01. [행렬의 연산]

sol.1)

$A-2E=\begin{pmatrix}1&-2\\4&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&3\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$\therefore\ (-1)+(-2)+4+3=4$

sol.2)

모든 성분의 합이란 어차피 네 개의 성분을 포개어야(= 더해야) 함을 의미하므로, 처음부터 A와 $2E$의 모든 성분의 합을 더한 것끼리 생각해보면 $8-4=4$가 답이 됩니다.

02. [부정형도 아닌데 로피탈을 쓰고 있는건 아닌지]

sol)

$x\to 2$일 때 $\dfrac{x^2+8}{x+2}$에서 분모는 4로, 분자는 12로 가기 때문에

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+8}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

03. [ㅋㅋㅋㅋ어차피 상쇄 될 것들이]

sol.1)

$\therefore\ \log_2 9\times\log_3 16=(2\log_2 3)(4\log_3 2)=8(\log_2 3)(\log_3 2)=8$

sol.2)

수치를 보아하니 $(\log_a b)(\log_b a)=1$꼴을 포함하므로 어차피 곱해져서 상쇄될 요소들은 무시하고 나머지 부분만 고려하자면 $2\times 4=8$이 답입니다.

04. [언제부터 전구간만 나왔지?]

sol.1)

$f(x)=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}\,\sin(x+\alpha)\ \left(\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{1}\right)$에서

$x+\alpha=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$일 때 (단, n은 임의의 정수) $f(x)$는 최솟값 $-\sqrt{3}$을 갖습니다.

sol.2)

구간이 전 구간이므로 걱정 없이 최솟값 $-\sqrt{1+2}=-\sqrt{3}$을 찾을 수 있습니다. 문제를 건성으로 푼다면 최댓값 $\sqrt{3}$을 답으로 택할 수도 있습니다.

[2005년 09월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 폐구간 $[0,\ \pi]$에서 함수

$$f(x)=\cos 2x+2\sin x\cos x$$

의 그래프가 직선 $y=a$와 세 점에서 만날 때, a의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

05. [로그부등식]

sol)

$1<2^x<8 \Leftrightarrow 2^0<2^x<2^3 \Leftrightarrow 0<x<3$ $\because\ y=2^x$는 증가함수

따라서 만족하는 정수 x는 $1, 2$로 두 개 뿐입니다.

[2013년 09월 평가원 수학 영역(A형) 30번]

30. 자연수 n에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n\le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합을 a_n이라 하자. $\sum\limits_{n=1}^{20}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

06. [바이어슈트라스 치환]

sol.1)

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$이고, 코사인과 탄젠트를 이어주는 식인

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

를 사용하면 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\frac{5}{9}}=\dfrac{9}{14}$이므로

$\therefore\ \cos 2\theta=2\left(\dfrac{9}{14}\right)-1=\dfrac{2}{7}$

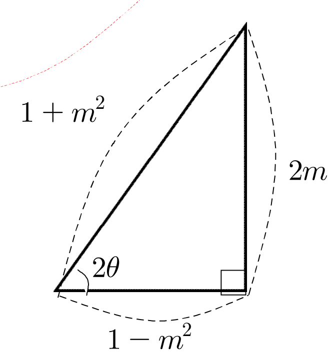
sol.2)

$\tan\theta=m$라 하면

$$\sin 2\theta=\frac{2m}{1+m^2},\ \cos 2\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2},\ \tan 2\theta=\frac{2m}{1-m^2}$$

가 성립합니다.

$\therefore\ \cos 2\theta=\dfrac{1-\frac{5}{9}}{1+\frac{5}{9}}=\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}$



[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 02번]

2. $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos 2\theta$의 값은? [2점]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

※ 바이어슈트라스 치환은 꼭 알아야 하는 것은 아니지만, 삼각비들을 다루는 사고의 범위를 확장 시켜주기에 다른 단원에서도 특히 요긴하게 쓰입니다.

07. [“샌드위치 정리” ㄴㄴ하고 “부등식의 성질” ㅇㅇ해]

sol.1)

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{a_n}{2n} < \frac{n+1}{4n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}$$

즉, $\frac{1}{4} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n} \le \frac{1}{4}$이므로 부등식의 성질에 의해

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n} = \frac{1}{4}$

[지학사 수학Ⅰ 교과서 p162]

수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

[미래엔 수학Ⅰ 교과서 p179]

무한수열의 극한의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

※ “샌드위치 정리”나 “조임 정리” 등은 교과서에 등장하는 용어가 아니기 때문에 특히나 논술과 같은 서술형 평가에서는 답안 작성시 “부등식의 성질” 정도로 말하는 것이 더 바람직하다고 봅니다.

sol.2)

부등식의 성질을 이용해서 정리해서 풀기를 의도한 문제일 것이고,

$$a_n < \frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

에서 $a_n \simeq \frac{n}{2}$라 근사해버리면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n} = \frac{1}{4}$

[2012년 08월 경찰대 수리 22번]

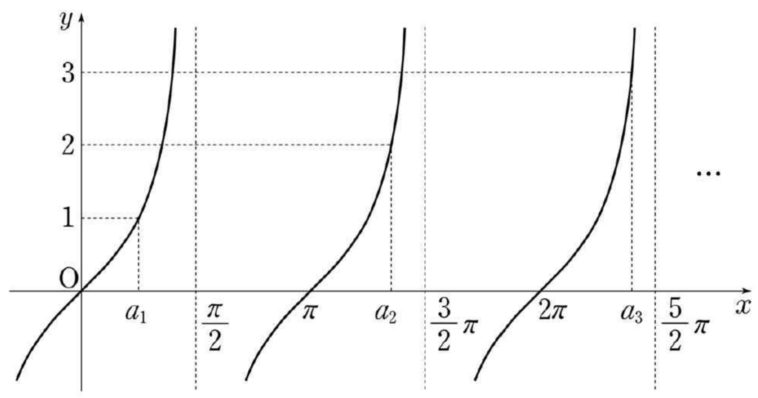
22. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2(5k^2+3)}{n^3(n^2+1)}$의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 18번]

18. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$



08. [한 점과 기울기를 안다면 접선도]

sol)

$y' = 6x^2+1$에서 $x=1$에서의 미분계수가 7임을 알 수 있으므로, 점 $(1,3)$에서의 접선의 방정식은 $y-3=7(x-1)$이 됩니다. 따라서 $a=3+7(2-1)=10$이 답입니다.

09. [그래프 vs 단위원 vs 합차를 곱으로 vs 삼각방정식의 일반해]

sol.1)

편의상 $\cos x = c$로 치환한다면, $c=2c^2-1$에서

$2c^2-c-1=(c-1)(2c+1)=0$

이므로 $c=\cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 1이 됩니다. 그런데 주어진 x의 범위 $0\le x\le\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프를 생각하든, 단위원 상에서 생각하든 $x=0, \frac{2}{3}\pi$의 값만 나오므로 답은 $\frac{2}{3}\pi$가 됩니다.

sol.2)

$\cos 2x - \cos x = -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=0$에서 $\sin\frac{3x}{2}=0$ 또는 $\sin\frac{x}{2}=0$을 만족하는 $0\le x\le\pi$ 범위의 값 역시 $x=0, \frac{2}{3}\pi$뿐이므로 답은 같습니다.

sol.3)

$\cos 2x = \cos x \to 2x = 2n\pi \pm x \to x=2n\pi$ 또는 $\frac{2n}{3}\pi$ (단, n은 임의의 정수)

따라서 $0\le x\le\pi$ 범위에서 만족하는 값은 $x=0, \frac{2}{3}\pi$뿐이므로 답은 $\frac{2}{3}\pi$가 됩니다.

[2006년 08월 경찰대 수리 06번]

6. $0<\theta<\pi$ 일 때, $\sin 3\theta = \cos 5\theta$ 를 만족하는 θ 의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. [변수를 바라보는 눈썰미]

sol.1)

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b \\ -a+b \end{pmatrix}$에서 $a=b, c=0$이므로

$\therefore\ a-b+c=0$

sol.2)

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b \\ -a+b \end{pmatrix}$에서 때마침 $c=-a+b$이므로

그대로 이항하면 $a-b+c=0$이 답이 됩니다.

11. [수능 기출 재탕]

sol)

$34 = -k + 66\log\dfrac{R_A}{\sqrt{S_A}}$ 에 $100\sqrt{S_A} = R_A$를 대입하면

$34 = -k + 132$에서 $k = 98$이 나옵니다.

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 09번]

9. 지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 $D(\%)$는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D = -98 + 66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m^{2}이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 81.5 ② 78.2 ③ 74.9 ④ 71.6 ⑤ 68.3

12. [그래프 개형]

sol.1)

$f'(x) = 2xe^{x^2+4}$이므로 $x=0$에서 도함수의 부호가 $-\ \rightarrow\ +$ 로 바뀌기 때문에 극솟값을 갖습니다. 따라서 $a=0$이고

$b = f(0) = e^4\ \rightarrow\ \ln b = 4$이므로 $a + \ln b = 0 + 4 = 4$입니다.

sol.2)

$f(x) = e^{x^2+4}$ 정도는 그 개형을 쉬이 가늠할 수 있는 함수입니다. 먼저 $f(-x) = f(x)$를 만족하기 때문에 $f(x)$는 우함수(= y축 대칭함수)일뿐더러 곡선만으로 이루어진 미분 가능한 함수 $f(x)$가 극값을 갖는다면 $x=0$에서도 반드시 가질 수 밖에 없음, 가져야만 함을 직관적으로 알 수 있습니다. 혹은 $g(x) = e^x$와 $h(x) = x^2+4$의 합성함수로서 $f(x) = g(h(x))$로 그 개형을 생각해보더라도 $x=0$에서 극값을 갖게 됩니다. 따라서 $a=0, b=e^4$으로 답은 동일하게 4가 됩니다.

[2007년 07월 교육청 수리(가형) 22번]

22. 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x) = f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극소값을 갖는다.

이 때, $f(x)$의 극대값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 14번]

14. $x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. [물론 수학의 본질은 자유로움에 있긴 하지만]

sol.1)

'어, 행렬과 그래프 문제네? 어디보자. 이에 대응하는 행렬을 찾아볼까?'

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

'이렇게 생겼으니까 모든 성분의 합은 $2(5+2+2+2+1) = 24$구나!'
(시계를 보니 시간이 제법 많이 흘러가있다.)

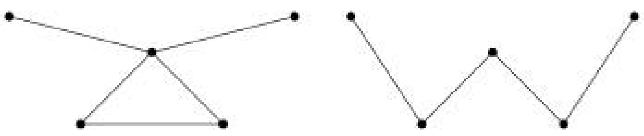
sol.2)

모든 꼭짓점들 간에 연결된다면 총 ${}_6C_2 = 15$개의 변이 있어야 하는데 세 개의 변 $\overline{A_2A_4}, \overline{A_2A_5}, \overline{A_3A_6}$이 빠졌으니 $2(15-3) = 24$가 답입니다.

※ 실전에선 100분이란 시간 내에 풀어내는 것도 평가 요소의 하나입니다. 정확한 풀이도 좋지만 빠른 풀이도 항상 염두에 두어야 합니다.

[2015학년도 06월 포카칩 모의평가 수학 영역(B형) 12번]

12. 두 그래프 G, H가 다음 그림과 같다.



두 그래프 G, H를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 할 때, 행렬 $A+B$의 성분 중 2의 개수의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

14. [무연근으로 또 낚겠지?]

sol)

편의상 $f(n)=f$로 치환하고 쭉 수식을 정리해보겠습니다. 그러면

$3f-8=9f^2-60f+100$

$\Rightarrow\ 9f^2-63f+108=0$

$\Rightarrow\ f^2-7f+12=(f-3)(f-4)=0$

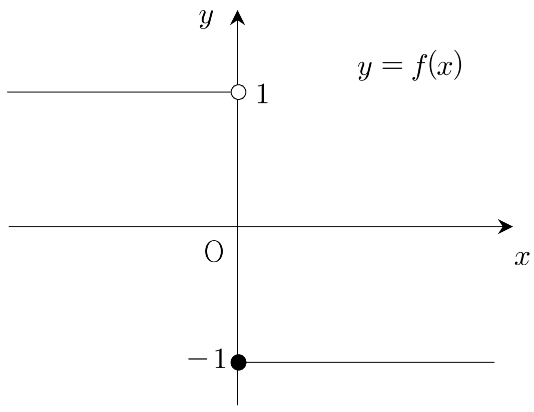
이므로 $f=f(n)=3$ 또는 4입니다. 그런데 이를 처음 방정식인

$\sqrt{3f(n)-8}=3f(n)-10$

에 대입해보면 $f(n)=3$은 무연근이 되고, $f(n)=4$만 근이 됩니다. 이때 변이 4개 연결된 꼭짓점은 A_3, A_4, A_5, A_6으로 답은 4가 됩니다.

