지수함수와 로그함수에서 교점의 대소를 비교하는 준킬러!
노베한테는 ㄴ이나 ㄷ에서 막힐 수도 있을텐데, 5번으로 찍지 말구
생각보다 엄청 정형화된 기출들이니 아이디어를 듣고 가서
실전에서도 적용해보자고요! 도구로 비3을 풀고 준킬러를 풀게요!

13. 정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

<보 기>

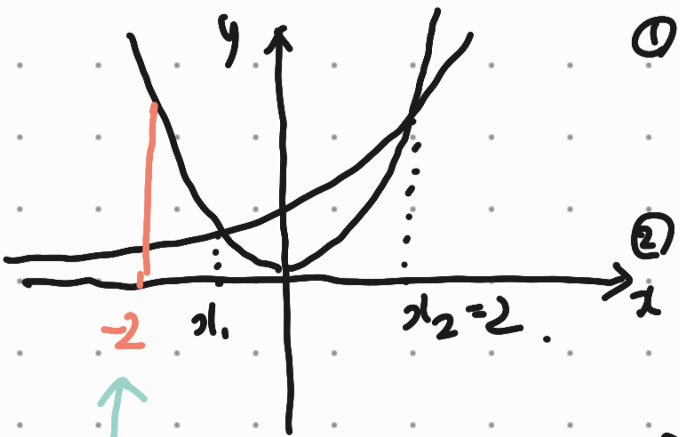
ㄱ. $x_1+x_2>0$

ㄴ. $x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2<0$

ㄷ. $|x_1\cdot y_2|-|x_2\cdot y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.



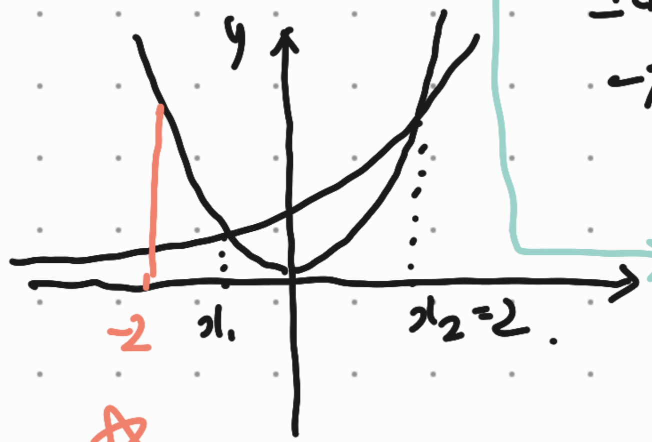
① $x_2=2$인 건 직관으로 알고 있었을 것이라 생각합니다.

② $x_1+x_2>0$이 성립하려면 x_1이 -2보다 커야겠죠?

$f(-2)=\frac{1}{4}$, $g(-2)=4$이므로

$f(-2)<g(-2)$ $-2<x_1 \Rightarrow$ $x_1+x_2>0$ (참)

ㄴ. $x_1y_1 + x_2y_2 < 0$



그래프상 직관적으로

$-x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ 임을 알 수 있죠?

→ $x_2y_2 < -x_1y_1$ (X)

그런데, 기출에서 x_1y_1와 x_2y_2의 대소를 비교할 때,

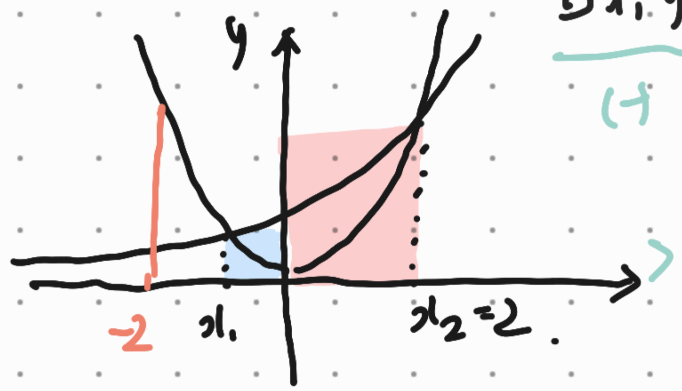
도형의 크기를 이용하여 푸는 것이 유용한 도구가 됩니다.

(x는 밑변, y는 높이가 되므로)

사실 이 문제는 그렇게 난이도가 높은 편이 아닌데,

쉬운 문제부터 이 도구를 사용하여 풀어보겠습니다.

