

2023학년도 KUME(쿠메) 모의고사 1회

시행 : 2022년 8월 28일 (일) 오후 2시 0분 ~ 오후 3시 40분

집 필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 22

곽예원 김기훈 김준규 김혜인 박혜강 오익재 이권열 이성준 정예진 정진우 주희서 홍성준 양가현
김동건 김민재 이승수 이윤재 홍준석 현명진 김민석 최제현 황재민

손해설 : 김민재 이성준 이승수

검 토 : 김민재 이성준 이승수 김민석 최제현 황재민

본 모의평가에 대한 저작권은 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메)에게 있으며
저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물 작성 등으로 이용하는
일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있습니다.
KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 'KUME' 인스타그램 또는 rlaalswo2491@gmail.com으로 문의바랍니다.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log_2 3 + \log_4 \frac{8}{9}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ 에 대하여 $\int_2^4 f(x) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

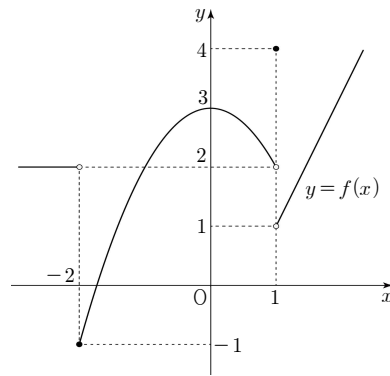
3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = 20, \quad a_7 - a_5 = 6$$

일 때, a_{11} 의 값은? [3점]

- ① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 모든 항이 정수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 -2 이고

$$50 < \sum_{n=1}^7 a_n < 100$$

을 만족시킬 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 16 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

6. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 9$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서
최솟값을 갖는다. 함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의
접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $2\sin^2\theta - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -1$ 일 때,
 $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = (x^2 + 3)f(x)$$

이다. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 4}{x^2 - 1} = 5$ 일 때, $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. $0 < a < b$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 직선 $y = a$ 가 두 곡선 $y = 3 \times 2^x, y = 2^x$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = b$ 가 두 곡선 $y = 3 \times 2^x, y = 2^x$ 과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1 , 삼각형 OCD의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_2 = 3S_1$ 이다. 직선 BD의 기울기가 $(\log_3 2)^2$ 일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 실수 a 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & (x < a) \\ 5x^2 + 3x - 20 & (x \geq a) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 12 & (x < a) \\ 2 & (x \geq a) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x) + g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1}) = 2n^2 + 4n + 3$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^6 a_{3k-2}$ 의 값은? [4점]

- ① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

12. 실수 t 에 대하여 $x \leq t$ 에서 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $g(0) = \frac{45}{16}$

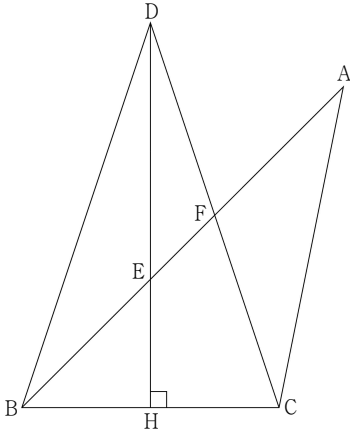
ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(t) - g(t)$ 의 극댓값은 $\frac{3}{16}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 그림과 같이 $\overline{AC} = \sqrt{13}$, $\cos(\angle BAC) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 인 삼각형

ABC 와 $\overline{BD} = 2\sqrt{5}$ 인 삼각형 BDC 가 있다. 점 D 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 점 H 는 선분 BC 의 중점이다. 선분 AB 와 DH 의 교점을 E , 선분 AB 와 DC 의 교점을 F 라 하자. $\overline{AF} = 2$ 일 때, 선분 EH 의 길이는? [4점]



- ① $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ② $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{13\sqrt{2}}{12}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

14. 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & (0 \leq x < 2) \\ -x + 6 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이고, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 4$ 에서 $f(x) = g(x)$ 이다.

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$\int_x^{x+4} \left| g(t) - \frac{1}{2}t \right| dt = \int_0^4 \left| g(t) - \frac{1}{2}t \right| dt$$

$g(5) = 0$ 일 때, $\int_0^8 g(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_4 = 1$, $a_8 = \frac{1}{3}$ 이고 모든

자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n a_{n+1} & (a_n < a_{n+1}) \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} & (a_n \geq a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^5 a_n > 5$ 일 때, $\sum_{n=1}^{30} (a_n)^2$ 의 값은? [4점]

- ① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

단답형

16. $3\sqrt{3} \times 9^{-\frac{1}{4}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ 이고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \left| x + \frac{1}{2} \right| + \frac{7}{4} & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 + ax + b & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이다.