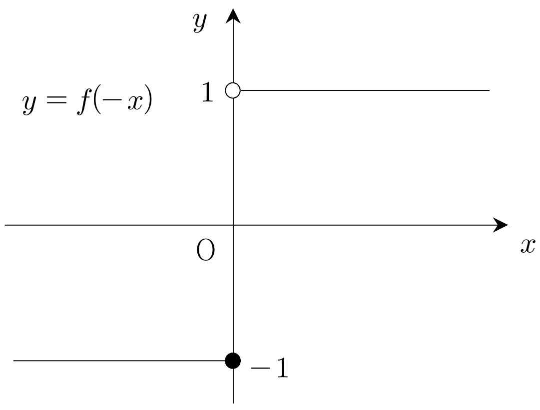
15. [간단한 듯 간단하지 않은 듯]

sol)



ㄱ. $g(x)=x$이면 $\lim_{x\to-0}f(x)g(x)=0=\lim_{x\to+0}f(x)g(x)$이고 $f(0)g(0)=0$ 이므로 참입니다.

ㄴ.

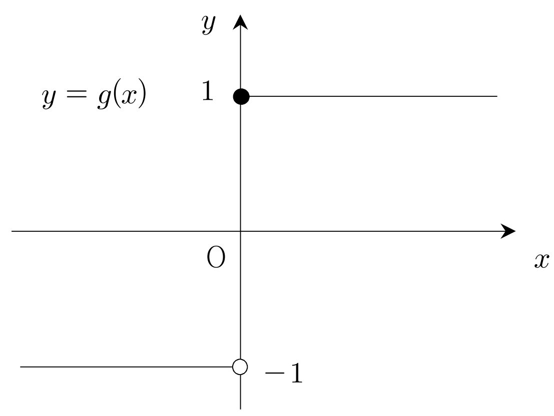


$y=f(x)g(x)=f(x)f(-x)$의 개형은, $x<0$일 때 -1이고, $x=0$일 때 1이고, $x>0$일 때 1이므로 한 점 $x=0$에서 불연속이 되어 거짓입니다.

ㄷ. 우선 $f(f(x))$의 불연속 가능점들로는 $f(x)$ 자체 불연속점인 $x=0$과 $f(x)$가 불연속이 되게 하는 정의역 값 0을 $f(x)$가 취할 때인데, 이 경우는 불가능하므로 $x=0$에서의 연속 여부만 따져주면 됩니다. 편의상 표를 통해 살펴보면

x	-0	0	$+0$
$f(x)$	1	-1	-1
$g(x)=f(f(x))$	-1	1	1

위와 같고, 이때 $g(x)$의 개형은 다음과 같습니다.



다시 $y=f(x)g(x)$의 개형을 따져보자면 $x<0$일 때 -1이고, $x\ge0$일 때도 함숫값이 -1이므로 $f(x)g(x)$는 상수함수가 되어 참입니다.

[2007년 06월 평가원 수리(가형) 08번]

8. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=|x|$일 때, $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $(g\circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $(f\circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

16. [원주각 그리고 사인법칙]

sol)

삼각형 COA는 원래 $\overline{OA}=\overline{OC}=1$로 이등변 삼각형인데,

$\angle COA=\frac{\pi}{3}$이라 하였으므로 결국 삼각형 COA는 정삼각형이 됩니다.

그리고 원주각의 성질에 의해 $2\angle ABC=\angle AOC$이므로 $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$가 되고, 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용해보면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2$$

가 되어

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}} &= 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)+2\sin\theta \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+2\sin\theta \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)\sin\theta+\cos\theta \le m\end{aligned}$$

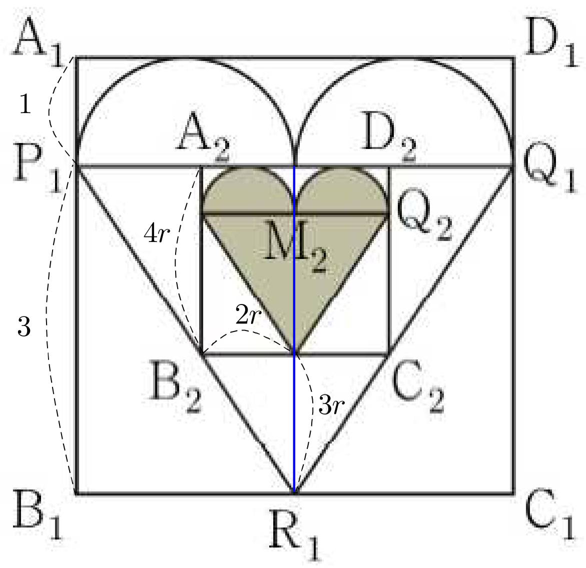
에서 $m^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2 = 8+4\sqrt{3}$ 이 답이 됩니다.

※ θ의 범위를 생각해보면 점 B가 시계방향으로 원 위를 회전하여 점 A를 향해 갈 때 현 AB는 점 A에서의 접선에 다가가므로 $0 \le \theta < \frac{5\pi}{6}$ 가 됩니다. 그리고 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}} = \left(2+\sqrt{3}\right)\sin\theta+\cos\theta$를 벡터의 내적으로 해석해서 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}} = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot\left(1, 2+\sqrt{3}\right)$이라 보면 최댓값은 두 벡터의 방향이 같을 때이므로 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$ 으로 이를 만족하는 θ가 해당 범위 내에 존재함을 알 수 있습니다.

17. [♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡]

sol)

초항과 공비만 구하면 되는 평범한 무한등비급수 문제입니다.



여기서 등장하는 직각삼각형들은 세 변의 길이 비가 $2:3:\sqrt{13}$ 입니다. 가급적 이 비를 염두에 두면서 적당한 보조선을 도입하여 관계식을 찾아보면 $7r=3$이 됩니다. 따라서, 닮음비는 $4:4r = 1:r$이고, 개수는 매 과정마다 하나씩 유지되므로 실질적인 공비는 넓이비 그대로 적용이 되어서 r^2입니다. 그리고 초항은 $\pi+6$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi+6}{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{49(\pi+6)}{40}$$

18. [항상 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 답이 되란 법은 없으니까]

sol)

$A(A+B)=6E$에서 $AB=BA$가 성립합니다. 이차정사각행렬 X, Y간에 $XY=E$가 성립하면 $Y=X^{-1}$이기에 $XY=XX^{-1}=X^{-1}X=E$가 성립하기 때문입니다. 지금은 $A(A+B)=6E=(A+B)A$로 보고 공통인 A^2을 소거하면 결국 $AB=BA$가 남기 때문입니다.

또, 두 행렬 A, B간에 교환법칙이 성립하기 때문에 편안하게 인수분해 해보면 $(A+B)(A-2B)=O$이 되고, $(A+B)^{-1}$가 존재하기 때문에 양변의 왼쪽에 이를 가하면 $A-2B=O$, 즉 $A=2B$가 나옵니다.

이를 처음 식인 $A^2+AB=6E$에 대입해보면 $B^2=E$가 됩니다.

ㄱ. $A^{-1}=\frac{1}{6}(A+B)$이므로 참입니다.

ㄴ. 위에서 언급하였듯 참이 됩니다.

ㄷ. (반례) $A=2E, B=E$

※ $B^2=E$가 되는 이차정사각행렬 B의 정체를 살펴보도록 하겠습니다.

$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$라 두었을 때,

$B=kE$ 꼴이라면 $B=\pm E$가 유일하고,

$B\ne kE$이면 케일리-해밀턴 정리에 의하여 도출된 식

$B^2-(a+d)B+(ad-bc)E=O$

와 $B^2=E$을 변형한 식 $B^2-E=O$는 동치이기에

$a+d=0, ad-bc=-1$

를 만족하도록 네 성분 a, b, c, d를 잡기만 하면 $B^2=E$을 항상 만족하게 됩니다. 가령 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$이라든가 $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2\end{pmatrix}$라 하면 $B^2=E$을 만족합니다. 그런데 이 경우 $B+E=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1\end{pmatrix}$은

$(a+1)(d+1)-bc=(a+d)+1+(ad-bc)=0$

이므로 항상 $B+E$의 역행렬이 존재하지 않게 됩니다. 따라서, $B=E$만이 주어진 명제를 거짓으로 만드는 반례가 되는 것입니다. 이렇듯 케일리-해밀턴 정리와 타협하고서 여러 문제에 두루 적용하다보면 어느 순간 반례로부터 한결 자유로워질 수 있습니다.

[2015학년도 06월 이해원 모의고사 수학 영역(B형) 11번]

11. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB^4=B^2+E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. A의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. B의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $AB=BA$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [무엇을 구하기 위하여 계산을 하고 있는가]

sol.1)

$a_n = \frac{2^5}{2^n}$ 이므로 $b_n = \frac{2^5}{2^1}\cdot\frac{2^5}{2^2}\cdot\cdots\cdot\frac{2^5}{2^n} = \frac{2^{5n}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 2^{5n-\frac{n(n+1)}{2}}$

에서 지수 부분인 $5n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(9-n)$이 최대가 될 때 b_n도 최대가 되고, n이 자연수이므로 $n=4$ 또는 5가 되어야 합니다. 따라서 $4+5=9$가 답입니다.

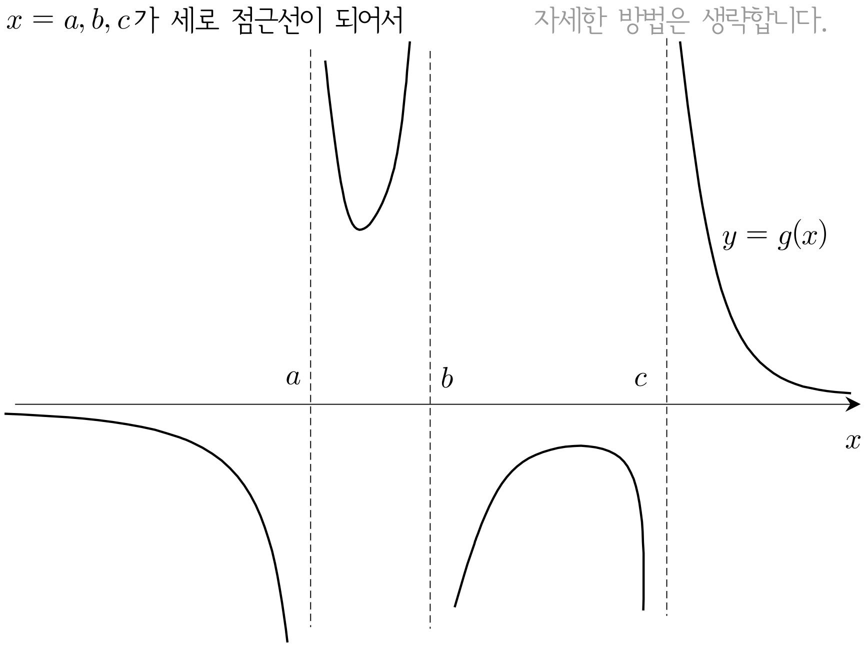
sol.2)

b_n을 살펴보니 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이 누적적으로 곱해지고 있는 형태입니다. 비록 등비수열은 아니지만 b_n이 최대가 되려면 곱해지는 a_n이 1이상이 되어야 합니다. 그런데 $a_4 = \frac{2^5}{2^4} = 2$이고 $a_5 = \frac{2^5}{2^5} = 1$이므로 $n = 4, 5$일 때 b_n이 최댓값을 갖게 됩니다. 이때 답은 역시 9가 됩니다.

20. [최고차항 부호를 이용한 낚시는?]

sol.1)

삼차함수 $f(x)$가 서로 다른 세 실수 $a<b<c$에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)=0$을 만족하므로 $f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$라 둘 수 있습니다. 먼저 $k>0$일 때를 생각해보도록 하겠습니다. 그래프간 연산, 그 중에서도 역수를 취하는 연산을 통해 $g(x)$ 개형을 그려보면 $x=a,b,c$가 세로 점근선이 되어서 자세한 방법은 생략합니다.

