고계 미분방정식

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 미분연산자의 도입

앞서 1계 미분방정식에서 1계 도함수만이 관여하는 미분방정식에 대해 살펴보았다. 하지만 2계 도함수, 3계 도함수 등의 고계 도함수가 관여하는 고계 미분방정식도 존재하고, 이들을 표기할 때 $y^{(n)}$이나 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ 등의 기호는 불편할 때가 있다. 따라서 미분의 연산을 취해주는 연산자 D를 정의하고, $\dfrac{dy}{dx}$를 y와 $\dfrac{d}{dx}$의 곱으로 보는 것과 같은 원리로 y의 x에 대한 미분을 Dy로 표기한다. 또한, 이 표기법에 따라 y의 x에 대한 n계 미분을 $D^n y$로 표기한다.

즉, $y''+2y'+y=e^x$라는 미분방정식은 $(D^2+2D+1)y=e^x$로 간단하게 표기할 수 있다. 이는 미분연산자는 선형 연산자이기 때문인데, 미분에 대해 다음 두 성질이 성립하므로 미분 연산은 선형성을 가지는 것이다.

① $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c \cdot f'(x)$ $(c \in \mathbb{R})$

② $\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$

미분연산자는 다른 연산자로도 사용이 가능하다. 미분연산자의 거듭제곱이 잘 정의됨을 이용하면 e^x의 맥클로린 전개식을 이용하여 e^D을

$$e^D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}$$

과 같이 정의할 수 있으며, 실제로 무한 번 미분가능한 함수 f에 대하여

$$e^D f(x) = f(x+1)$$

이 성립하고 이때의 e^D를 Shift Operator라고 한다. 이외에도 맥클로린 전개식을 이용하여 $\sin D$, $\cos D$, $\sinh D$, 2^D 등의 연산을 정의할 수 있다. 그렇다면 $\sqrt[3]{x}$의 맥클로린 급수에 D를 대입하여 정의된 $D^{\frac{1}{3}}$은 무엇인가? 그 연산자에 의한 결과를 "$\dfrac{1}{3}$번 미분하는 것"으로 정의할 수 있을까? 이 경우 상황에 따라 잘 정의되지 않을 수도 있겠지만, 이는 미분 횟수를 자연수에서 정수, 유리수, 그리고 실수까지 확장하는 사고의 기반이 된다. 실

제로 코시의 연속 적분 공식을 이용한 $\frac{1}{2}$번 미분의 정의부터, 수많은 수학자들이 자신만의 '실수 번 미분', 심지어 '복소수 번 미분'을 정의하고 있다. 관심 있는 독자는 Fractional Order Derivative를 검색하여 해석학의 한 갈래인 분수계 미적분학에 대해 찾아보는 것도 나쁘지 않을 것이다.

Ⅱ. 상수계수 동차 선형 미분방정식

음이 아닌 정수 n에 대하여 다음과 같은 일반적인 미분방정식을 생각하자.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = a_0 \frac{d^n x}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}dx}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

$$\left(\frac{d^0 y}{dx^0} = 1,\ a_0 \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R}\right)$$

미분연산자를 사용하여 이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

$f(x)$가 0인 경우 이를 상수계수 동차 선형 미분방정식이라고 하고, 0이 아닌 경우 상수계수 비동차 선형 미분방정식이라고 한다. 도함수의 계수가 상수가 아닌 x 또는 y에 관한 함수일 수도 있지만, 본문에서는 상수계수인 경우만 다룰 것이다. (적절한 치환을 통해 상수계수 미분방정식으로 바꿀 수 있는 경우도 있다.)

특히 y와 곱해진 D의 다항식을 미분방정식의 특성다항식이라고 하며, 이 특성다항식의 값이 0과 같다고 둔 특정방정식의 해는 미분방정식의 해와 직접적인 관련이 있다.

$n=2$인 2계 미분방정식에 대하여, D에 관한 특성방정식

$$a_0 D^2 + a_1 D + a_2 = 0$$

의 근을 살펴보자. 먼저 특성방정식이 서로 다른 두 실근 α와 β를 갖는 경우, 이 미분방정식의 해는 $e^{\alpha x}$와 $e^{\beta x}$를 기저로 갖는다는 것이 알려져 있다. 기저란 특수해의 일종으로, 기저들은 서로 일차 독립이므로 최종적인 해는 두 기저의 선형 결합으로 표현된다. 즉, 이 미분방정식의 해는 실수 C_1, C_2에 대하여 $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$이다.

