곡선이론 2

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 단위속력곡선의 Frenet-Serret Apparatus

<곡선이론 1>에서 속력이 $|\alpha'(s)| = 1$인 정칙곡선을 단위속력곡선으로 정의했고, 단위속력곡선의 Frenet-Serret Apparatus를 구해보았다. 단위속력곡선 $\alpha(s)$에 대하여 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$, $\kappa(s)$, 그리고 $\tau(s)$는 각각 다음과 같이 정의된다. (단, $\langle u, v \rangle$는 두 벡터 u와 v의 내적이다.)

① $T(s) = \alpha'(s)$

② $N(s) = \dfrac{T'(s)}{|T'(s)|}$

③ $B(s) = T(s) \times N(s)$

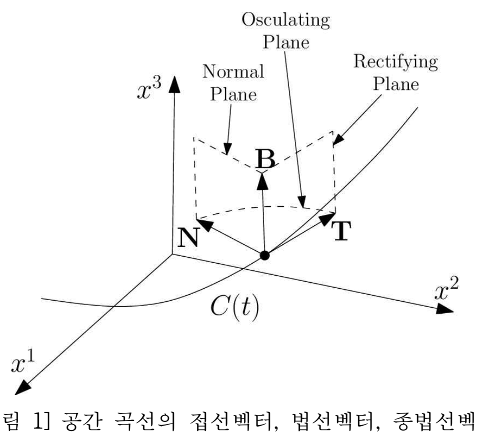
④ $\kappa(s) = |T'(s)|$

⑤ $\tau(s) = |B'(s)| = -\langle B'(s), N(s) \rangle$

또한 $T(s), N(s), B(s)$에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \end{cases}$$

아래 **[그림 1]**에서 접선벡터 $T(s)$와 법선벡터 $N(s)$, 그리고 종법선벡터 $B(s)$를 확인할 수 있으며, $N(s)$와 $T(s)$가 이루는 평면을 접촉평면(Osculating Plane), $B(s)$와 $N(s)$가 이루는 평면을 법평면(Normal Plane), $T(s)$와 $B(s)$가 이루는 평면을 전직평면(Rectifying Plane)이라고 한다.



[그림 1] 공간 곡선의 접선벡터, 법선벡터, 종법선벡터

Ⅱ. 공간 곡선의 재매개화의 결과

<곡선이론 1>에서는 속력의 크기가 1이 아닌 공간 곡선 $\beta(t)$를 단위속력곡선 $\alpha(s)$로 만들기 위해 곡선을 호의 길이로 재매개화했다. $|\beta'(t)|$가 미분가능한 경우, s는 t에 관한 함수로써 다음과 같이 정의된다.

$$s = \int_0^t |\beta'(t)|dt$$

<곡선이론 1>에서 예시로 든 xy평면에 놓인 반지름 r의 원을 다시 생각해보자. 이때

$$\beta(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$$

이고

$$\beta'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0), \quad |\beta'(t)| = r$$

이며, 변수변환을 통해 얻는 단위속력곡선 $\alpha(s)$는 다음과 같다.

$$\alpha(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right)$$

그렇다면 이렇게 구한 $\alpha(s)$의 Frenet-Serret Apparatus는 $\beta(t)$의 그것과 동일할까? 결론부터 말하자면, 비록 함수의 형태는 다르더라도 공간상에서 이들 벡터가 그리는 자취는 완벽하게 일치한다. $\alpha(s)$와 $\beta(t)$의 접선벡터가 동일하면 법선벡터, 종법선벡터, 곡률, 그리고 비틀림(열률)도 동일하므로 접선벡터가 동일함을 보여도 충분하다.

재매개화를 하기 전의 곡선 $\beta(t)$에 대하여 접선벡터는 정의에 의해

$$T(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

이고, 재매개화하여 얻어진 곡선 $\alpha(s)$에 대하여 접선벡터는

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}, 0\right)$$

이다. 이때 $s = rt$이므로 이를 대입하면

$$T(rt) = (-\sin t, \cos t, 0) \ \cdots \ [1]$$

이고, 이를 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \ \cdots \ [2]$$

이는 앞서 $\beta(t)$를 이용하여 얻은 접선벡터와 일치한다. 한편 식 [2]의 T는 벡터함수 $f(t) = rt$와 식 [1]의 접선벡터 T_0에 대하여 합성함수 $T_0 \circ f$를 나타낸 것으로, s의 자리에 t를 대입한 것이 아니라 s를 t에 관한 함수로 바꾼 후 이를 s에 대입하여 만들어진 합성함수를 다시 T로 표현한 것이다. 따라서 식 [1]과 [2]의 접선벡터 T는 동일한 함수가 아니고, 단지 접선벡터를 나타내는 벡터함수라는 의미로 동일한 기호 T를 사용하고 있을 뿐이라는 것에 유념해야 한다.