별해)



$\underbrace{\square x_1y_1}_{(-)} < \underbrace{\square x_2y_2}_{(+)}$

$\therefore x_1y_1 + x_2y_2 > 0$

case ①!

ㄷ.

x_1y_1과 x_2y_2의 대소를 도형의 크기로 비교한다면,

x_1y_2와 x_2y_1의 대소는 기울기로 비교할 수 있습니다.

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| > 0 \Rightarrow |x_1 \cdot y_2| > |x_2 \cdot y_1|$

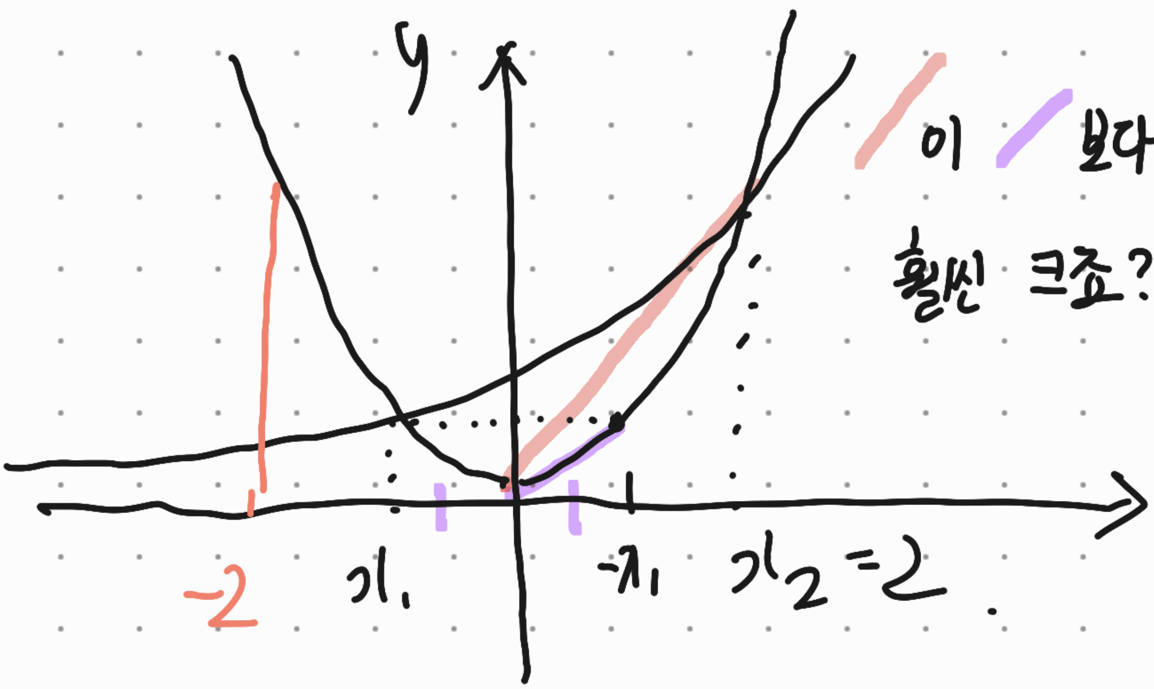
$-x_1 y_2 > x_2 y_1$ 자, 기울기의 형태로 바꾸기 위해 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$-x_1$과 x_2로 양변을 나누겠습니다.

$\underbrace{\frac{y_2}{x_2}}_{①} > \underbrace{-\frac{y_1}{x_1}}_{②}$

① 은 $(0,0)$, (x_2, y_2) 사이 기울기

② 는 $(0,0)$, (x_1, y_1) 사이 기울기 $\times -1$



이 보다 기울기가

훨씬 크죠?

ㄷ도 참.

다음쪽부터는 정말 준킬러 기출을 3문제 풀어볼게요!