다음으로 특성방정식이 중근 α를 갖는 경우 이 미분방정식의 기저는 $e^{\alpha x}$와 $xe^{\alpha x}$이고, 최

종적인 해는 실수 C_1, C_2에 대하여 $y = C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x}$이다.

마지막으로, 특정방정식이 서로 다른 두 허근 $\alpha \pm \beta i$를 갖는 경우 이 미분방정식의 기저는 $e^{\alpha x}\cos\beta x$와 $e^{\alpha x}\sin\beta x$이고, 최종적인 해는 실수 C_1, C_2에 대하여
$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$이다.

n이 3 이상인 경우도 마찬가지로 기저들의 선형 결합으로 해를 표현할 수 있으며, 중근이 세 개 이상이 된다면 기저는 $x^2e^{\alpha x}, x^3e^{\alpha x}, \cdots$ 로 처리하면 된다.

예를 들어, 다음의 11계 미분방정식이 주어져있다고 하자.

$$D^2(D-1)^3(D^2+1)(D^2-4D+5)^2y = 0$$

특성방정식의 근은 $0, 0, 1, 1, 1, i, -i, 2+i, 2+i, 2-i, 2-i$이므로 최종적인 해는 이들 11개의 기저의 선형 결합으로 표현될 것이고, 따라서 답은 실수 C_k $(1 \le k \le 11)$에 대하여 다음과 같고, 11개의 초기조건이 주어진다면 해를 유일하게 결정할 수 있다.

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + C_5x^2e^x + C_6\cos x + C_7\sin x + C_8e^{2x}\cos x$$

$$+ C_9xe^{2x}\cos x + C_{10}e^{2x}\sin x + C_{11}xe^{2x}\sin x$$

Ⅲ. 상수계수 비동차 선형 미분방정식

앞서 살펴본 일반적인 상수계수 미분방정식

$$\sum_{k=0}^{n} a_kD^{n-k}y = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = f(x)$$

에서 $f(x) \neq 0$인 경우를 상수계수 비동차 선형 미분방정식이라고 한다. 이 경우 동차 미분방정식의 일반해와 비동차 미분방정식의 해의 선형 결합으로 해를 구하는데, 동차 미분방정식의 일반해 y_c는 $f(x) = 0$으로 놓았을 때의 해이고, 비동차 미분방정식의 특수해 y_p는 $f(x) \neq 0$일 때의 특수한 해이다. 특수한 해라는 것은, 비동차 미분방정식을 만족시키는 해 한 개만 찾으면 된다는 것이다. 따라서 특수해를 구하는 과정에서 모든 적분상수를 0으로 두거나 계산에 유리한 조건을 가정할 수 있지만, 일반적으로 특수해를 구하는 것은 그 자체로도 매우 어렵다.

수학자들은 이 특수해를 구하는 방법을 네 가지 이상 발견하였고, 본문에서는 그중 두 가지를 소개한다. (수학 전공이 아닌 이상 나머지 두 개를 배울 일은 거의 없고, 처음 두 방법만 이용해도 물리학이나 화학에서 등장하는 미분방정식의 대부분을 풀 수 있다.)

우선 비동차 미분방정식의 해가 $y = y_c + y_p$임을 보이자. 이를 다시 처음 미분방정식에 대입하면 좌변은

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)(y_c + y_p)$$

이다. 미분연산자는 선형성을 가지므로 이를 전개하면

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y_c + (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y_p$$

이므로 y_c와 y_p의 정의에 의해 좌변의 값이 $f(x)$와 같음을 얻고 증명이 완료된다.

Ⅳ. Reduction of Order

Reduction of Order(R.O.O. Method, 차수 감소법)는 미분방정식의 차수를 줄이고 치환을 통해 1계 선형 미분방정식으로 바꾸는 방법이다. 다음과 같은 2계 미분방정식이 주어져 있다고 하자.