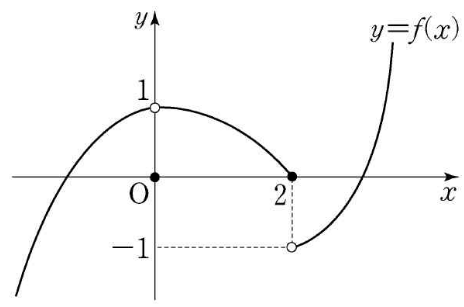


이러한 개형이 됩니다. 물론 $k<0$일 때에도 동일하게 성립하므로 ㄱ, ㄴ은 참이고 ㄷ은 거짓입니다. 역수 그래프를 그리기 위해선 $y=\pm(x-a)$와 같이 $x=a$에서 x축과 교점을 갖는 그래프를 역수를 취했을 때 $y=\frac{\pm 1}{x-a}$의 개형이 어떻게 되는지 관찰하여 그릴 수 있습니다. 덧붙이자면 $\frac{1}{x}$에서 $x=1$을 경계로 $x>1$이면 역수 취했을 때 값이 감소하고, $0<x<1$이면 값이 오히려 증가한다는 성질을 이용할 수도 있습니다.

※ 평가원 문제들은 함수의 최고차항 계수가 양수면 애초에 1이나 2라고 가르쳐 주고, 아니면 최고차항 계수를 언급하지 않습니다. 그래서 일반적으로 최고차항 계수가 양수인 경우를 먼저 생각하는 수험생의 입장에서 깜빡 실수하도록 유도하는 문제를 종종 냅니다. 다행이도 지금 이 문제에선 최고차항의 부호에 대한 언급이 없으나 크게 문제되지 않습니다.

[2012년 11월 대수능 수리(가형) 15번]

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, !! $g(0)=3$이다. 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$의 값은? [4점]



① 31 ② 30 ③ 29 ④ 28 ⑤ 27

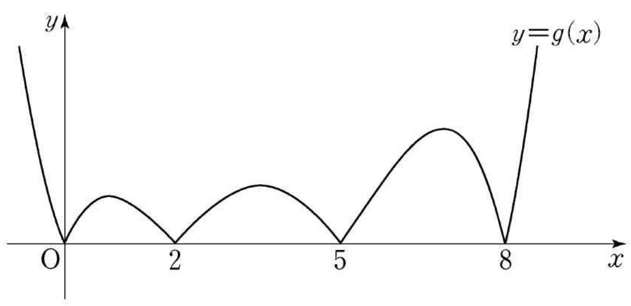
[2012년 11월 대수능 수리(가형) 19번]

19. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

??

$$g(x) = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx > 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

sol.2)

이전 풀이를 보고 수식을 이용한 부분이 딱히 없으니 성에 차지 않는 분들도 분명히 있을 것입니다. 사실 그래프간 역수를 취하는 기법은 수능 기출에서도 등장한 적이 있으니 당연히 익히고 있어야 하는 내용입니다.

그래서 준비해봤습니다 ㅠㅠ

$f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$라 잡으면 우선 $k>0$일 때

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{k}(x-a)^{-1}(x-b)^{-1}(x-c)^{-1}$가 되고, 몫의 미분법보다 음수 지수로 전환해서 미분하는 편이 훨씬 계산이 간단하고 정확해지기 때문에

$$\begin{aligned} g'(x) = &-\frac{1}{k}(x-a)^{-2}(x-b)^{-1}(x-c)^{-1} \\ &-\frac{1}{k}(x-a)^{-1}(x-b)^{-2}(x-c)^{-1} \\ &-\frac{1}{k}(x-a)^{-1}(x-b)^{-1}(x-c)^{-2} \\ =&\ \frac{(x-a)^{-2}(x-b)^{-2}(x-c)^{-2}}{-k} \\ &\times\{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)\} \\ =&\ \frac{3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)}{-k(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2} \end{aligned}$$

그리고 $g(x)$가 극값을 갖기 위한 필요충분조건은 도함수의 부호가 $|x|$처럼 불연속적으로 바뀌어도 좋으니 바뀌는 것이므로, 분자 부분인 이차식 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$가 0이 되는지를 살펴보아야 합니다.

그러면 판별식을 적용해보면

$$\begin{aligned} D/4 &= (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \\ &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} > 0 \quad \because\ a<b<c \end{aligned}$$

이 됩니다. 따라서 $g(x)$는 서로 다른 두 극값을 갖기 때문에 ㄱ은 참입니다.

다음으로 ㄴ을 살펴보자면 $x=a,b,c$에서 $g(x)$가 불연속이고 좌우극한값이 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하기 때문에 세로 점근선이 되어 참입니다.

끝으로 ㄷ을 보자면, 두 개의 극값을 어디서 갖는지 파악해야 하는데, 이는 연속함수에 대한 중간값의 정리를 이용하여 보일 수 있습니다.

$g'(x) = \dfrac{3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)}{-k(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$가 $x=a,b,c$를 제외한 나머지 구간, 즉 $(-\infty,a),(a,b),(b,c),(c,\infty)$에서는 연속함수이고,

$\lim\limits_{x\to a+0} g'(x) = -\infty$와 $\lim\limits_{x\to b-0} g'(x) = \infty$이므로 연속함수에 대한 중간값 정리에 의하여 개구간 (a,b)에서 $g'(x_1)=0$이 되는 $a<x_1<b$가 존재하며 $x=x_1$에서 $g(x)$는 극솟값을 갖습니다. 마찬가지로 $\lim\limits_{x\to b+0} g'(x) = \infty$와 $\lim\limits_{x\to c-0} g'(x) = -\infty$이므로 연속함수에 대한 중간값 정리에 의하여 개구간 (b,c)에서 $g'(x_2)=0$이 되는 $b<x_2<c$가 존재하며 $x=x_2$에서 $g(x)$는 극댓값을 갖습니다.

그리고 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$으로서 $g(x)$의 가로 점근선이 $y=0$, 즉 x축이 됩니다.

지금까지의 정보들을 종합하여 그래프 개형을 그려보면 $sol.1$)에서의 모습이 나옵니다. 따라서 $g(x)=k$의 실근의 개수가 최대일 때는 5가 아니라 3이므로 거짓입니다. 물론 k가 음수라 하더라도 ㄱ, ㄴ, ㄷ에 대한 진위 여부는 동일하게 성립합니다.

※ $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$로 두고 계산하면 더 깔끔할 수도 있습니다.

[2009년 04월 교육청 수리(가형) 11번]

11. 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & (|x|>1) \\ \dfrac{a}{1-x} & (|x|<1) \\ \dfrac{a}{2} & (|x|=1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 실근을 갖는다. (단, $a\neq 0$)

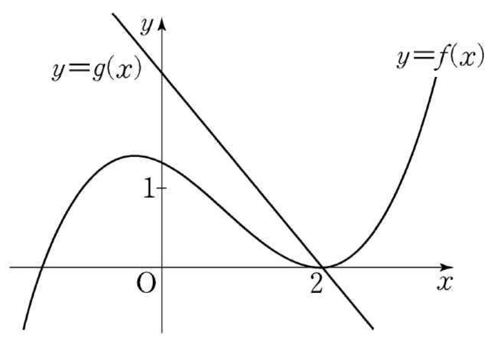
① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2009년 11월 대수능 수리(가형) 11번]

11. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 P(2, 0)에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다. $1<f(0)<g(0)$일 때, 방정식

$$f(x)+g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$$

의 실근의 개수는? [4점]



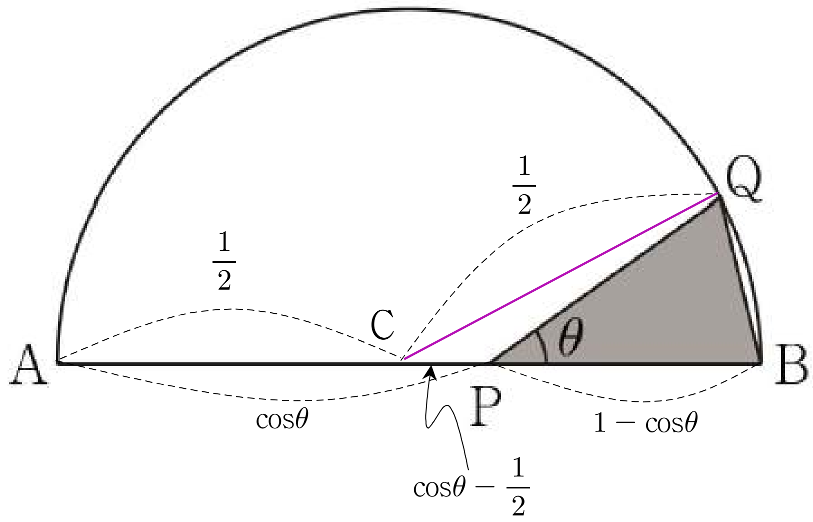
① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

※ 도함수, 이계도함수를 이용하여 증감표 그리기, 기/우성 파악, 산술기하, 합성, 치환 등등 그래프 개형을 찾아내기 위한 여러 가지 방법들이 있는데, 가로, 세로 혹은 사선 점근선을 염두에 두고 그래프 개형 파악하는 것과 그래프 자체 연산으로서 역수 그래프를 그리는 것도 익혀 두어야 지금과 같은 문제와 마주쳤을 때 당황하지 않고서 오히려 입가에 미소를 머금고 풀어낼 수 있겠죠?

21. [출제자라면 어떻게 풀기를 생각했을까?]

$sol.1)$

점 P가 애매한 위치에 있기 때문에 다루기 쉽도록 또 다른 매개변수의 도입을 하거나 보조선을 통해 해결해야 합니다.



일단은 반원의 지름에서 그 중심을 C라 하고, 반지름 CQ를 연결합시다.

그러면 $S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}(1-\cos\theta)\sin\theta$ 꼴에서 구하라는 극한값은

$$\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$

와 같이 분모의 θ가 극한값이 상쇄되는 형태로 분배되어야 하므로, 문제가 잘못되지 않는 이상 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 결국 θ에 대한 이차식에 준하는 값이어야만 합니다. 이때 삼각형 CPQ에 제이코사인법칙을 적용해보면

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{CQ}}^2}{2\cdot\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}}$$

에서 $-\cos\theta=\dfrac{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-\frac{1}{4}}{(2\cos\theta-1)\overline{\mathrm{PQ}}}$ 이 되고, $\overline{\mathrm{PQ}}$에 대한 이차방정식 형태로 정리해보면

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2+\cos\theta(2\cos\theta-1)\overline{\mathrm{PQ}}+\cos^2\theta-\cos\theta=0$$

이 됩니다. 그리고 근의 공식을 적용 해보면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{-\cos\theta(2\cos\theta-1)\pm\sqrt{\cos^2\theta(2\cos\theta-1)^2-4\cos^2\theta+4\cos\theta}}{2}$$

그런데 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 길이이므로 양수가 되어야 하기에 $\pm$ 중에서 $+$ 부호만을 취하되 편의상 $\cos\theta=c$로 치환해서 정리를 마저 하자면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{-c(2c-1)+\sqrt{c^2(2c-1)^2-4c^2+4c}}{2}$$

가 됩니다. 그리고 $\theta\to+0$일 때 $c=\cos\theta\to1-0$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 분자 부분이 $-1+1=0$꼴로 전체적으로 무한소 0으로 가기 때문에 분자의 켤레꼴을 분모와 분자에 곱해주면 무한소로 가는 요소만을 캐치하고자!

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{c^2(2c-1)^2-c^2(2c-1)^2+4c^2-4c}{2\left\{-c(2c-1)-\sqrt{c^2(2c-1)^2-4c^2+4c}\right\}}$$

$$=\frac{2c(1-c)}{c(2c-1)+\sqrt{c^2(2c-1)^2-4c^2+4c}}$$

따라서 $\theta\to+0$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 분자 중 $1-c=1-\cos\theta$ 부분만 무한소 0으로 가고 나머지 부분은 모조리 상수 값을 취하게 됩니다. 이때

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}=\frac{2\cdot1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot(2\cdot1-1)+\sqrt{1^2(2\cdot1-1)^2-4\cdot1^2+4\cdot1}}=\frac{1}{2}$$

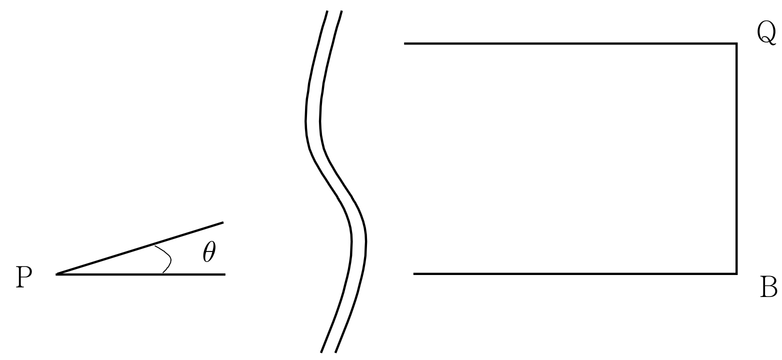
이고, $\dfrac{S(\theta)}{\theta^5}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 에서

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{8}$$

$sol.2)$

$\theta\to+0$이면 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$는 서로 평행해져 갑니다.