18

직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보 기

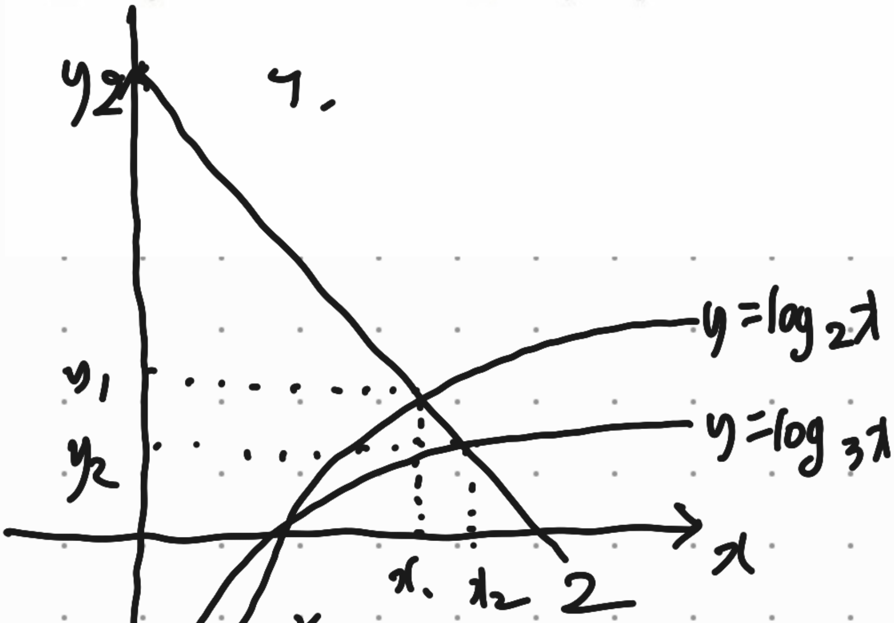
ㄱ. $x_1 > y_2$

ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$

ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



지수함수든,
로그함수든
밑↑, 곡률↑

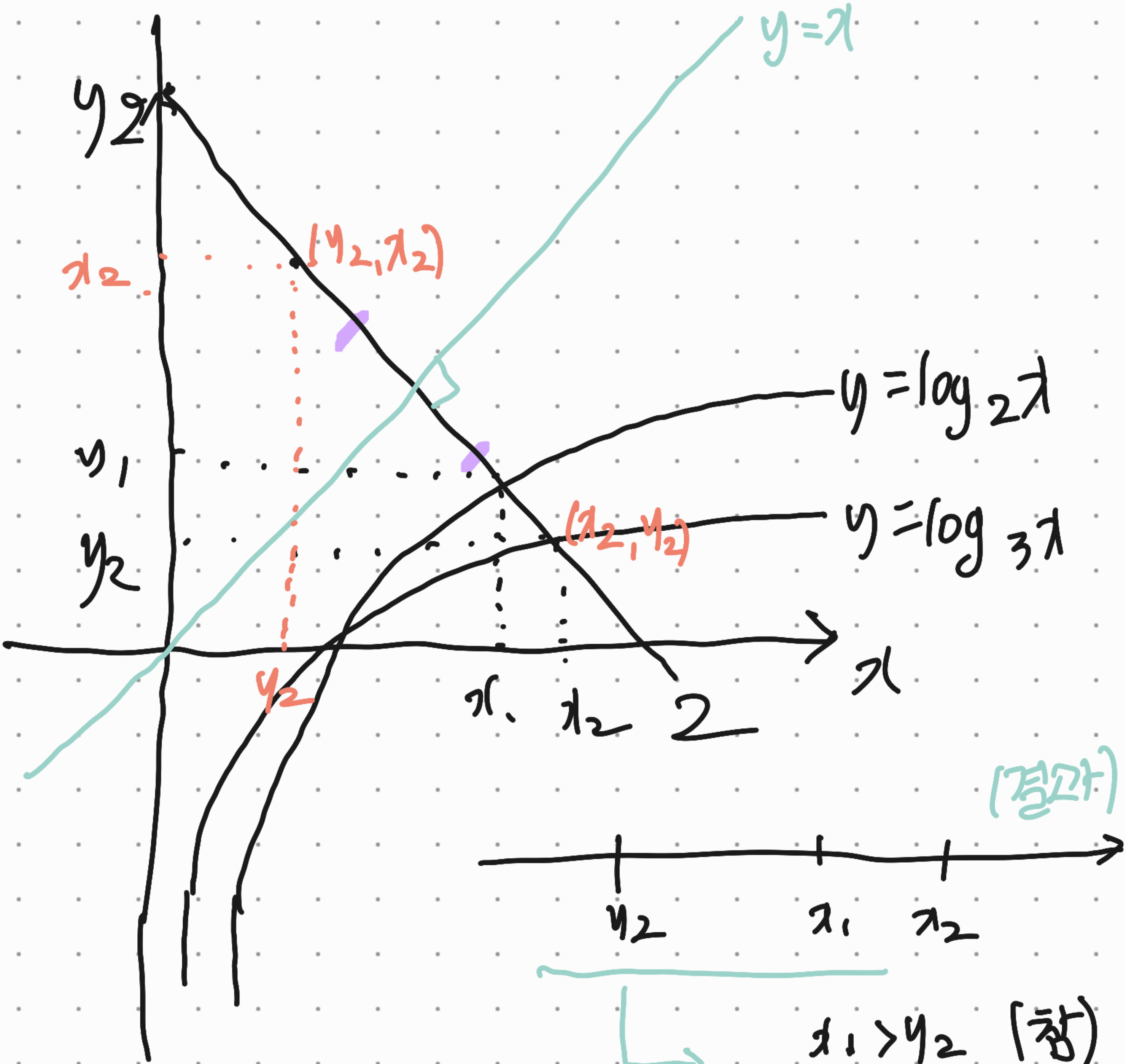
* 직관 상으로 ㄱ. $x_1 > y_2$가 참일 것 같은데,
명확하지 않아 문제를 보던 중, 먼저
왜 $y = -x+2$일까?를 생각했고,