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

$f(x) = 0$으로 놓은 동차 미분방정식의 일반해를 y_c라 하면 y_c는 두 기저 y_1, y_2의 선형결합 $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$로 표현될 것이다. (C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$) 차수 감소법에서는 이 두 기저 중 한 개만을 선택하여 진행해야하는데, 직접 계산해보기 전에는 두 기저 중 어느 경우가 더 간단한지 알 수 없어 오직 수학적 직관에 의존하여 선택을 해야 한다는 단점이 있다. 특히 미분방정식의 차수가 높아질수록 기저의 수도 늘어나, 기저를 잘못 고르면 계산이 매우 복잡해질 수도 있다. (정확히는 기저를 잘못 고르는 것이 아니다. 계산이 매우 어려울 뿐 풀리는 것은 맞고, 합리적인 선택이 쉽지 않다는 것이다.)

일반성을 잃지 않고 기저 y_1을 선택했다고 하자. 최종적인 목표는 특수해 y_p에 대하여 $y_p = u y_1$이 성립하도록 하는 x에 관한 함수 $u(x)$를 찾는 것이다. 한편 y_p의 양변을 두 번 연속으로 미분하면

$$D y_p = u y_1{}' + u' y_1, \quad D^2 y_p = u y_1{}'' + 2u' y_1{}' + u'' y_1$$

이므로 이를 다시 대입하면

$$f(x) = (a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y_p = u(a_0 y_1{}'' + a_1 y_1{}' + a_2 y_1) + u'(2a_0 y_1{}' + a_1 y_1) + u''(a_0 y_1)$$

이다. 또한 y_1은 동차 미분방정식의 해이므로 $u(a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = 0$이 되어 다음 관계식을 얻는다.

$$u''(a_0 y_1) + u'(2a_0 y_1' + a_1 y_1) = f(x)$$

이제 $w = u'$으로 치환하면

$$w' + \frac{2a_0 y_1' + a_1 y_1}{a_0 y_1} w = \frac{f(x)}{a_0 y_1}$$

이고 이는 w에 관한 1계 선형 미분방정식이므로 쉽게 풀 수 있다. w를 알아낸 후, 이를 다시 적분하여 $u = \int w dx$를 구하면 최종 해 $y = uy_1 + y_c$를 구할 수 있다.

예를 들어, 초기조건이 주어진 다음 미분방정식을 고려하자.

$$(D^2 - 2D + 1)y = 2e^x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2$$

특성방정식의 근은 $1, 1$이므로 동차 미분방정식의 일반해의 두 기저는 e^x와 xe^x이다. 두 기저 중 임의로 e^x를 선택하여 $y_p = ue^x$라 하면, $Dy_p = (u' + u)e^x$이고 $D^2 y_p = (u'' + 2u' + u)e^x$이므로 이를 다시 대입하면

$$(D^2 - 2D + 1)y_p = e^x y'' = 2e^x, \quad u'' = 2$$

의 아주 간단한 미분방정식을 얻는다. 따라서 $u = x^2$, $y_p = ue^x = x^2 e^x$이고 해는 실수 C_1, C_2에 대하여

$$y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^x$$

이다. 마지막으로, 초기조건이 주어져 있으므로 이를 대입하여 C_1과 C_2를 모두 구하면 $C_1 = C_2 = 1$이 되어 최종적인 해는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$y = (1 + x + x^2)e^x$$

Ⅴ. Variation of Parameters

Variation of Parameters(V.O.P. Method, 매개변수 변환법)는 변수를 다양화한 후 적절한 조건을 부여하여 연립방정식을 통해 미분방정식의 특수해를 구하는 방법이다.

차수 감소법에서 동차 미분방정식의 기저 중 한 개를 선택했던 것과 달리, 매개변수 변환법에서는 동차 미분방정식의 기저를 모두 사용한다. 다음과 같은 2계 미분방정식이 주어져 있다고 하자.

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

$f(x) = 0$으로 놓은 동차 미분방정식의 일반해를 y_c라 하고 두 기저를 각각 y_1, y_2라 하면, 특수해 y_p에 대하여 $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$를 만족시키는 x에 관한 함수 $u_1(x), u_2(x)$를 구하면 된다.

한편 한 개의 특수해만 찾는 것이 목적이므로 $Dy_p = u_1 y_1{}' + u_2 y_2{}' + u_1{}' y_1 + u_2{}' y_2$에서
$u_1{}' y_1 + u_2{}' y_2 = 0$으로 놓으면 $D^2 y_p = u_1 y_1{}'' + u_2 y_2{}'' + u_1{}' y_1{}' + u_2{}' y_2{}'$이다.
(조건이 부족하여 u_1과 u_2가 특정되지 않으므로, 강제로 조건을 추가하는 것이다. 특수해 하나만 찾으면 되므로, 조건을 강제로 추가하더라도 그러한 u_1과 u_2가 존재하여 y_p가 구해진다면 문제가 없다.)