그리고 그때 현 BQ의 기울기는 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점 B에서의 접선에 다가갑니다. 즉, 극한 상황의 그림을 아~주 아주 확대해서 바라보면 삼각형 BPQ는 다음과 같을 것입니다.



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=1-\cos\theta\simeq\dfrac{\theta^2}{2}\simeq\overline{\mathrm{PQ}}$라 볼 수 있기 때문에

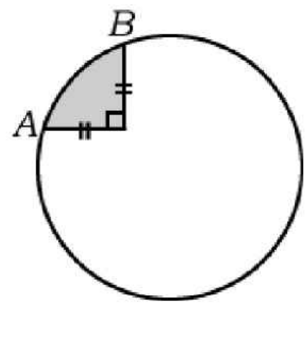
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\sin\theta\simeq\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\cdot\theta=\frac{\theta^5}{8}$$

이 되어 답은 $\dfrac{1}{8}$이 됩니다. 마치 이등변삼각형 BPQ처럼 보는 셈이죠!

[2009년 06월 평가원 대비 포카칩 수리(가형) 30번]

30. 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이 있다. 호 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각을 θ라 할 때, 색칠한 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)+\sin\theta-\theta}{\theta^2}=\frac{b}{a}$라 할 때, $10(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소) [4점]



22. [엄밀엄밀 열매를 먹었나]

$sol)$

$15n-1\le15n+\sin nx\le15n+1$

$$\Rightarrow\ \frac{15n-1}{n+1}\le\frac{15n+\sin nx}{n+1}\le\frac{15n+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{15n-1}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{15n+\sin nx}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{15n+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow\ 15\le\lim_{n\to\infty}\frac{15n+\sin nx}{n+1}\le15$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{15n+\sin nx}{n+1}=15$$

23. [로그방정식]

sol)
$\log_2(x-2) = \log_2(8-x)$에서 $x-2 = 8-x$여야 하므로 $x = 5$입니다.

24. [무리방정식]

sol)
$\sqrt{x^2-3x+1} = t \geq 0$이라 치환하면 준 식은 $t = t^2-6$, 즉
$t^2-t-6 = (t+2)(t-3) = 0$에서 $t = \sqrt{x^2-3x+1} = 3$이 되고,
$x^2-3x+1 = 9$에서 $a = -8$이므로 $a^2 = 64$가 답이 됩니다.

[2014년 11월 대수능 수학 영역(B형) 24번]

24. 무리방정식 $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-1}=3$의 모든 실근의 곱을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [3점]

25. [등차수열의 합은 평균과 항수의 곱으로서]

sol)
$S_{10}-S_7 = a_8+a_9+a_{10} = 3a_9 = 48$이므로 $a_9 = 16$이 답입니다.

[2007년 03월 교육청 수리(가형) 22번]

22. n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = 260$

이때 n의 값을 구하시오. [4점]

26. [$\sqrt{A^2} = |A| = \cdots$]

sol)
$x \to +0$일 때 $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$이고,
$x \to -0$일 때 $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = -x$임을 염두에 두고 계산해보면

$$a = \lim_{x\to+0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\frac{5x}{x^2+x} = 5$$

$$b = \lim_{x\to-0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\frac{5x}{x^2-x} = -5$$

이므로 $5a+b = 25-5 = 20$이 답입니다.

27. [삼각방정식의 일반해]

sol)
$y = \dfrac{1}{\cos(2^n x)}$의 분모 부분인 $\cos(2^n x)$는 자체가 연속이기 때문에 분모가 0이 되어서 전체적으로 $y = \dfrac{1}{\cos(2^n x)}$이 불연속이 되는 경우 밖에 없습니다.
그러면 $0 < 2^n x < 2^n \pi$의 범위에서 $\cos(2^n x) = 0$이 되는 값들을 찾으면 되겠죠? 단위원을 염두에 두고 생각해보면

$$2^n x = k\pi - \frac{\pi}{2}\quad (k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n)$$

즉, $x = \dfrac{1}{2^n}\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n)$이 $\cos(2^n x) = 0$의 근이자 $y = \dfrac{1}{\cos(2^n x)}$의 불연속점이 되는 세로 점근선이기도 합니다. 따라서
$a_n = 2^n$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{8} a_n = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = 510$이 답이 됩니다.

28. [헬게이트 오픈합니다]

sol)
문제가 아~주 아주 복잡한 것 같지만 다행히도 해당하는 집합의 원소의 개수가 1이 되는 경우만을 생각 해주면 되기 때문에 풀만 합니다. 우선은 주어진 분수 부등식을 동치변형 해보면

$$\frac{x-a}{(x-2)(x-b)} \leq 0 \iff (x-2)(x-a)(x-b) \leq 0,\quad x \neq 2, b$$

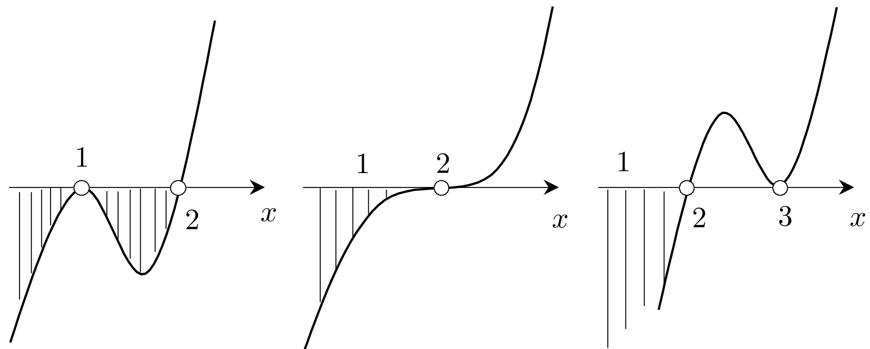
가 됩니다. 여기서 $x = a, b$와 2가 중복되는 경우를 고려하며 삼차함수 개형을 그려서 자연수 해의 개수를 헤아려야 할텐데, 문제해결을 가장 효율적으로 행하게 하기 위한 적절한 기준을 생각하는 것이 관건입니다.

한 번 고민해보다가 그래도 안 보이면 이어지는 풀이를 봐주세요!

다음과 같이 크게 두 가지 경우로 나누어 살펴보겠습니다.

$\boxed{case.1)\ \ a = b}$

$a = b = 1$ $\qquad a = b = 2$ $\qquad a = b \geq 3$



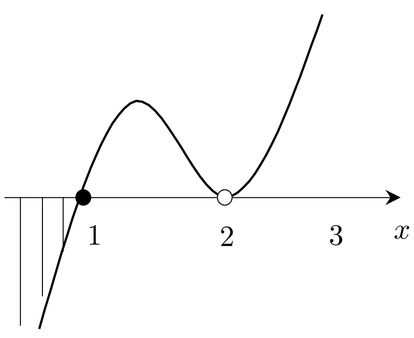
자연수 해 없음 $\qquad x = 1$만 자연수 해 $\qquad x = 1$만 자연수 해

이때는 $(a, b) = (2, 2), (3, 3), (4, 4), \cdots, (10, 10)$으로 총 9개가 있습니다.

$\boxed{case.2)\ \ a \neq b}$

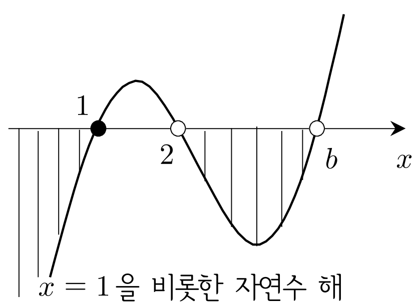
이제 한결 편히 살펴볼 수 있습니다.

$a=1, b=2$



$x=1$만 자연수 해

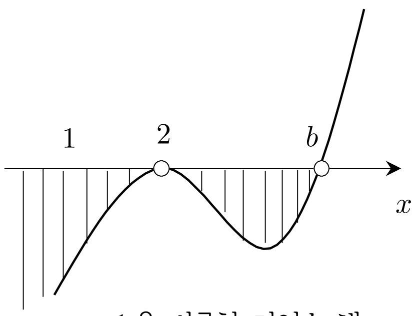
$a=1, b\geq 3$



$x=1$을 비롯한 자연수 해

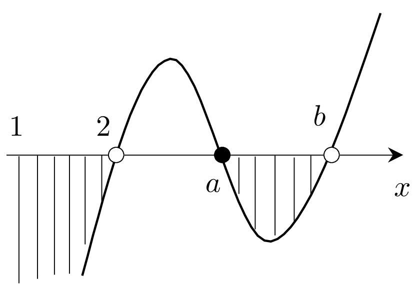
이 경우 $(a,b)=(1,2)$는 바로 해당하지만 $a=1, b\geq 3$의 경우
$2<x<b$의 자연수 해가 존재하지 않도록 하는 b는 3뿐입니다. 따라서
$(a,b)=(1,3)$도 추가하여 총 2개가 있습니다.

$a=2, b\geq 3$



$x=1$을 비롯한 자연수 해

$a\geq 3, b\geq 4$



적어도 $x=1, a$를 자연수 해

이때는 $(a,b)=(2,3)$만 가능합니다.
고로, 결과를 종합해보면 $9+2+1=12$가 답이 됩니다.

[2005년 11월 대수능 수리(가형) 08번]

8. 두 자연수 a, b $(a<b)$에 대하여 분수부등식

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}\leq 0$$

을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

29. [문과 수학 킬러 문항도 풀어본 적 있나요]

sol)
한 번 상용로그 $\log x=1.6$와 $\log y=2.5$를 생각 합시다. 이때
'상용로그 가수 간의 합'과 '상용로그 간 합의 가수'는 엄연히 다른 의미를
지닙니다. 계산 해봐도 $0.6+0.5\neq 0.1$로 다르기 때문이지요.
하지만 경우에 따라, 이를테면 $\log z=0.1, \log w=0.5$라 한다면 상용로그
가수 간의 합과 상용로그 간 합의 가수가 동일하게 됩니다.
그리고 지금은 이 문제에서는 이를 구분해서 생각해야 하구요.
이제 본격적으로 $g(1), g(2), g(3), g(4), g(5)$를 하나씩 구해보도록 하겠습니다.
처음부터 보자마자 이런 생각을 하기란 어려우니, 막상 문제를 풀어보면서
시행착오를 통해 깨달음을 얻고 이러한 사고를 해서 푼다 해도 훌륭합니다.

$i)$ $f(a)+f(b)=0 \Rightarrow \log 1+\log 1$
상용로그의 가수가 0인 자연수는 해당 범위에서 1, 10만이 가능합니다.
따라서 $(a,b)=(1,1),(1,10),(10,10)$이 가능하며 $g(1)=3$입니다.
여기서 필터링 해야 하는 것들로 $a=4, b=25$와 같은 경우가 있습니다.
이것들은 상용로그 취하였을 때 $\log a=\log 4, \log b=1+\log 2.5$가
되는데 상용로그 간 합의 가수는 0이 될 지언정, 정작 문제에서 요구하는
상용로그 가수 간의 합은 $\log 4+\log 2.5=1\neq 0$이 되기에 주어진 조건을
만족하지 못하기 때문입니다.

$ii)$ $f(a)+f(b)=\log 2 \Rightarrow \log 1+\log 2$
상용로그의 가수가 $0=\log 1$ 혹은 $\log 2$인 자연수는 해당 범위에서
1, 2, 10, 20만이 가능합니다. 그리고 $\log a+\log b=n+\log 2$로서
$ab=2\times 10^n$의 꼴이기 때문에 (단, $n=0,1,2,3,\cdots$)
$ab=2, 20, 200, 2000, \cdots$가 되면서 상용로그의 가수가 $\log 1$이나 $\log 2$인
것들로서 가능한 순서쌍을 오름차순으로 하나씩 구해보면
$(a,b)=(1,2),(1,20),(2,10),(10,20)$가 가능하므로 $g(2)=4$입니다.

