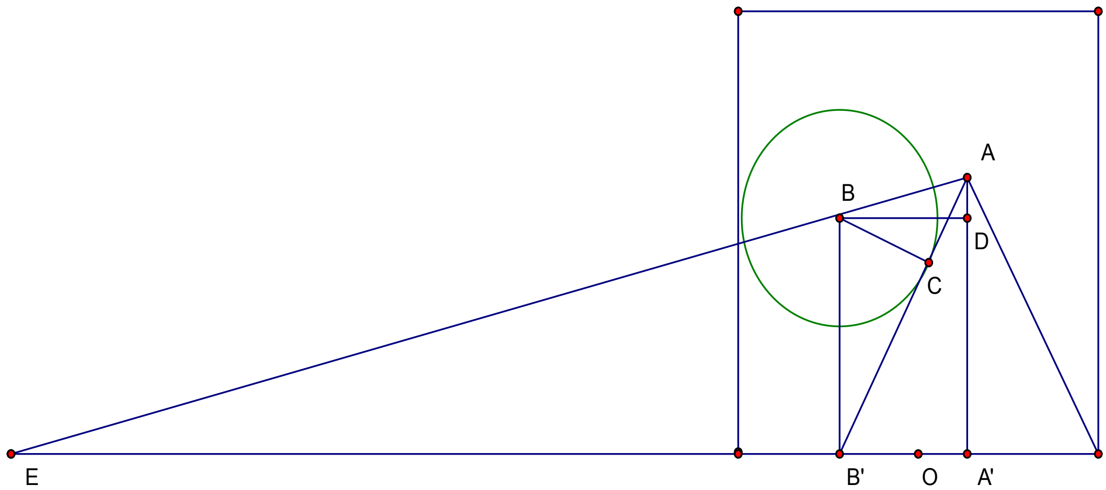
오르기 기출해설대회 - 귀여운울림소리
2012학년도 수리가형

29.
A', O, B'이 일직선상에 있으므로, A, B, O는 원기둥의 밑면과 수직하면서 O를 지나는 어떤 평면 위에 존재한다. 그 평면으로 도형을 자른 단면을 그려보면 아래 그림과 같다. C, D는 B에서 AB', AA'에 각각 내린 수선의 발이다. AB와 평면 α의 교점을 E라 하자.



$\angle BEB' = \theta = \angle ABD$ (동위각) 이다.
$A'B' = 5, AA' = 12$이므로, 피타고라스의 정리에 의해 $AB' = 13$이다.
$\triangle ABB' = \frac{1}{2}BC \cdot AB' = \frac{1}{2}A'B' \cdot BB'$ 에서 $BB' = \frac{52}{5}$ $\quad \therefore AD = AA' - BB' = \frac{8}{5}$

$$\therefore \tan\theta = \tan\angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{A'B'} = \frac{\frac{8}{5}}{5} = \frac{8}{25} = p,\ 100p = 32$$

Comment) 위와 같은 그림을 그릴 줄 알면 되겠다. 특별히 평면 그림에서, 원이 이곳저곳 접할 경우 접점들과 원의 중심을 잇는 선분들을 그리고 생각하는 것이 도움이 된다.

30.

I) $a<b$

[Claim] $y=a^{x+1}, y=b^{x}$는 교차한다.

$pf)$ 방정식 $a^{x+1}=b^{x}$를 변형하면 $a=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}$. $\frac{b}{a}>1$이므로 이 방정식은 해를 갖는다. ■

만약 $x \geq 1$에서 교차하면, 그 교차점을 x_{p}라 하자. $t=x_{p}$로 잡으면 $PQ=0 \leq 10$이므로 조건 만족.

만약 $x<1$에서 교차하면, $t=1$일 때 $0<PQ=b-a^{2}<10$ $(\because b \leq 10, a^{2}>0)$이므로 조건 만족.

결국 $a<b$이면 항상 성립. a=2면 가능한 b개수=8, a=3이면 가능한 b개수=7, ... 이렇게 세보면, 가능한 순서쌍 개수 = $\sum_{k=1}^{8} k=36$개

II) $a \geq b$

[Claim] $PQ=f(t)$라 하면, f는 $t \geq 0$에서 증가함수

$pf)$ $f(t)=a^{t+1}-b^{t}$, $f'(t)=\ln a \cdot a^{t+1}-\ln b \cdot b^{t} \geq \ln b \cdot (a^{t+1}-b^{t}) > \ln b \cdot (a^{t}-b^{t}) \geq 0$ for $\forall t \geq 0$ ■

따라서 (나)를 만족시키는지 알아보려면 $f(1)=a^{2}-b \leq 10$만 체크하면 된다.

a=2이면 가능한 b=2

a=3이면 가능한 b=2,3

a=4이면 가능한 b없음.. 이후에 쭉 없음. 순서쌍 개수 = 3개

따라서 총 39개.

Comment) 두 그래프가 교차될 수도 있지 않나? 이 생각을 하는 순간 위의 두 경우로 나누어 풀이를 시작하는 것은 자연스럽다.

28.
$F'(x)=f(x)>0$ 이므로 $F(x)$는 강(强)증가함수,

$F(g)=\frac{1}{2}F$에서 $x=2$대입하면 $F(g(2))=\frac{1}{2}F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=6$

근데 $F(1)=6$이고, F가 단사함수이므로, $g(2)=1$

$F(g)=\frac{1}{2}F$의 양변을 미분하면, $F'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{2}F'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ 이 식에 $x=2$대입하면

$F'(g(2))\cdot g'(2)=\frac{1}{2}f(2)=4$. $F'(g(2))=F'(1)=f(1)=5$ $\therefore g'(2)=p=\frac{4}{5}$, $30p=24$.

Comment) 문제에서 $g'(2)$구하라고 했으니까 $x=2$를 열심히 대입하면 된다. $g(2)=1$이 된다는 것을 알아내는 과정이 가장 어려운 것 같다. 하지만 목표의식($g(2)$만 구하면 돼!)이 분명하다면 잘 풀어낼 수 있다.