

안녕하세요. Castellar 지구과학 N제 저자 김효길입니다.

이제 수능이 100일도 채 남지 않았습니다.

장마는 7월 말에 끝난 줄 알았더니, 갑자기 8월 중순에 굵은 빗줄기를 쏟아내네요.

지구과학1 문제를 풀다 보면 이런 문장을 종종 마주칠 수 있습니다.

행성의 질량이 클수록 중심별의 시선 속도 변화가 (커진다 / 작아진다).

행성의 질량이 클수록 중심별의 스펙트럼 최대 편이량이 (커진다 / 작아진다).

특별한 조건이 없다면, 정답은 '커진다' 입니다.

이걸 모르는 수험생은 아마도 거의 없을 겁니다.

기출이나 EBS에서 직접 다루었던 내용이다보니 이제는 아예 외워버릴 정도인데요.

하지만 '왜 커지나요?'라고 물어보는 수험생도 굉장히 많고, 정확히 설명할 수 있는 수험생 또한 잘 없습니다.

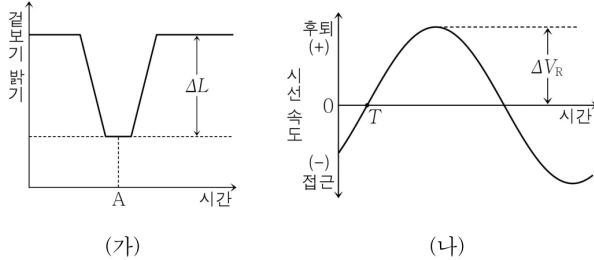
그래서 제가 좀 자세히 설명드리고자 합니다.

설명하기에 앞서, 간단한 예제를 하나 풀어봅시다.

Castellar 지구과학1 N제 2020에 수록된 문항입니다.

당연히 제가 직접 출제했구요. 저작권은 저에게 있습니다.

1. 그림 (가)는 어느 외계 행성에 의한 중심별의 겉보기 밝기 변화를, (나)는 이 중심별로부터 얻은 시선 속도 곡선을 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 행성의 공전 궤도면은 관측자의 시선 방향에 나란하다.)

- <보 기>
- ㄱ. 행성의 반지름이 절반이 되면 ΔL은 현재의 0.25배가 된다.
 - ㄴ. 행성의 질량이 클수록 ΔV_R가 커진다.
 - ㄷ. (가)에서 A일 때 (나)에서는 T에 해당한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답은 ③번입니다.

여기서 ㄴ 선지를 봅시다.

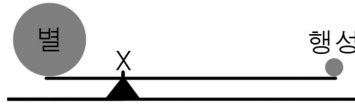
같은 조건에서 행성의 질량이 클수록 공통 질량 중심과 중심별 사이의 거리가 멀어지기 때문에 별빛의 최대 편이량이 커집니다. 즉, 행성의 질량이 클수록 외계 행성 탐사에 유리한 조건을 갖추고 있다고 볼 수 있습니다. 행성의 질량 변화는 공전 주기, 공통 질량 중심과 중심별 사이의 거리, 공전 속도, 별빛의 편이량과 같이 다양한 측면에 영향을 미칩니다.

태양 주위를 공전하는 태양계의 천체들은 ‘케플러 제3법칙’을 만족하며 운동합니다. 케플러 제3법칙은 외계 항성과 외계 행성 사이에서 또한 작용(만족)을 하는데요. 이는 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3$$

P : 공전 주기, G : 만유인력 상수, M : 중심별의 질량, m : 행성의 질량, a : 중심별과 행성 사이의 거리

도플러 효과를 이용한 외계 행성 탐사 방법에서 별과 행성은 공통 질량 중심을 사이에 두고 일직선상에 위치하며 공전합니다. 서로가 공통 질량 중심을 사이에 두고 평형을 이루면서 같은 주기로 공전하기 때문에 별과 행성 사이의 위치 관계를 나타내면 아래의 그림과 같습니다.



별과 행성은 공통 질량 중심의 역할을 하는 받침대(X)를 사이에 두고 평형을 이루면서 막대 위의 양 끝부분에 올라타 받침대(공통 질량 중심)를 중심으로 회전하는 형태입니다.

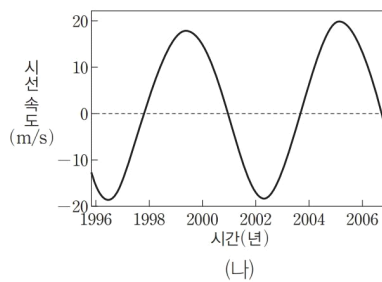
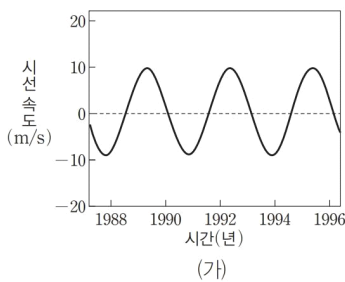
다른 변수들은 일정한 상태로 행성의 질량(m)이 커지면, 중심별과 공통 질량 중심(X) 사이의 거리가 멀어지고 공전 주기(P)가 짧아집니다. 중심별과 공통 질량 중심 사이의 거리가 멀어졌기 때문에 중심별이 공통 질량 중심의 주위를 한 바퀴 공전하는 동안 이동하는 '궤도의 길이'가 더 길어졌습니다. 하지만 공전 주기가 짧아졌으므로 중심별은 더 짧아진 시간 동안 더 길어진 공전 궤도를 따라 공전하게 됩니다. 따라서 중심별의 공전 속도가 더 빨라져 별빛의 최대 편이량이 더 커지게 됩니다.