$iii)$ $f(a)+f(b)=\log 3 \Rightarrow \log 1+\log 3=\log 2+\log 1.5=\cdots$
늦어도 이쯤에서는 문제에 숨겨진 수학적인 그 무엇을 캐치해야 합니다.
$\log a+\log b=n+\log 3$으로서 $ab=3\times 10^n$의 꼴이기 때문에
$ab=3, 30, 300, 3000, \cdots$가 되면서 상용로그의 가수가 $\log 1$이나
$\log 3, \log 2, \log 1.5$ 등으로서 가능한 순서쌍을 오름차순으로 하나씩 구해보면
$(a,b)=(1,3),(1,30),(2,15),(3,10),(10,30),(12,25),(15,20)$이므로
$g(3)=7$입니다.

$iv)$ $f(a)+f(b)=\log 4 \Rightarrow \log 1+\log 4=\log 2+\log 2=\cdots$
$\log a+\log b=n+\log 4$에서 $ab=4\times 10^n$의 꼴이기 때문에
$ab=4, 40, 400, 4000, \cdots$가 되는 순서쌍을 오름차순으로 하나씩 구해보면
$(a,b)=(1,4),(2,2),(1,40),(2,20),(4,10),(10,40),(16,25),(20,20)$이므로 $g(4)=8$입니다.

$v)$ $f(a)+f(b)=\log 5 \Rightarrow \log 1+\log 5=\log 2+\log 2.5$
$ab=5, 50, 500, 5000, \cdots$가 되는 순서쌍을 오름차순으로 하나씩 구해보면
$(a,b)=(1,5),(1,50),(2,25),(5,10),(10,50),(20,25)$이니 $g(5)=6$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{5} g(n)=3+4+7+8+6=28$$

[2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번]

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m,n)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1\leq m<n<100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}=\sqrt{1+(\log 2)^2}$

[2015학년도 06월 이해원 모의고사 수학 영역(B형) 29번]

29. 1000 이하의 자연수 k와 100이하의 자연수 n에 대하여

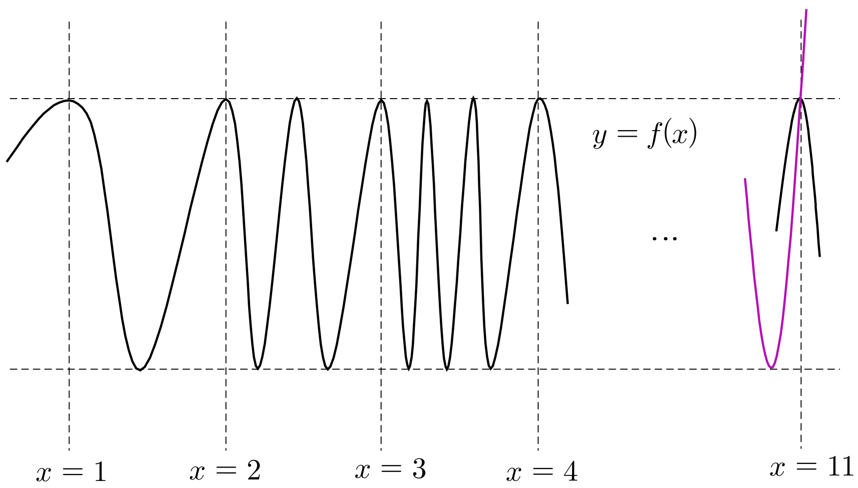
$$n\times\frac{2^k}{\log_2 k}$$

이 자연수가 되도록 하는 k의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_1=4$이고 $a_{55}=5$이다. 이때, $a_n=5$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

30. [같은 정답 속의 너]

$sol.1)$

닫힌 구간 $[n, n+1]$ 내의 모든 실수 x에 대하여 $f(a) \le f(x) \le f(b)$ 라는 조건으로부터, 해당 구간에서 $f(a)$는 최솟값이어야 하고, $f(b)$는 최댓값이어야 함을 알 수 있습니다! 그런데 서로 다른 a, b의 개수가 각각 $n, n+1$이므로 최솟값들끼리 같은 값을 취해야 하고, 최댓값끼리 같은 값을 취해야 합니다. 그리고, 이 문제의 핵심 아이디어는, 최댓값이 극댓값이어야만 하는지, 최솟값이 극솟값이어야만 하는지를 판단하는 거구요.
한편, $f'(k) = 0$, 즉 $x = k$에서의 미분계수가 0임이 의미하는 바는 연속이고 미분가능한 함수의 경우 $f'(k) = 0$인 $x = k$에서 극값을 갖거나 혹은 변곡점을 갖거나 아니면 상수함수와 같은 상황뿐이라는 것입니다.
하지만 $f'(k) = 0$인 서로 다른 k의 개수가 최소가 되기 위해선 상수함수는 k의 개수가 무한해지므로 제외해야 하고, 변곡점도 가급적 최소로 갖는 함수여야 하기 때문에 $f'(k) = 0$는 극값 정도에서만 허용하도록 하면 됩니다.
지금까지의 조건들을 고려하여 '이랬으면 좋겠다 싶은' 그래프 개형을 그려보면
'예를 들어' 이후 제시된 그래프 부분은 시험 전날에 정답률을 고려해서 리듬농구님이 급하게 추가한 것입니다. 검토자들마저도 다 틀려버린 수정 전의 왕변태 문항을 기준으로 이 해설이 작성된 것이니 문제의 힌트는 무시합니다.



위와 같이 매 구간마다 최댓값이 최솟값보다 하나 더 많아야 하고, $n < x < n+1$에 존재하는 최댓값들은 극댓값으로서 미분계수가 0이 되어야 하는데, 이를 $n = 2, 3, 4, \cdots, 10$에서 극댓값으로 연결해줄 수 있습니다.
그런데, 위 그림과 달리 문제에서 언급하고 있는 조건 구간 $[1, 11]$의 경계인 $x = 1$과 $x = 11$에서는 $f(x)$가 최댓값을 가지기만 하면 될 뿐 그것이 항상 극댓값이어야 할 필요는 없습니다! $x = 1, 11$은 단지 최댓값, 최솟값 개수 조건을 만족해야 하는 하나의 구간에만 속하니까요.
고로, $f'(k) = 0$의 서로 다른 k의 개수의 최솟값은 k가 극솟값인 경우 $1+2+3+\cdots+10 = 55$이고, k가 극댓값인 경우는 극솟값일 때보다 하나 더 모자란 54가 되어서 $m = 55 + 54 = 109$가 답이 됩니다.

[2004년 09월 평가원 수리(가형) 25번]

25. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f : A \to A$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f는 일대일 대응
(나) $f(1) = 7$
(다) $k \ge 2$이면 $f(k) \le k$

[2009년 05월 교육청 수리(가형) 15번]

15. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 $f(2n) = 1$이고 $f(2n+1) = -1$이다.

함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(x)$는 역함수가 존재하지 않는다.
ㄴ. 폐구간 $[1, 2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
ㄷ. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x) = 0$은 개구간 $(0, 2m)$에서 적어도 $2m$개의 실근을 갖는다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2014년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

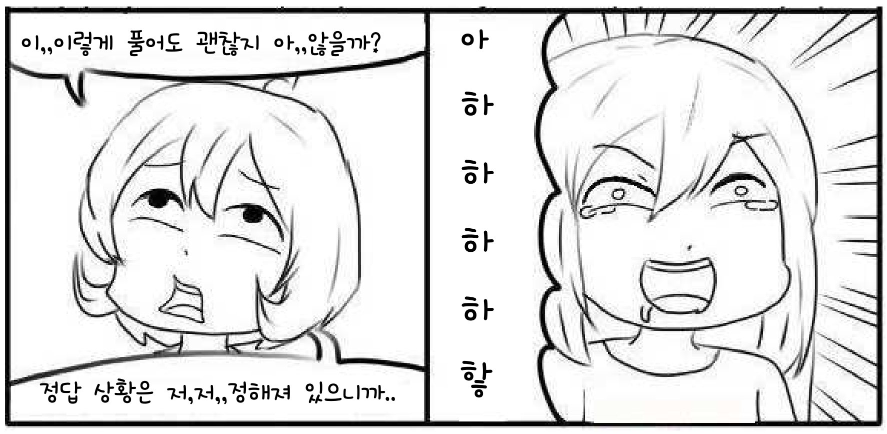
30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)\,dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

$sol.2)$

이전 $sol.1)$은 너무 직관적이지 않냐는 리듬농구님의 날카로운 지적과

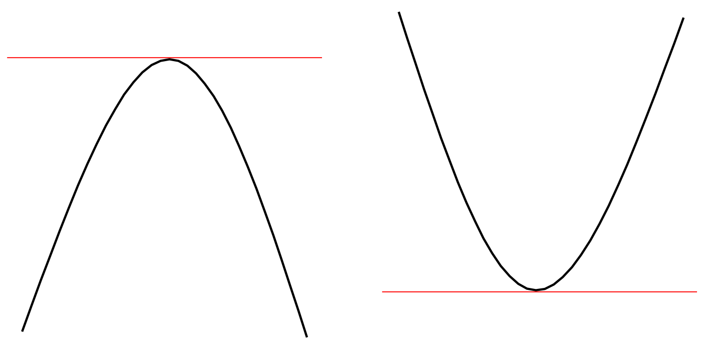


그래서 더 엄밀히 안 하면 지켜보는 여러분들이 실망 해버릴 것 같은 생각에,

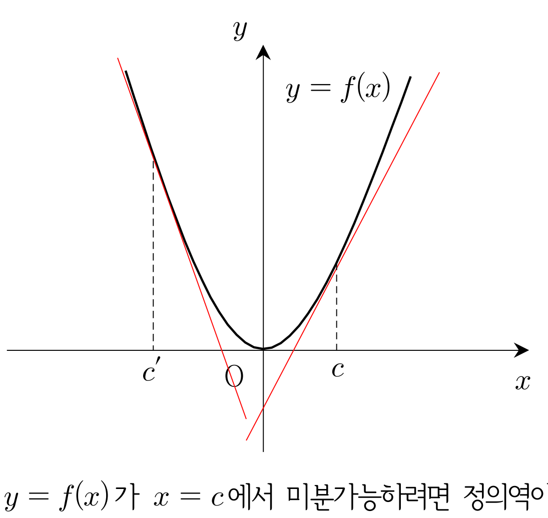
최대한 논리적이면서, 누가 봐도 리얼팩트 반박불가 하도록 다시 보이겠습니다. 아~주아주 엄밀하기로 소문나서 모태 수학덕후나 수학변태들이 즐겨 본다는 (2009) 고등학교 수학 Ⅱ 성지 출판사 교과서에 근거해서 설명할 거니까요!
그리고 계승혁(2010), 우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대, 극소를 설명하는 방식에 대한 비판적 논의라는 논문에 의하면, 꽤 많은 교과서들에서 개념을 잘못 설명하고 있어서 학생들은 물론 심지어 교사들도 오개념을 갖고 있는 경우가 많아서 이 문제를 풀 때 잘못 접근할 수 있습니다.
우선, 문제에서의 상자 부분에서는 닫힌 구간을 의미하는 n과 $n+1$이, 최댓값과 최솟값의 개수를 의미하는 n과 $n+1$이 충돌하고 있는 듯 한데 이는 적절하게 구분하여 받아들여야 합니다.

> 닫힌 구간 $[n,\ n+1]$의 두 실수 $a,\ b$에 대하여
> $n \le x \le n+1$일 때, $f(a) \le f(x) \le f(b)$를 만족시키는
> 서로 다른 $a,\ b$의 개수가 각각 $n,\ n+1$이다.

또 특이한 점으로 중첩되는 구간들에서의 최댓값과 최솟값을 구하라고 묻고 있는데, 그렇다면 다음에 필연적으로 이루어질 사고는 어떠한 것이어야 할까요? 교과서의 개념 설명 방식에 따르면, 먼저 "롤의 정리"를 제시합니다. 가령 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 가지는 경우, 점 $(c, f(c))$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선이 어떤 모습일지를 생각해봅시다.



