\sin t \cos t = \sin 2t)$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 2t - 16\sin 2t + 16}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\sin 2t - 4)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 - 2\sin 2t)\, dt$$

$(\because\ 2\sin 2t - 4 < 0)$

a가 실수일 때

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$= [4t + \cos 2t]_0^{2\pi}$$

$$= 4 \cdot 2\pi + (\cos 4\pi - \cos 0)$$

$$= 8\pi$$

이다.

따라서 $a = 8$이다.

$\therefore\ a^2 = 8^2 = 64$