대소는 사실, 수직선에서 − ⟶ + 왼쪽에 있냐

오른쪽에 있냐를 물어보는 것으로 볼 수 있기 때문에, (과정)

(x_2, y_2)을 (y_2, x_2)로 $y=x$ 대칭이동하여 x축에

y_2와 x_1이 같이 오도록 하였습니다.

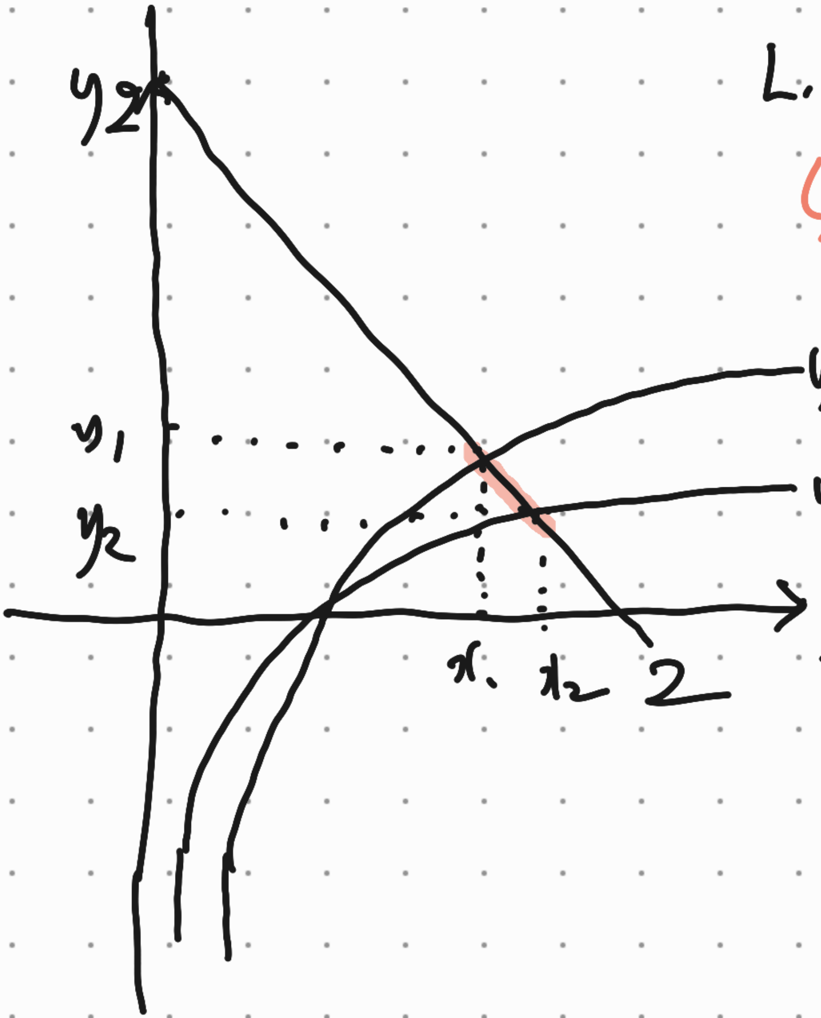


(결과)

$x_1 > y_2$ (참)

ㄴ. 아까 x_1, y_2, y_1, x_2의 대소비교는 기울기를 사용하라

했는데, $\underbrace{x_2 - x_1}_{\Delta x}$ 과 $\underbrace{y_2 - y_1}_{\Delta y}$ 의 대소비교도 * 기울기를 사용합니다.



ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$

$\boxed{\dfrac{y_1-y_2}{x_2-x_1}=1}$

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$

(x_1,x_2) (y_1,y_2)의 기울기

$=y=-x+2$의 기울기 $=-1$

$\therefore x_2-x_1=y_1-y_2$ (참)

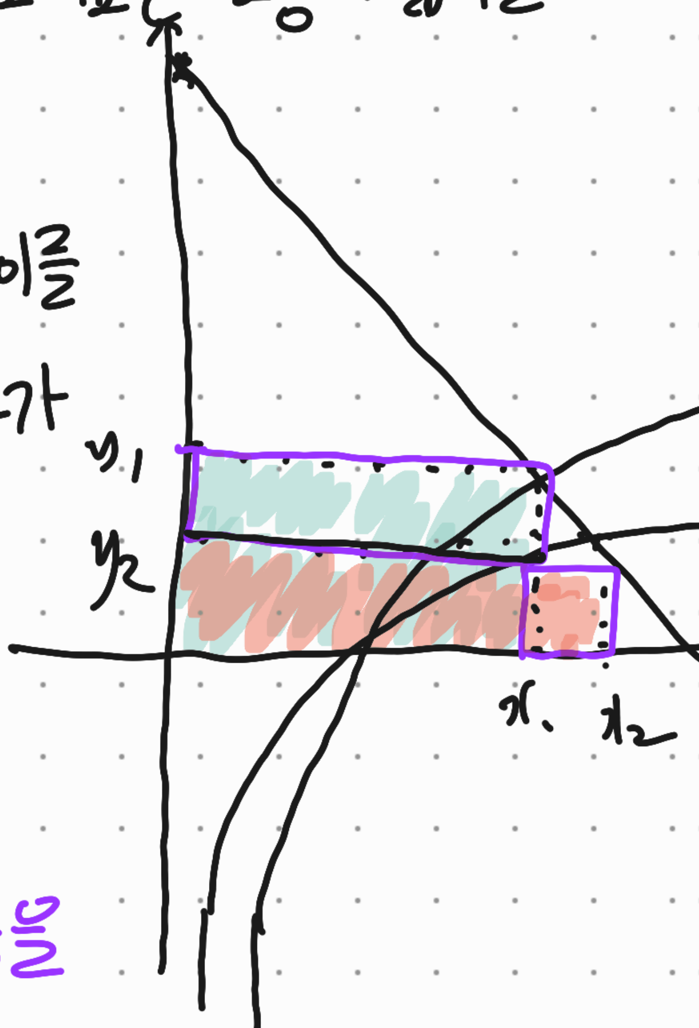
ㄷ. 아까, x_1y_1과 x_2y_2의 대소비교는 도형의 넓이를 이용하라고 했었죠?

그런데, x_1y_1과 x_2y_2의 넓이를 비교하면 S_1 과 S_2 만큼 넓이차가 난다는 걸 볼 수 있습니다.

$y_1-y_2=x_1-x_2$ 이므로

ㄴ선지!

S_1 의 높이와 S_2 의 밑변이 같음을



알 수 있습니다. !! 그럼 두 사각형의 넓이 차는 x_1과 y_2의 달렸겠네요?
S₁의 밑변 → S_1의 밑변
S_2의 높이

7에서, $x_1 > y_2$ 이므로

$\therefore x_1 y_1 > x_2 y_2$ (참)

Wow. ㄱ과 ㄹ이 ㄷ을 푸는데 그대로!! 쓰였네요.

자. 마지막으로, 지수.로그함수 교점 좌표의 대소비교 순킬러 풀이의 5구를 정리하겠습니다. (기출을 통한)

① x좌표의 범위는 $f(a), g(a) / f(b), g(b)$의 대소를 비교해 $a < x < b$ 임을 찾자.

② $x_2 - x_1$ & $y_2 - y_1$이 or $x_1 y_2$ & $x_2 y_1$이 선지에 나오면 기울기!를 이용하자

③ $x_1 y_1$와 $x_2 y_2$의 비교는 도형의 넓이를 사용하자.

☆ 대소비교는 수직선상 좌우비교다.
x와 y의 대소를 물으면, 같은 수직선으로 옮기자!