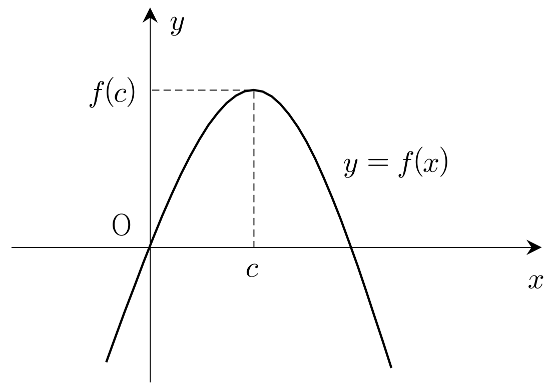
아마도 위와 같은 모습이 나오겠죠? 특히 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하고 최댓값을 가지면 $f'(c)=0$이 됩니다. 즉, 점 $(c, f(c))$에서 그은 접선의 기울기는 x축에 평행한데, 이는 미분계수의 핵심적인 성질입니다. 실제로 $f'(c)>0$이거나 $f'(c)<0$이면 점 $(c, f(c))$에서 그은 접선이 기울어져 있으므로 $x=c$에서 최댓값이나 최솟값을 가질 수 없으리라 예상할 수 있습니다.



그렇다면 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하려면 정의역이 어떤 모습이어야 하는지 알아봅시다. 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하다는 것은 극한값

$$\lim_{t\to c}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}$$

가 존재한다는 것입니다. 그런데 함수의 정의역이 $[a,b]$이면 $c=a$이거나 $c=b$인 경우 한쪽 극한값이 정의되지 않으니 위 극한값을 생각할 수 없으므로 미분가능한 함수의 정의역은 항상 열린 구간으로 간주해야 합니다.
그리고 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 최댓값을 가지면 정의역의 모든 t에 대하여 $f(t)\le f(c)$입니다.



따라서 t가 $t>c$이면서 정의역 안에 있으면

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0 \qquad f(t)-f(c)\le 0,\ t-c>0$$

이고, t가 $t<c$이면서 정의역 안에 있으면

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0 \qquad f(t)-f(c)\le 0,\ t-c<0$$

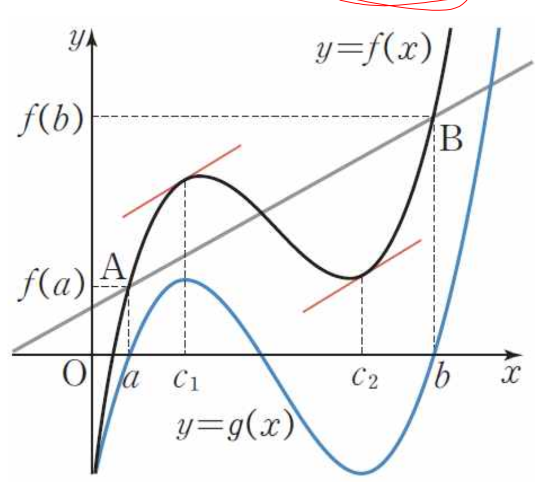
입니다.
그런데 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하면 $f'(c)$가 존재하므로

$$0\le \lim_{t\to c-0}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}=f'(c)=\lim_{t\to c+0}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0$$

이므로 결국 $f'(c)=0$이 됩니다. 이와 비슷하게 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하고 최솟값을 가지는 경우에도 부등식의 방향을 바꾸어 생각하면 $f'(c)=0$을 이끌어 낼 수 있습니다. 종합하자면 열린 구간에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분 가능하고 최댓값 혹은 최솟값을 가지면 $f'(c)=0$이라 할 수 있습니다.
만약 닫힌 구간 $[a,b]$에서라면 연속인 함수 $y=f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지는데, 이로부터 롤의 정리를 이끌어 낼 수 있습니다.

> **롤(Rolle)의 정리**
> 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분 가능할 때 $f(a)=f(b)$이면
> $$f'(c)=0$$
> 을 만족하는 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

그리고 $f(a)\ne f(b)$로 경계 끝점을 잇는 직선의 기울기, 즉 평균 변화율이 0이 아니라 기울어진 경우로 확장해버리면 "평균값의 정리"를 얻게 됩니다.



함수 $y=f(x)$의 양 끝점 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$를 잇는 직선의 방정식

$$y=f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

를 생각하고, 이 직선을 이용하여 함수 $y=g(x)$를

$$g(x)=f(x)-\left\{f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right\}$$

와 같이 정의하겠습니다. 그러면 함수 $y=g(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능합니다. 또한,

$$g(a)=g(b)=0$$

이므로 롤의 정리를 적용할 수 있습니다. 따라서

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

을 만족하는 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재하고, 이 c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 성립합니다.

평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분 가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

고등학교 수준에서 평균값의 정리를 배우는 가장 큰 이유는

「 함수 $f(x)$가 열린 구간에서 미분가능하고, $f'(x)>0$이면 그 구간에서 증가함수이다 」

라는 명제와

「 상수차를 무시하면 부정적분이 유일하게 존재한다 」

는 것의 증명에 각각 이용하기 위한 것입니다. 따라서 함수의 증가, 감소를 설명할 때, 이미 공부한 평균값의 정리를 이용하지 않고 증가상태와 감소상태 같은 개념을 이용하는 것은 교육과정의 내용을 온전히 전달하지 못하는 것입니다.

다음으로 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소의 관계를 논해봅시다. 함수 $y=f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이라고 가정합시다. 그 구간에서 $a<b$인 두 수 a,b를 잡으면 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 그 구간에 존재합니다. 그런데, $f'(c)>0$이므로

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)>0$$

입니다. 즉,

$$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$$

가 성립하므로 함수 $y=f(x)$가 그 구간에서 증가합니다. 같은 방법으로 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이면 함수 $y=f(x)$는 그 구간에서 감소함을 알 수 있습니다.

이제 함수의 증가와 감소를 살펴보겠습니다. 학생들이 많이 오해하는 것 중에

「 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 정의역의 한 점 $x=a$에서 $f'(a)>0$을 만족하면 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 증가함수가 된다 」

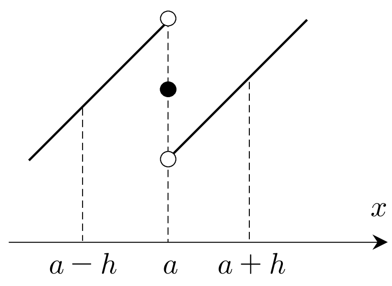
는 것이 있습니다. 참인 명제로 다듬어 보면 다음과 같습니다.

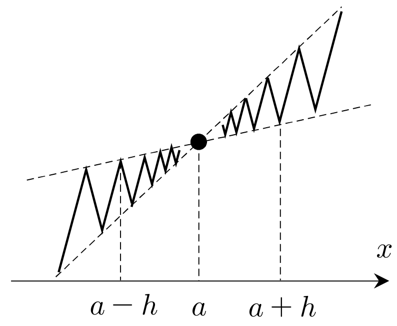
「 함수 $y=f(x)$가 열린 구간에서 미분가능하고 $f'(a)>0$이면 그 구간에서 증가함수가 된다 」

2016학년도 대수능이 적용받는 2007년 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서들 중에서 성지, 천재교육(이준열 외), 금성, 교학사를 제외한 모든 교과서에서는 위의 참인 명제를 설명하는 과정에서 '증가상태'라는 개념이 등장합니다. 금성 출판사 미적분과 통계 기본 교과서를 제외한 교과서들에서는, 충분히 작은 양수 h에 대하여

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$

가 성립하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다고 정의하고 있습니다. 하지만 교과서들에서조차 함수 $f(x)$가 연속이라는 가정을 하지 않고 증가상태를 정의함으로서 상식에 부합하지 않는 일이 일어납니다. 예를 들어, 다음과 같은 함수들은 교과서 정의에 의하면 $x=a$에서 증가상태가 됩니다.





하지만 설령 연속을 가정하더라도 오른쪽의 예에서처럼 문제는 여전히 존재하게 됩니다. 증가상태의 정의에 따르면 이 함수는 $x=a$에서 증가상태에 있지만 $x=a$를 포함하는 구간 $(a-h,a+h)$를 아무리 작게 잡아도 이 구간 위에서 증가함수는 아니게 됩니다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 증가상태에 있지만 $x=a$를 포함하는 구간을 아무리 작게 잡아도 그 구간 위에서 증가함수가 되지 않는 예는 미분가능한 함수의 경우에도 존재합니다. 예를 들어, 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+2x & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

라면 $x=0$에서 증가상태에 있지만 $x=0$을 포함하는 어떤 구간을 잡더라도 증가함수는 아니게 됩니다.

교과서마다 표현의 차이는 있지만 본질적으로 다음 명제를, 물론 참이기는 하지만, 당연한 것처럼 서술하고 있습니다.

「 함수 $y=f(x)$가 모든 점에서 증가상태이면 이 함수는 증가함수이다 」

즉, 증명을 건너뛰고 있다는 것을 암시하기 위하여 '잘 알려져 있다'는 등의 서술 방식을 사용하지 않고, 당연한 것처럼 서술하고 있습니다. 이를 증명하려면 대학 과정에나 등장하는 실수의 완비성 공리와 하이네 - 보렐 정리를 이용하여야 하기에 생략합니다. 따라서

「 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 정의역의 한 점 $x=a$에서 $f'(a)>0$을 만족하면 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 증가함수가 된다 」

는 오해를 하는 것은 이와 같은 서술 방식에서 기인하였을 가능성이 큽니다. 또한, 함수의 증가, 감소를 직관적으로 설명하는 과정에서 증가상태나 감소상태라는 개념은 도움을 주지 못하므로 이러한 개념을 사용하는 것은 심각하게 재고될 필요가 있습니다.

고로, 함수의 증가와 감소를 증명없이 설명할 때, 증가상태나 감소상태라는 개념을 도입하는 것보다는 함수의 그래프를 이용하여 함수의 증감과 도함수의 부호 사이의 연관성을 직관적으로 전달하는 것이 바람직합니다. 만약, 학생들이 이해할 수 있는 범위 내에서 엄밀성을 추가한다면, 구간에서 증가하는 함수는 그 구간에서 도함수의 값이 0 이상임을 증명하는 정도가 가능할 것입니다. 즉, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가함수인 경우에 증가함수의 정의를 이용하면 충분히 작은 $h(\neq 0)$에 대하여 다음 부등식

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

이 성립하고, 이로부터 각 점에서 도함수가 $f'(x)\geq 0$을 만족함을 증명하면 됩니다. 그리고 현 단계에서 증명할 수는 없지만

「 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 그 구간에서 함수 $f(x)$가 증가함수가 된다 」

고 서술하는 것이 한 가지 방법입니다. 또는 교육과정에 없더라도 직관을 도울 수 있는 그림과 함께 평균값 정리를 서술해주고, 이를 이용하는 것이 여러분들에게 자연스러울 것입니다.

이번에는 함수의 극대와 극소를 생각해봅시다. 2007년 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서들 중에서 천재교육(이준열 외), 성지를 제외하면 모든 교과서에서는

「 **함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $x=a$를 경계로 증가상태에서 감소상태로 바뀔 때 $f(a)$를 극댓값** 」

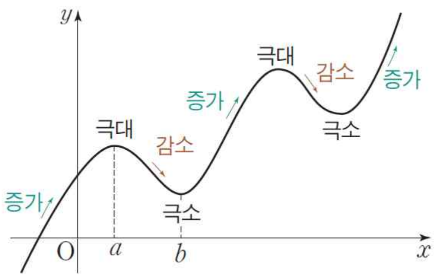
이라고 정의하고 있습니다.

[지학사 수학Ⅱ 교과서 p167]

함수 $f(x)=-x^2$은 $x=0$에서 연속이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀐다.

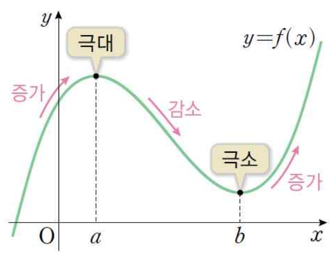
이와 같이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라고 하며 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또 함수 $f(x)=x^2$은 $x=0$에서 연속이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀐다. 이와 같이 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=b$에서 **극소**라고 하며 $f(b)$를 **극솟값**이라고 한다. 이때, 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



[미래엔 수학Ⅱ 교과서 p176]

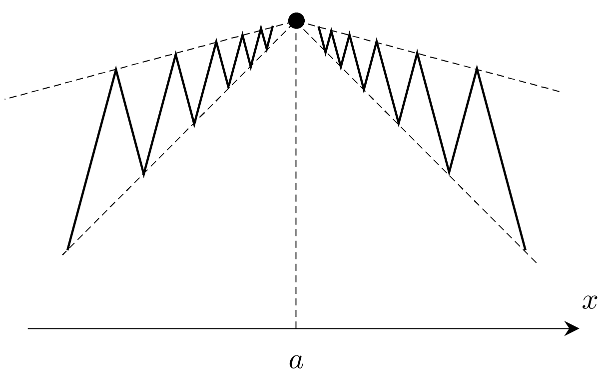
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.