$f\left(\frac{9}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 부등식 $\log_2(x^2 - x - 2) \leq \log_2(6x + 6)$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

20. 양수 a 에 대하여 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^3 - (a+2)t^2 + 2at$$

이다. 시간 t 에서의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 출발 후 점 P는 원점을 한 번 지난다.
- (나) 시간 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는 8이다.

점 P의 속도가 최소일 때, 점 P의 위치는 k 이다. $9k$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 k 에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3k\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = (k+1)\sin \frac{\pi x}{k}$ 의 그래프 위에 점 $A\left(\frac{5k}{2}, k+1\right)$ 이 있다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-k-1$ 이 만나는 점을 B라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{k+1}{2}$ 가 만나는 점 중 x 좌표의 값이 가장 작은 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 200 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 k 의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 이차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ g(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|h(x)| + |h(-x)|}{x} \geq 6$$

(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다.

(다) 0이 아닌 실수 t 에 대하여

$$\left\{ t \mid \left| \frac{h(t) - h(0)}{t} \right| \geq 3 \right\} = \{ t \mid |t| \geq 6 \} \text{이다.}$$

$h'(-6) + h'(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{3^{n+1}} + \frac{3}{4^n}}{\frac{2}{3^n} - \frac{3}{5^n}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{25}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 매개변수 t ($t > -1$)로 나타내어진 곡선

$$x = 2\ln(t+1) + 3, \quad y = \sin t$$

에서 $t=0$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2

수학 영역(미적분)

25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

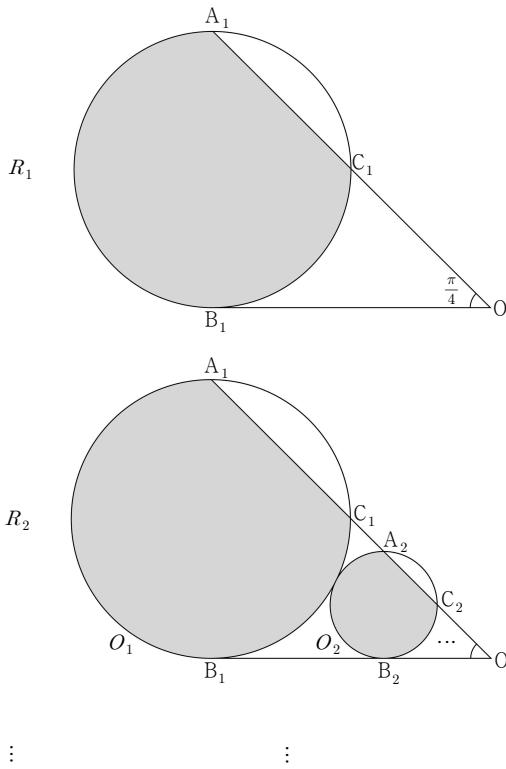
26. 함수 $f(x) = x^3 e^{x^4}$ 에 대하여 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(\sqrt{x}) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $\frac{3e}{2}$ ④ $2e$ ⑤ $\frac{5e}{2}$

27. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1 을 지름으로 하는 원 O_1 이 있다. 원 O_1 위의 점 C_1 에 대하여 점 B_1 에서 그은 접선과 직선 A_1C_1 이 만나는 점을 점 O 라 하자. 두 직선 A_1C_1 과 OB_1 이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이다. 선분 A_1C_1 과 점 B_1 을 지나는 호 A_1C_1 로 둘러싸인 부분인 \odot 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 직선 OB_1 과 점 B_2 에서 접하는 원 O_2 가 원 O_1 과 접하고, 원 O_2 가 직선 OA_1 과 만나는 두 점 중 점 A_1 에 더 가까운 점을 A_2 라 할 때 선분 A_2B_2 가 원 O_2 의 지름이 되도록 선분 OB_1 위의 점 B_2 를 잡는다. 선분 A_2C_2 와 점 B_2 을 지나는 호 A_2C_2 로 둘러싸인 부분인 \odot 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