Ⅲ. 단위속력곡선의 Frenet-Serret Formula

앞서 살펴본 Frenet-Serret Apparatus는 말 그대로 도구일 뿐이며, 최종적인 목적은 Frenet-Serret Formula에 의해 구해지는 T', N', B'을 Frenet-Serret Apparatus를 이용하여 계산하는 것이다. 즉, T, N, B, κ, τ를 이용하여 T', N', B'을 표현하는 것이 궁극적인 목적이다. 하지만 처음부터 일반적인 정칙곡선에 대하여 Frenet-Serret Formula를 유도하는 것은 흐름상 쉽지 않으므로, 우선 단위속력곡선에 대하여 Frenet-Serret Formula를 유도한 후 일반적인 정칙곡선으로 확장할 것이다.

세 개의 Frenet-Serret Formula와 각각의 증명은 다음과 같다.

(1) $T'(s) = \kappa(s)N(s)$

pf) $N(s)$와 $\kappa(s)$의 정의를 생각해보면 증명은 아주 간단하다. 각각의 정의에 의해

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad \kappa(s) = |T'(s)|$$

이므로 $\kappa(s)$를 대입하면 $T'(s) = \kappa(s)N(s)$를 얻는다. ■

(2) $B'(s) = -\tau(s)N(s)$

pf) <공간곡선 1>에서 임의의 정칙곡선에 대하여 $B'(s)$와 $N(s)$가 평행하다는 **보조정리 2**를 제시하고 증명한 바 있다. 따라서 평행의 정의에 의해 다음을 만족시키는 스칼라(실수) a가 존재한다.

$$B'(s) = aN(s)$$

위 식의 양변에 $N(s)$를 내적하고 $|N(s)| = 1$임을 이용하면

$$\langle B'(s), N(s) \rangle = a\langle N(s), N(s) \rangle = a$$

이다. 한편 비틀림 $\tau(s)$의 정의는

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle$$

이므로 위 식에서 $a = -\tau(s)$를 얻고 $B'(s) = -\tau(s)N(s)$이다. ■

한편 두 공간벡터 $\vec{u}, \vec{v}$와 실수 c, t에 관한 함수 f(스칼라)에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다. ($\cdot$ 은 내적, $\times$는 외적이고, 증명은 생략한다.)

(1) $(\vec{u} \pm \vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$

(2) $(c\vec{u})' = c\vec{u}'$

(3) $(f(t)\vec{u})' = f'(t)\vec{u} + f(t)\vec{u}'$

(4) $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

(5) $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'$

세 번째 Frenet-Serret Formula를 증명할 때 (5)번 성질이 사용된다.

(3) $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$

pf) I 에서 언급한 $T(s), N(s), B(s)$의 관계에서

$$N(s) = B(s) \times T(s)$$

이다. 양변을 s에 대해서 미분하면 성질 (5)에 의해

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s)$$

이고, 앞서 구한 $B'(s) = -\tau(s)N(s)$와 $T'(s) = \kappa(s)N(s)$를 대입하면

$$N'(s) = -\tau(s)N(s) \times T(s) + B(s) \times \kappa(s)N(s) \quad \cdots \quad [3]$$

이다. $T(s), N(s), B(s)$의 관계에 의해

$$N(s) \times T(s) = -B(s), \quad B(s) \times N(s) = -T(s)$$

이므로 이를 식 $[3]$에 대입하면 $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$를 얻는다. ■

행렬을 이용하여 T', N', B'을 보기 쉽게 나타내면 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Ⅳ. 정칙곡선의 Frenet-Serret Formula

정칙곡선의 경우 속력이 항상 1인 것이 보장되지 않으므로 단위속력곡선으로 재매개화해야 한다. 원래의 곡선을 $r(t)$, 재매개화된 단위속력곡선을 $\alpha(s)$라 하면, 다음이 성립한다.

$$s = \int_0^t |\beta'(t)|dt$$

양변을 t에 대하여 미분하면 미적분학 기본 정리에 의해 다음을 얻는다.

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)| = v(t)$$

여기서 $v(t)$는 곡선 $r(t)$를 따라 움직이는 점의 속력을 나타낸다. 일반적인 정칙곡선에 대한 세 개의 Frenet-Serret Formula와 각각의 증명은 다음과 같다.