또, 함수 $y=f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=b$에서 **극소**라 하고, 그때의 함숫값 $f(b)$를 **극솟값**이라고 한다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

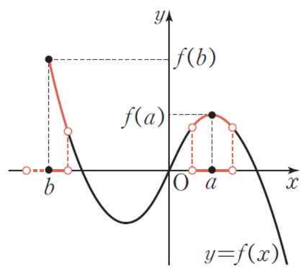
하지만 이러한 교과서 정의에 반하는 예로서 다음과 같은 함수를 생각할 수 있습니다.



이는 $x=a$에서 최댓값을 가지므로 상식적으로 생각한다면 $f(a)$가 극댓값이 되어야 하지만, $x=a$의 왼쪽에서 아무리 작은 구간을 잡더라도 그 위에서 증가함수가 아닙니다. 따라서 대부분의 교과서들 - 교학사, 금성, 더텍스트, 동아, 좋은책 신사고, 지학사, 천재교육(최용준 외) - 의 정의를 따르자면 위 함수는 $x=a$에서 극댓값을 가지지 않게 됩니다. 물론, 함수 $f(x)$가 미분가능한 경우에도 이와 유사한 예는 얼마든지 있습니다. 즉, 대부분의 교과서가 취하고 있는 극댓값의 정의는 상식에 부합되지 않는 정의입니다. 이러한 문제점은 상수함수의 경우에서 훨씬 심각하게 나타납니다. 대부분의 교과서에 따르면 상수함수는 극댓값과 극솟값을 가지지 않게 됩니다. 그렇다면 성지 출판사 교과서에서는 어떻게 극대, 극소를 정의하는지 봅시다.

[성지 수학Ⅱ 교과서 p144]

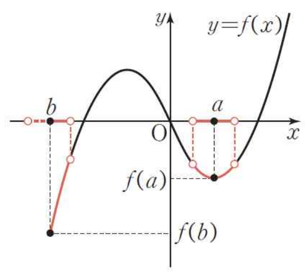
함수 $y=f(x)$의 정의역을 오른쪽 그림과 같이 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간으로 한정하였을 때 $x=a$에서 최댓값을 가지면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하며, 이때 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다. 이것은 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간을 적절히 잡으면, 그 열린 구간에서 함숫값 $f(x)$가 정의되는 모든 x에 대하여



$$f(x) \le f(a)$$

가 성립한다는 뜻이다. 따라서 위 그림에서 $f(b)$도 극댓값이 된다.

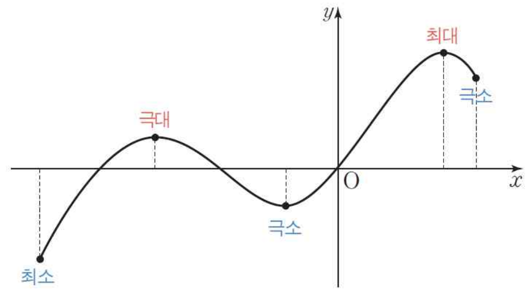
한편, 함수 $y=f(x)$의 정의역을 오른쪽 그림과 같이 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간으로 한정하였을 때 $x=a$에서 최솟값을 가지면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하며, 이때 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다. 이것은 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간을 적절히 잡으면, 그 열린 구간에서 함숫값 $f(x)$가 정의되는 모든 x에 대하여

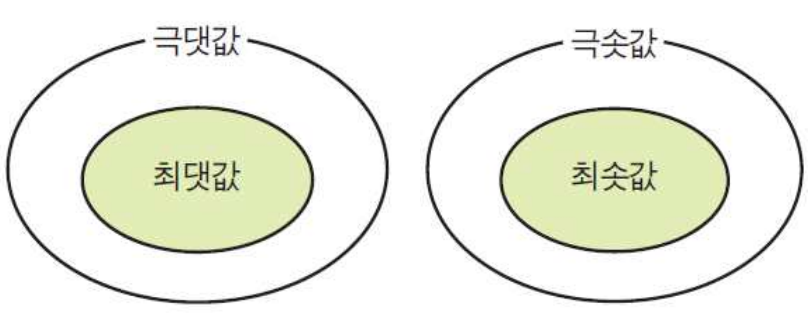


$$f(x) \ge f(a)$$

가 성립한다는 뜻이다. 따라서 위 그림에서 $f(b)$도 극솟값이 된다. 또한, 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

만일 $f(a)$가 함수 $y=f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이면 이는 극댓값 또는 극솟값이 된다. 그러나 함수 $y=f(x)$의 극값이 그 정의역 전체에서 $y=f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 되지 않거나 극댓값이 극솟값보다 작을 수도 있다.





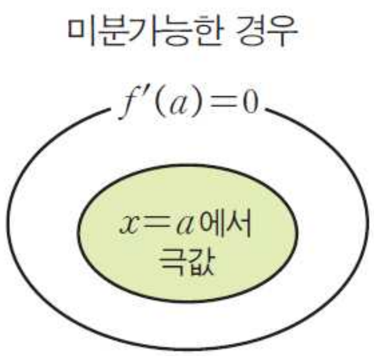
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, $x=a$를 포함하는 열린 구간을 적절히 잡으면 그 구간에서 $f(a)$는 최댓값이 됩니다. 따라서 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 최대, 최소의 정리와 미분계수의

관계에 의하여

$$f'(a)=0$$

임을 알 수 있습니다. 극솟값의 경우도 마찬가지이므로 다음을 얻을 수 있습니다.

> **미분가능한 함수의 극값**
> 열린 구간에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 극값을 가지면
> $$f'(a)=0$$
> 이다.



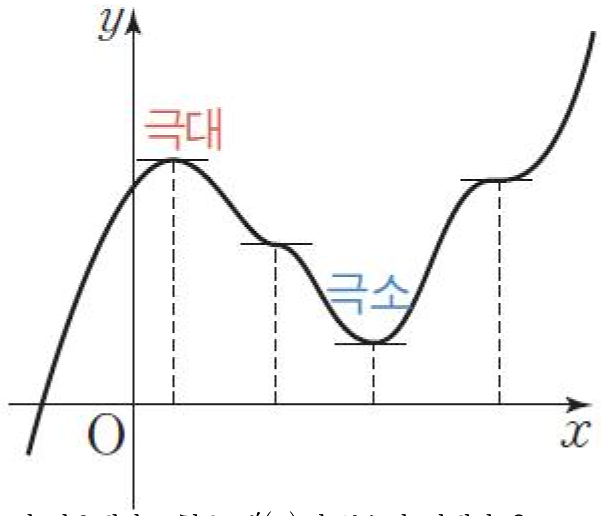
하지만 함수의 극값 자체는 미분가능성과 아무런 연관이 없음에 주목해야 합니다. 가령, 함수 $y=|x|$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖지만 위 사실을 적용할 수 없으며, 함수 $y=x^3$는 $x=0$에서 극값이 아닌 변곡점이 되는데 미분계수는 0입니다.

이제, 미분가능한 함수의 극댓값과 극솟값을 찾는 과정을 생각해 봅시다. 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가진다면 $f'(a)=0$이어야 하므로 먼저 방정식

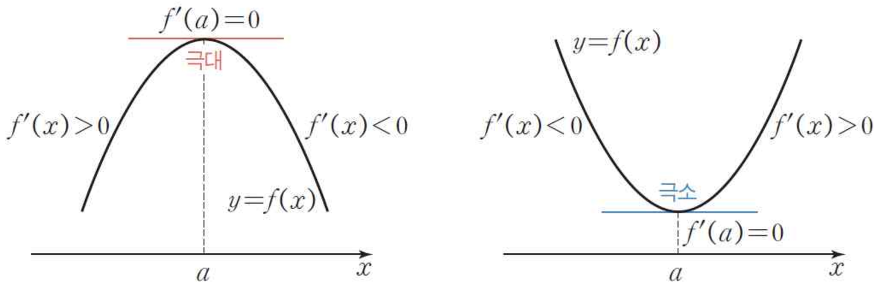
$$f'(x)=0$$

을 풀어서 해를 모두 구해야 합니다. 여기서 구한 해 중에는 극댓값을 가지는 것도 있고, 극솟값을 가지는 것도 있으며, 극값을 갖지 않는 것도 있습니다. 방정식을 풀어서 $f'(a)=0$임을 알았을 때, $x=a$에서 이 세가지 중 어느 것에 해당하는지 알려면 $x=a$의 좌우에서 함수의 증가와 감소를 알아보면 됩니다. 이는 $x=a$의 좌우에서 도함수의 부호가 무엇인지에 의하여 결정되는데, 다음과 같은 세 가지 경우가 있습니다.

(1) 도함수의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀐다.
(2) 도함수의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.
(3) 도함수의 부호가 바뀌지 않는다.



만일 $x=a$의 좌우에서 도함수 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$의 왼쪽 구간에서 증가하고 $x=a$의 오른쪽 구간에서 감소하므로 $x=a$에서 극댓값을 가지게 됩니다.
또, $x=a$의 좌우에서 도함수 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$의 왼쪽 구간에서 감소하고 $x=a$의 오른쪽 구간에서 증가하므로 $x=a$에서 극솟값을 가지게 됩니다.
하지만 미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$이지만 $x=a$의 좌우에서 도함수의 부호가 바뀌지 않으면 $x=a$에서 극댓값이나 극솟값을 갖지 않습니다. 이는 $f'(a)=0$은 $x=a$에서 극값을 갖기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아님을 의미합니다.



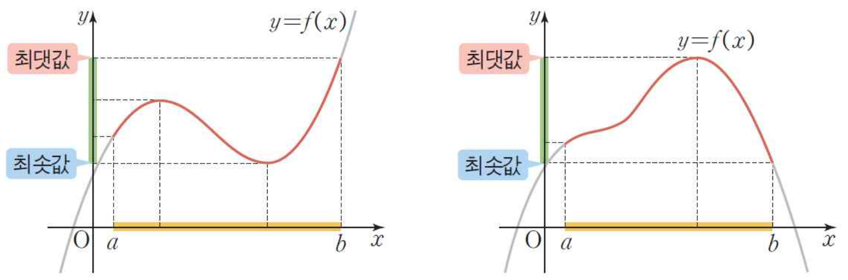
마지막으로 함수의 최댓값과 최솟값을 살펴보고 개념이 탄탄한 상태에서 문제를 풀어보도록 하겠습니다. 사실 함수의 극대 · 극소, 그리고 최대 · 최소라는 개념 자체는 함수의 연속성이나 미분가능성과는 아무런 관련이 없습니다. 이러한 개념이 연속성이나 미분가능성과 연관되었을 때 고등학교 수준에서 꼭 알아야 할 것은

○ 닫힌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다
○ 열린 구간 위에서 미분가능하고 그 도함수가 양이면
  함수는 그 구간에서 증가한다
○ 함수가 $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 가지고 미분가능하면
  $f'(a)=0$이다
○ 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능한 함수의 최댓값과 최솟값은 구간의 양 끝점이나 미분계수가 0인 점의 함숫값을 비교하여 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하면 된다

는 것입니다. 그리고 이러한 목적에 부합되게 앞서 극대와 극소를 정의하기를

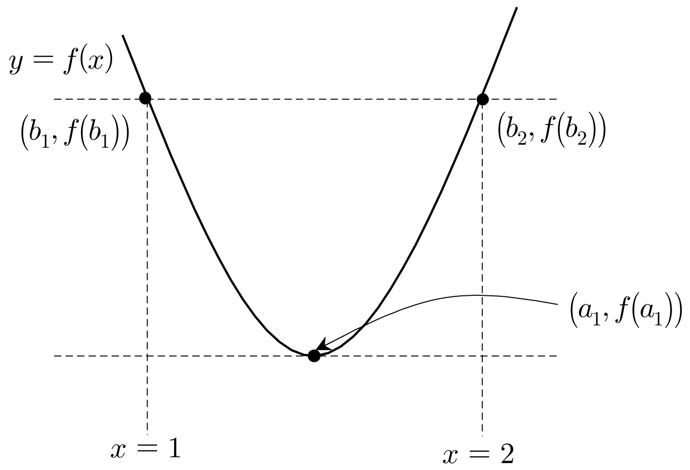
「 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f(x)$의 값이
$f(a)$ 이상(이하)이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서
극대(극소)가 된다고 하며, $f(x)$를 극댓값(극솟값)이라고 한다 」

와 같이 표준적인 방법 = 대학 미적분학이나 해석학과 같은 과목에서 극대와 극소를 정의하는 일반적인 방법으로 정의하였습니다.
이때 최댓값은 항상 극댓값이므로 극댓값들 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 마찬가지로 극솟값들 중에서 가장 작은 값이 최솟값이 됩니다. 닫힌 구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$는 항상 최댓값과 최솟값을 가지는데, 이 함수가 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면 극댓값이나 극솟값이 될 수 있는 것은 방정식 $f'(x)=0$의 근의 함숫값 또는 정의역의 양 끝점의 함숫값입니다. 따라서 방정식 $f'(x)=0$의 근과 양 끝점의 함숫값들을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있습니다.