이를 다시 대입하면

$$f(x) = (a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y_p$$

$$= u_1(a_0 y_1{}'' + a_1 y_1{}' + a_2 y_1) + u_2(a_0 y_2{}'' + a_1 y_2{}' + a_2 y_2) + a_0(u_1{}' y_1{}' + u_2{}' y_2{}')$$

이고, y_1과 y_2는 동차 미분방정식의 해이므로 $u_1(a_0 y_1{}'' + a_1 y_1{}' + a_2 y_1) = 0$,
$u_2(a_0 y_2{}'' + a_1 y_2{}' + a_2 y_2) = 0$이 되어 $u_1{}' y_1{}' + u_2{}' y_2{}' = \dfrac{f(x)}{a_0}$를 얻는다. 따라서 u_1, u_2는 다음 연립방정식의 해로 구해진다.

$$\begin{cases} u_1{}' y_1 + u_2{}' y_2 = 0 \\ u_1{}' y_1{}' + u_2{}' y_2{}' = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{cases}$$

행렬을 이용하여 위 연립방정식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x)/a_0 \end{pmatrix}$$

이때 y_1과 y_2는 일차독립이므로 행렬 $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix}$의 행렬식은 0이 아니고, 따라서 이 연립방정식의 해는 항상 존재한다. 따라서 위 식의 양변에 행렬 $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix}$의 역행렬을 곱하여 $u_1{}'$

과 u_2'을 구할 수 있으며, 이를 다시 적분하여 u_1, u_2, y_p를 구할 수 있다.

차수 감소법에서 살펴본 예제를 매개변수 변환법으로 다시 풀어보자.

$$(D^2-2D+1)y=2e^x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$$

동차 미분방정식의 일반해의 기저는 e^x와 xe^x이므로 특수해 y_p는 $y_p=u_1e^x+u_2xe^x$이다. 이를 공식에 대입하면

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}$$

이고, $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}$에 곱해진 행렬의 행렬식은 e^{2x}이므로 양변에 역행렬을 곱하면

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

이므로 $u_1=-x^2,\ u_2=2x$이다. 따라서 특수해 y_p는 $y_p=-x^2e^x+2x^2e^x=x^2e^x$, 최종적인 해는 $y=(C_1+C_2+x^2)e^x=(1+x+x^2)e^x$이고 이는 차수 감소법을 통해 구한 해와 일치한다.

매개변수 변환법이 더 간단하게 보일 수도 있으나, 기저에 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 등이 포함된 경우 2×2 행렬이라도 역행렬이 매우 복잡해지는 경우가 있다. 또한 일반적으로 n계 비동차 미분방정식을 푸는 경우 $n\times n$ 행렬의 역행렬을 구하거나, n원 일차 연립방정식을 해결해야하므로 그 자체만으로도 쉽지 않은 일이다. 따라서 상황에 따라 두 방법을 적절하게 사용하면 될 것이다.

차수 감소법과 매개변수 변환법으로 구한 특수해의 형태는 같지 않을 수 있다. 하지만 이 차이는 동차 미분방정식의 일반해에 포함되어 있고, 적분상수에 따라서도 특수해의 형태는 달라질 수 있으므로 최종적인 해는 같다.

일반적인 n계 비동차 미분방정식으로 확장하는 경우, 3계 비동차 미분방정식에 대한 다음 공식과 같은 형태로 귀납적으로 확장하면 된다.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x)/a_0 \end{bmatrix}$$

Ⅵ. 연습문제

[1 ~ 10] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

1. $(D^4-7D^3+18D^2-20D+8)y=0$

2. $(D^3-4D)y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$, $x(0)=0$, $\dfrac{dx}{dt}(0)=v_0$, $k>0$

4. $D^2(D-1)y=3e^x+\sin x$

5. $y^{(3)}-y'=4e^{-x}+3e^{2x}$

6. $(D^2+1)y=\csc x$

7. $(D^2-3D+2)y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

8. $(D^2-D-2)y=1-2x-9e^{-x}$

9. $y''-4y=\dfrac{e^{2x}}{x}$

10. $y''+3y'+2y=\sin(e^x)$