(1) $T'(t) = \kappa(t)v(t)N(t)$

pf) 연쇄 법칙(Chain Rule)에 의해

$$T'(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \frac{dT(s)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{T'(t)}{v(t)}$$

이므로

$$T'(t) = v(t)T'(s) = \kappa(s)v(t)N(s)$$

이고, 최종적으로 $T'(t) = \kappa(t)v(t)N(t)$를 얻는다. (이는 s 대신 t를 대입한 것이 아니다. Ⅱ의 마지막에서 설명한 것과 같이 s의 자리에 $\int_0^t |\beta'(t)|dt$를 대입하고, 그렇게 만들어진 합성함수를 다시 t에 관한 하나의 함수로 취급하여 각각 $\kappa(t)$와 $N(t)$로 이름붙인 것이다. 이들 함수는 결론적으로 동일한 궤적을 나타내므로 매개변수 t에 대하여 곡률과 법선벡터를 나타내고, 그러한 의미에서 κ와 N의 기호를 사용할 수 있다.) ■

(2) $B'(t) = -\tau(t)v(t)N(t)$

pf) 연쇄 법칙(Chain Rule)에 의해

$$B'(s) = \frac{dB(s)}{ds} = \frac{dB(s)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{B'(t)}{v(t)}$$

이므로

$$B'(t) = v(t)B'(s) = -\tau(s)v(t)N(s)$$

이고, 최종적으로 $B'(t) = -\tau(t)v(t)N(t)$를 얻는다. ((1)과 동일하게 s에 t에 관한 식을 대입하여 새로운 비틀림 함수와 법선벡터 함수를 정의하였다.) ■

(3) $N'(t) = -\kappa(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t)$

pf) Ⅰ에서 언급한 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$의 관계에서

$$N(s) = B(s) \times T(s)$$

이다. 양변을 s에 대해서 미분하면 Ⅲ의 성질 (5)에 의해

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s)$$

$$= \frac{dB(s)}{ds} \times T(s) + B(s) \times \frac{dT(s)}{ds}$$

$$= \frac{dB(s)}{dt}\frac{dt}{ds} \times T(s) + B(s) \times \frac{dT(s)}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{B'(t) \times T(s) + B(s) \times T'(t)}{v(t)}$$

이고, s에 t에 관한 식을 대입하면

$$N'(s) = \frac{B'(t) \times T(t) + B(t) \times T'(t)}{v(t)} = \frac{N'(t)}{v(t)}$$

이다. 따라서

$$N'(t) = v(t)N'(s) = -\kappa(s)v(t)T(s) + \tau(s)v(t)B(s)$$

$$= -\kappa(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t)$$

이다. ■

행렬을 이용하여 T', N', B'을 보기 쉽게 나타내면 다음과 같이 적을 수 있다. (v는 해당 곡선을 따라 움직이는 점의 속력이다.)

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa v & 0 \\ -\kappa v & 0 & \tau v \\ 0 & -\tau v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Frenet-Serret Formula를 통해 얻은 T', N', B'을 이용하여 공간에 있는 곡선의 거동을 쉽게 분석하고 설명할 수 있으며, 세 단위벡터 T, N, B를 축으로 가지는 TNB Frame에서도 마찬가지로 공간에서의 운동을 쉽게 분석할 수 있다.

또한, 가장 결정적으로 어떤 정칙곡선의 곡률(κ), 비틀림(τ)가 주어졌을 때 그 곡선은 유일하게 결정되며, 곡선의 형태는 κ와 τ라는 두 개의 변수만 가지고 충분히 기술할 수 있는 만큼 Frenet-Serret Formula는 곡선이론에서 매우 중요한 내용이다.

Ⅴ. 곡선의 기본정리

κ와 τ만으로 공간상의 곡선을 결정할 수 있다는 내용은 다음 **곡선의 기본정리**로 잘 알려져 있다.

Fundamental Theorem of Space Curves. (곡선의 기본정리)
$\kappa(s)$와 $\tau(s)$가 $a \le s \le b$에서 정의된 연속함수일 때, 공간상의 위치 차이를 제외하면 κ를 곡률로 가지고, τ를 비틀림으로 가지며, s를 호의 길이로 하는 곡선 C가 유일하게 존재한다.

호의 길이로 매개된 곡률 κ와 비틀림 τ는 곡선을 유일하게 결정하고, 곡선을 결정하는 다음 방정식을 내재적 방정식(Intrinsic Equation)이라고 한다.