평가원에서 수능을 어떻게 출제할지 모릅니다.

지금까지는 행성의 질량과 중심별의 시선 속도 변화량 사이의 관계를 단순히 비례라고 외웠지만, 정곡을 찌르는 참신한 3점짜리 문항이 수능날 책상 위에 올라올지는 아무도 모르겠죠.

올해 수능특강을 살펴보던 중 재밌는 문항 하나를 발견했습니다. p.181의 3번 문항입니다.

03 [22026-0265] 그림은 서로 다른 외계 행성계 (가)와 (나)에서 행성에 의한 중심별의 시선 속도 변화를 시간에 따라 나타낸 것이다. (가)와 (나)에서 중심별의 질량은 같다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 행성의 공전 궤도면은 시선 방향과 나란하다.)

- 보기
- ㄱ. 행성의 공전 주기는 (가)가 (나)보다 짧다.
 - ㄴ. 공통 질량 중심에 대한 중심별의 공전 궤도 반지름은 (가)가 (나)보다 크다.
 - ㄷ. 행성의 질량은 (가)가 (나)보다 크다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ선지는 굉장히 쉽습니다.

ㄴ선지를 봅시다. 일단 정답은 X입니다.

공통 질량 중심 주위를 공전하는 중심별 궤도의 반지름을 묻고 있는데,

공전 주기를 P , 궤도 반지름을 a_1 이라고 하면 중심별의 공전 속력(v)은 $v = \frac{2\pi a_1}{P}$ 입니다.

P 는 '(가)<(나)' 이고요, v 또한 '(가)<(나)'입니다.

따라서 식을 정리해보면 a_1 은 '(가)<(나)'가 될 수밖에 없습니다.

ㄷ선지입니다. 일단 정답은 X이고요.

수능특강의 해설지에서는 '(가)가 (나)보다 공통 질량 중심에 대한 중심별의 공전 궤도 반지름이 작고, 시선 속도 변화도 작은 것은 행성의 질량이 (가)가 (나)보다 작기 때문이다.'라고 합니다.

틀린 말은 아니겠쥬. 근데 뭔가 두루뭉술합니다. 그럴싸하기는 한데, 제 기준에서는 뭔가 더 파헤쳐보고 싶었어요.

(가)와 (나)에서 중심별의 질량 M 이 같다고 했으므로 $P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3$ 이라는 식에서 P 에 영향을 줄 수 있는 변수는 a 와 m 이죠. a 는 중심별과 행성 사이의 거리입니다. 그런데 일단 편의상 m 도 동일하다고 둡시다.

혹시 아실지는 모르겠지만 중심별의 질량(M), 공통 질량 중심, 행성의 질량(m) 사이에는 마치 지렛대의 원리처럼 $M:m = a_2:a_1$ 이 성립합니다.

여기서 a_1 은 중심별과 공통 질량 중심 사이의 거리, a_2 는 행성과 공통 질량 중심 사이의 거리입니다. 그리고 a 가 중심별과 행성 사이의 거리이므로 $a = (a_1 + a_2)$ 입니다.

(가)와 (나)에서 M 과 m 이 모두 각각 동일하고, 아까 ㄴ선지에서 a_1 에 해당하는 값은 '(가)<(나)'임이 확인되었으니 당연히 a_2 에 해당하는 값도 '(가)<(나)'입니다.

이에 따라 a 에 해당하는 값도 '(가)<(나)'가 됩니다.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3 \text{ 이므로 양변에 로그를 취하면 } P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G(M+m)}} \times a \sqrt{a} \text{ 입니다.}$$

$$\text{이를 } v = \frac{2\pi a_1}{P} \text{ 에 대입하면 } v = \frac{2\pi a_1}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{G(M+m)}} \times a \sqrt{a}} \text{ 이 됩니다.}$$

$$a = a_1 + a_2 \text{ 이고, } a_1 = \frac{m}{M} a_2 \text{ 이고, } a_2 = \frac{M}{m} a_1 \text{ 이므로, } a = \left(1 + \frac{M}{m}\right) a_1 \text{ 이 되고,}$$

$$\text{따라서 } v = \frac{2\pi a_1}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{G(M+m)}} \times \left(1 + \frac{M}{m}\right) a_1 \times \sqrt{\left(1 + \frac{M}{m}\right) a_1}} \text{ 이 됩니다.}$$

$$\text{이를 정리하면 } v = \frac{\sqrt{G(M+m)}}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{M}{m}\right) a_1}} = \frac{\sqrt{G(M+m)}}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{\frac{(M+m)}{m} a_1}} \text{ 이고,}$$

$$v = \frac{\sqrt{G}}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{\frac{a_1}{m}}} \text{ 가 됩니다.}$$

일단 a_1 은 '(가)<(나)'입니다. 바로 ㄴ선지의 내용이었죠.

그러면 v 는 아, 예상과는 달리 '(가)>(나)'가 아니라 '(가)<(나)'입니다.

ㄴ선지에서 이미 파악한 내용이죠.

뭔가 이상합니다.

아까 '일단 편의상 m 도 동일하다고 둡시다.'라고 했는데, 이제 변화를 좀 줘야겠습니다.

a 가 '(가)<(나)'인데 v 도 '(가)<(나)'가 되려면, m 이 '(가)<(나)'가 되어야 합니다.

따라서 행성의 질량(m)은 (가)가 (나)보다 작습니다.

끝.