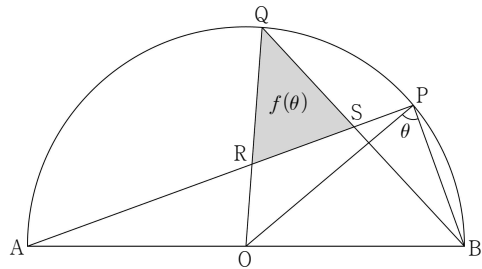
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{3}{10}(3\pi+2)(\sqrt{5}+1)$ ② $\frac{3}{5}(3\pi+2)(\sqrt{5}+1)$
- ③ $\frac{1}{10}(3\pi+5)(3\sqrt{5}+4)$ ④ $\frac{1}{5}(3\pi+2)(3\sqrt{5}+4)$
- ⑤ $\frac{1}{10}(3\pi+2)(3\sqrt{5}+5)$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P 가 있다. 선분 AB 의 중점 O 에 대하여 부채꼴 OAP 에서 호 AP 의 삼등분점 중 점 P 에 가까운 점을 Q 라 하자. 선분 AP 와 선분 OQ 가 만나는 점을 R , 선분 AP 와 선분 BQ 가 만나는 점을 S 라 하자. $\angle OPB = \theta$ 일 때, 삼각형 QRS 의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta^5}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{16}{243}$ ③ $\frac{20}{243}$ ④ $\frac{8}{81}$ ⑤ $\frac{28}{243}$

단답형

29. 상수 a 와 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$x^2 + ax + 9 = te^{-x}$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 불연속인 양수 α 의 값이 존재한다.

(나) 함수 $f(t)g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(e) < 0$ 일 때, $g(6e) = ke^2$ 이다. 실수 k 의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$) [4점]

30. 양수 t 에 대하여 직선 $y = tx + k$ 가 함수 $f(x) = 2\ln x - \frac{4}{x}$ 의

그래프에 접할 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $g''(t)$ 를 갖고, $g''(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\int_2^6 g(t)g''(t)dt = a + b\ln 2$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 유리수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이

쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$ 일 때, 양수 a의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

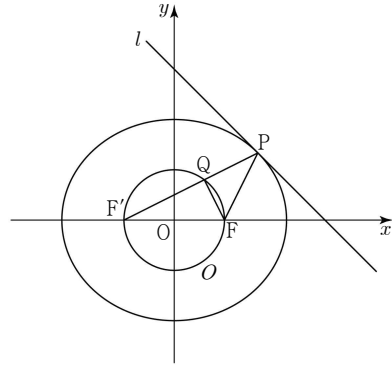
24. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 $|\vec{a}|=6, 7\vec{a}-2\vec{b}=4(\vec{a}-\vec{b})$ 를 만족시킬 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

25. 좌표공간의 세 점 $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표는 $D(a, b, c)$ 이다. $a+2b+3c$ 의 값은? [3점]

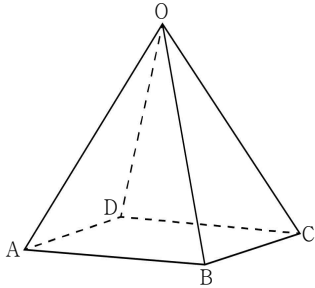
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

26. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 원점을 중심으로 하고 점 F 를 지나는 원 O 가 있다. 기울기가 -1 인 직선 l 과 타원이 제1사분면에서 접하는 점을 P 라 하고, 선분 $F'P$ 가 원과 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 PQF 의 둘레의 길이는? [3점]



- ① $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{17\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{19\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하는 정사각뿔 O-ABCD가 있다. 두 평면 OAB, OBC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 이다. 삼각형 OAD의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

28. 좌표평면에서 점 A(3, 4)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{OP}| = 2, |\overrightarrow{AQ}| = 3$
 (나) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \leq 0$ 이고, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AQ} \geq 5\sqrt{5}$ 이다.
 (다) $|\overrightarrow{OX}| \leq 2$ 인 점 X에 대하여
 $(\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{PQ})^2 = 0$ 이다.

$|\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{PQ}|^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M+m의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $131 + 10\sqrt{5}$ ② $132 + 10\sqrt{5}$ ③ $133 + 10\sqrt{5}$
 ④ $134 + 10\sqrt{5}$ ⑤ $135 + 10\sqrt{5}$

단답형

29. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선 l 이 포물선과 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 선분 AF의 중점과 선분 AF를 1 : 3으로 외분하는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 x 축에 수직인 직선을 준선으로 하고 점 A를 꼭짓점으로 하는 포물선 C 가 점 B를 지난다. 포물선 C 의 초점을 F'이라 하고, 두 곡선 $C, y^2 = 8x$ 가 만나는 점을 D라 하자. 사각형 FAF'D의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{5}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

30. 좌표공간의 네 점 A, B, C, D를 지나는 구 S 가 있다. 두 삼각형 ABC와 BCD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 두 평면 ABC와 BCD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{AH} \geq \sqrt{3}$ 일 때, 구 S 와 평면 ABD가 만나서 생기는 원의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{21}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.