이러한 사실들을 바탕으로, 다시 원래 문제로 돌아옵시다.
함수 $f(x)$가 미분가능하다는 것은 아무 언급이 없으면 모든 실수에서 미분가능함을 의미합니다. 그리고 $f'(k)=0$의 서로 다른 실근 k의 개수 m의 최솟값을 구하라고 하는군요. 일반적으로 미분가능한 함수가 극값을 갖는다면 그 지점에서 미분계수가 0이 되는 것은 참이지만 그 역은 성립하지 않습니다. 따라서 m이 최소가 되려면 미분계수가 0인 지점에서는 항상 극값을 가져야만 합니다.
그리고 최댓값과 최솟값이 여러 개 있는 상황은 곧, 극댓값과 극솟값들이 여러 개 있음을 의미합니다. 왜냐하면 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능한 함수의 최댓값과 최솟값은 구간의 양 끝점이나 미분계수가 0인 점의 함숫값을 비교하여 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하는 것이니까요.

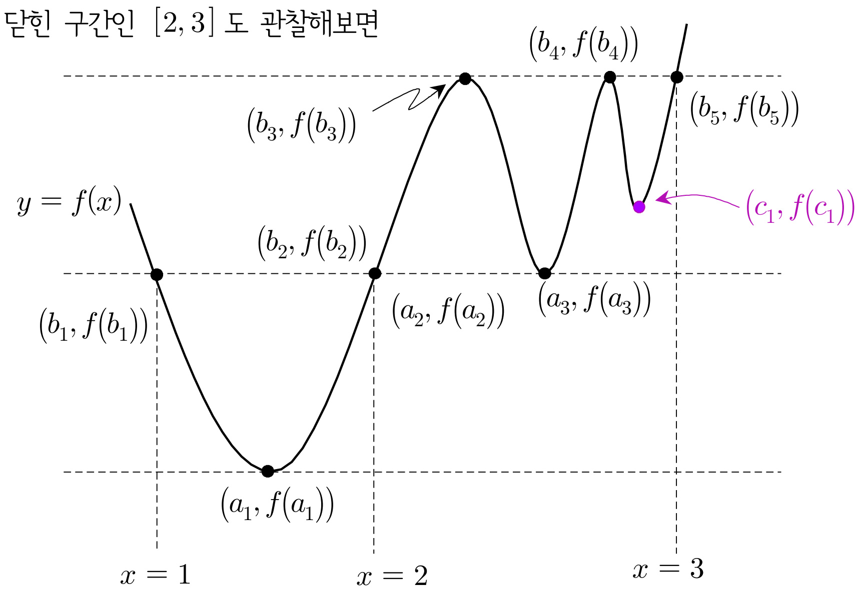
따라서, 극댓값들 간에 최댓값으로 함숫값이 같아야 하고, 극솟값들 간에 최솟값으로 함숫값이 같아야 합니다.
한편 문제의 조건에 의하면, 최댓값과 최솟값이 모든 구간에서 카운팅 되는 것이 아니라 해당 닫힌 구간 $[1, 2], [2, 3], \cdots, [9, 10], [10, 11]$ 에서 n개의 최솟값과 $n+1$개의 최댓값을 가져야 한다는 부분에 주목해봅시다. 최댓값과 최솟값을 따질 때, 해당 구간 내에서 발생하는 것들은 미분계수가 항상 0이어야 했지만, 해당 구간의 양 끝에서 발생하는 것들은 굳이 미분계수가 0이 아니어도 상관없습니다. 그러니 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 해당 조건을 만족하면서 $f'(k)=0$의 서로 다른 실수 k의 개수가 최소가 되도록 하는 개형은 다음과 같습니다.



최댓값들과 최솟값들을 구하기 위해선 그 후보들로서 해당 구간 양 끝값인 $x=1, x=2$와 두 개의 최댓값 $x=b_1, b_2$에서와 하나의 최솟값 $x=a_1$에서의 함숫값들을 비교하여야 하는데, 두 개의 최댓값이 연이어 나올 수는 없기에 최솟값보다 최댓값이 하나 더 많이 발생하려면

'최댓값 → 최솟값 → 최댓값'

순으로만이 가능합니다. 게다가, 해당 구간에서 처음 최댓값과 마지막 최댓값이 발생하는 $x=b_1, b_2$이 극댓값으로서 최댓값일수도 있고, 극댓값은 아니면서 구간 경계에 걸쳐서 최댓값일 수도 있는데, m이 최소가 되는데 기여하려면 구간 경계에 걸쳐서 최댓값이 되어야 하기 때문입니다. 그 다음 닫힌 구간인 $[2, 3]$ 도 관찰해보면



이러한 개형을 생각할 수 있습니다. 닫힌 구간 $[2, 3]$ 에서 3개의 최댓값과 2개의 최솟값을 따져야 하는데 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 $x=b_2=2$에서 최댓값이 닫힌 구간 $[2, 3]$ 에서는 $x=a_2=2$로서 최솟값이 되어 $(b_2, f(b_2))=(a_2, f(a_2))$가 되었습니다. 즉, 구간이 겹치다보니 어떤 구간에서 최댓값이었던 것이 어떤 구간에서 최솟값이 되기도 하는 것이죠. 이때 닫힌 구간 $[2, 3]$ 에서 최솟값이 먼저 발생하지만 최댓값이 최솟값들보다 하나 더 많아야 하므로 이를 해결하기 위해 불가피하게 '최솟값이 아닌 극솟값'을 생각해야 합니다. 즉 $(a_3, f(a_3))$와 $(c_1, f(c_1))$ 부분에서 문제가 발생합니다.

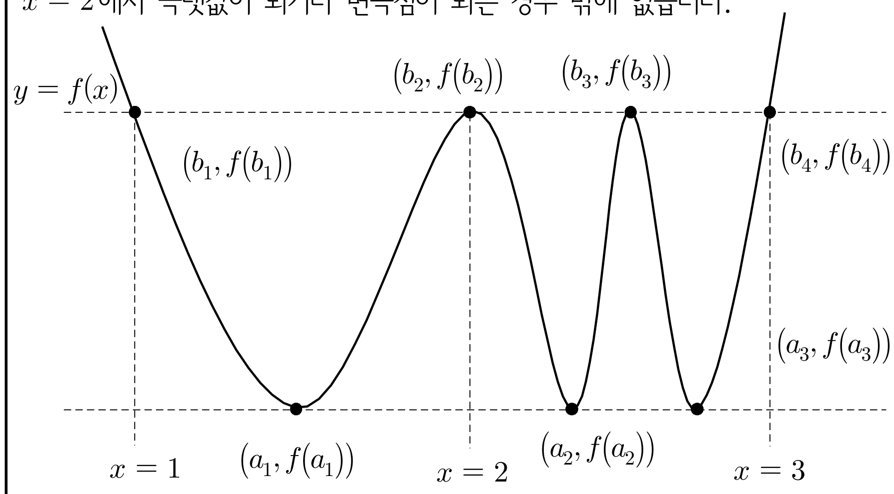
그러면

$(b_3, f(b_3))$ $(b_4, f(b_4))$ $(b_5, f(b_5))$
'최솟값 → 최댓값 → 최솟값 → 최댓값 → 최소 아닌 극솟값 → 최댓값'
$(a_2, f(a_2))$ $(a_3, f(a_3))$ $(c_1, f(c_1))$

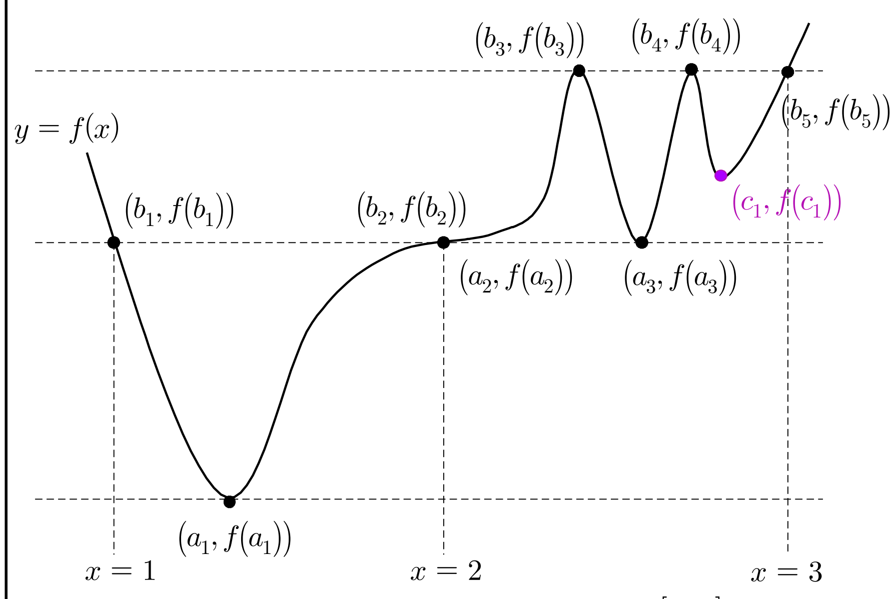
이거나

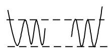
$(b_3, f(b_3))$ $(b_4, f(b_4))$ $(b_5, f(b_5))$
'최솟값 → 최댓값 → 최소 아닌 극솟값 → 최댓값 → 최솟값 → 최댓값'
$(a_2, f(a_2))$ $(c_1, f(c_1))$ $(a_3, f(a_3))$

순으로 발생하면 됩니다. 하지만 어느 경우든지 상관없이 $f'(k)=0$이 되는 서로 다른 k의 개수인 m의 최소성에는 영향을 미치지 않습니다!
이제 계산과 사고의 편의를 위해 약간의 조작을 가미해보도록 하겠습니다. 아까 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 $[2, 3]$ 으로 넘어갈 때 경계 $x=1$에서는 극댓값이 아닌 최댓값으로서 $f'(1) \neq 0$이어야 한다는 사실에는 변함이 없으나, 만약 $f'(2)=0$이면 어떻게 될지 생각해봅시다. 그러면 전체적으로 $x=2$에서 극댓값이 되거나 변곡점이 되는 경우 밖에 없습니다.



이렇게 $x=2$에서 극댓값이 되도록 연결하면 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 $f'(k)=0$인 서로 다른 k는 총 5개로 앞서 다룬 상황에서와 동일하게 나옵니다. 최솟값이 아니면서 극솟값인 지점도 고려하지 않아도 되구요.



하지만 $x=2$에서 변곡점이 되도록 연결하면 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서만 해도 $f'(k)=0$인 서로 다른 k는 총 6개나 발생하게 됩니다. 그러니 이런 경우는 배제하고, 가급적 구간 경계 $x=2, 3, \cdots, 9, 10$에서 극댓값이자 최댓값으로 연결한 $sol.1$)에서의 개형을 생각하면 간단하게 극값들을 셀 수 있습니다.
고로, m이 최소가 되는 $f(x)$의 개형 중의 하나로 $x=1, 11$에서는 최댓값이지만 극댓값은 아니고, $x=2, 3, \cdots, 9, 10$에서는 극댓값이자 최댓값인  모양의 그래프에서는, $f(x)$가 극솟값이자 동시에 최솟값인 지점 55군데와, 그 보다 하나 작게끔 극댓값인 지점 54군데를 가지므로 $m=55+54=109$가 비로소 우리가 애타게 원했던 답이 됩니다!