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s)$$

예를 들어, $\kappa = \tau = 0$인 곡선은 직선이며, κ가 항상 상수임과 동시에 τ가 항상 0인 곡선은 반지름의 길이가 $\frac{1}{|\kappa|}$인 원이고, κ와 τ가 각각 0이 아닌 상수로 일정한 곡선은 나선곡선(Helix)이다.

곡선의 기본정리의 증명은 다음과 같다.

두 곡선 $C_1 : x_1(s)$와 $C_2 : x_2(s)$의 곡률을 각각 κ_1과 κ_2라 하고, 비틀림을 각각 τ_1과 τ_2라 하자. 만약 모든 s에 대하여 $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$, $\tau_1(s) = \tau_2(s)$가 성립하면 두 곡선은 동일함을 보일 것이다. 여기에서 동일하다는 것은, 곡선 C_1을 적당히 평행이동시키고 회전시켜서 곡선 C_2와 일치하도록 만들 수 있다는 것이다. (곡선 C_1을 늘리거나 휘게 하지 않고 조심스럽게 이동시키는 것을 상상해보라 - 만약 곡선 C_1을 이동시켜 정확히 곡선 C_2의 자리에 오게 할 수 있다면 두 곡선은 서로 구분할 수 없다.)

이제 곡선 C_1을 적당히 이동시켜 $s = s_0$에서 두 곡선이 서로 만나게 한 다음, 이를 회전시켜 이 점에서의 접선벡터와 법선벡터, 그리고 종법선벡터 또한 일치하도록 조작했다고

하자. 이때 앞서 설명한 벡터 내적의 곱미분 성질에 의해 다음이 성립한다. (단, 모든 벡터의 첨자는 그에 대응되는 곡선 C_1과 C_2의 첨자를 따른다.)

$$\frac{d}{ds}\langle T_1, T_2\rangle = \langle T_1', T_2\rangle + \langle T_1, T_2'\rangle = \kappa_1\langle N_1, T_2\rangle + \kappa_2\langle T_1, N_2\rangle$$

$$= \kappa[\langle T_1, N_2\rangle + \langle T_2, N_1\rangle]$$

$$\frac{d}{ds}\langle N_1, N_2\rangle = \langle N_1', N_2\rangle + \langle N_1, N_2'\rangle = \langle -\kappa_1 T_1 + \tau_1 B_1, N_2\rangle + \langle N_1, -\kappa_2 T_2 + \tau_2 B_2\rangle$$

$$= -\kappa[\langle T_1, N_2\rangle + \langle T_2, N_1\rangle] + \tau[\langle B_1, N_2\rangle + \langle B_2, N_1\rangle]$$

$$\frac{d}{ds}\langle B_1, B_2\rangle = \langle B_1', B_2\rangle + \langle B_1, B_2'\rangle = -\tau_1\langle N_1, B_2\rangle - \tau_2\langle B_1, N_2\rangle$$

$$= -\tau[\langle B_1, N_2\rangle + \langle B_2, N_1\rangle]$$

이들을 모두 더하면 0이므로

$$\frac{d}{ds}[\langle T_1, T_2\rangle + \langle N_1, N_2\rangle + \langle B_1, B_2\rangle] = 0$$

에서 상수 k가 존재하여

$$\langle T_1, T_2\rangle + \langle N_1, N_2\rangle + \langle B_1, B_2\rangle = k$$

이다. 한편 $s = s_0$일 때 $T_1 = T_2$, $N_1 = N_2$, $B_1 = B_2$이고 이들은 모두 단위벡터이므로 $k = 3$이고, (T_1, T_2), (N_1, N_2), (B_1, B_2)가 이루는 예각의 크기를 각각 θ_T, θ_N, θ_B라 하면

$$\langle T_1, T_2\rangle = |T_1||T_2|\cos\theta_T = \cos\theta_T \le 1$$
$$\langle N_1, N_2\rangle = |N_1||N_2|\cos\theta_N = \cos\theta_N \le 1$$
$$\langle B_1, B_2\rangle = |B_1||B_2|\cos\theta_B = \cos\theta_B \le 1$$

이다. 따라서 등호가 성립해야 하고 $\theta_T = \theta_N = \theta_B = 0$이 되어 $T_1 = T_2$이다. 이제 양변을 적분하면 상수 c에 대하여 $x_1(s) = x_2(s) + c$이고, $s = s_0$을 대입하면 $c = 0$이므로 적당히 이동시키고 회전시킨 곡선 C_1은 곡선 C_2와 완벽하게 일치하게 된다. ■