[준킬러][수학1] 6수열2

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

04 활용1 (일반항 구하기. 대수와 식)

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고2 06월 12

1. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\beta}\right)+\cdots+\left(1-\frac{10}{\alpha}\right)\left(1-\frac{10}{\beta}\right)$$

의 값은?

① 230 ② 240 ③ 250
④ 260 ⑤ 270

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

2. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$의 값이 65의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2005 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

3. $a_n=\left[\frac{n^2}{104}\right]$일 때, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{103} 중에서 서로 다른 값의 개수는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않은 최대정수이다.)

① 70 ② 72 ③ 74
④ 76 ⑤ 78

[출처] 2007 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

4. 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$$

이 성립하도록 자연수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 차례로 정할 때, $a_{2007}+a_{2008}+a_{2009}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 23

5. 자연수 $n(n\geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4=5+10+15=30$이다. $a_n>500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 23

6. 자연수 $n(n\geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4=5+10+15=30$이다. $a_n>500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

7. 자연수 n에 대하여 $2^n\leq x\leq 2^{n+10}$에서 $|\log_2 x-2n|$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2009 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

8. 실수 $r(|r|<1)$에 대하여 $f(r)=\frac{1}{1-r}$일 때,

$$\left| f(-0.1)-1-\sum_{k=1}^{n}(-0.1)^k \right| < 10^{-7}$$

을 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 26

9. x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$$

의 두 근을 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}(1-a_n)(1-b_n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 18

10. 수열 $\{a_n\}$을

$a_n=$(자연수 n을 n개 이어 붙여 만든 자연수)

라 하자. 예를 들면 $a_2=22$, $a_{10}=10101010101010101010$이다. $\log a_n$의 정수부분을 b_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{20} b_n$의 값은? (단, log는 상용로그이다.)

① 335 ② 345 ③ 355
④ 365 ⑤ 375

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 20

11. 자연수 n에 대하여

$$\left| \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - m \right| < \frac{1}{2}$$

을 만족시키는 자연수 m을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 17

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형3 필수유형

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형3 필수유형

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형3 필수유형

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형3 필수유형

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형3 필수유형

12. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.
$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$의 값은?

① $\log 2+\log 3$ ② $2\log 2+\log 3$
③ $\log 2+2\log 3$ ④ $2\log 2+2\log 3$
⑤ $3\log 2+2\log 3$

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

13. 자연수 n에 대하여 $\left|n-\sqrt{m-\frac{1}{2}}\right|<1$을 만족하는 자연수 m의 개수를 a_n이라 하자. $\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 17

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 19

14. 다음은 21이하의 서로 다른 4개의 자연수 a, b, c, $d(a<b<c<d)$에 대하여 $2b=a+d$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하는 과정이다.

> 세 자연수 a, b, d는 $2b=a+d$를 만족시키므로 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
>
> 이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2, 가장 큰 값은 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> 이 등차수열의 공차를 $k\left(2 \le k \le \boxed{\text{(가)}}\right)$라 하면
>
> $a<a+k<c<a+2k$이므로 c가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $k-1$이고, a가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> 따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
>
> $$\sum_{k=2}^{\boxed{\text{(가)}}}\left\{(k-1)\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\right\}=\boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $p+q+f(3)$의 값은?

① 304 ② 307 ③ 310
④ 313 ⑤ 316

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 29

15. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a<b<c \le 20$
>
> (나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

16. 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{3}a_{3k}$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 28

17. 2 이상의 자연수 n과 상수 k에 대하여

$n^2-17n+19k$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 13

18. 자연수 m $(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은?

① 37 ② 42 ③ 47
④ 52 ⑤ 57

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

05 활용2 (일반항 구하기. 함수와 도형)

[출처] 2007 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

19. 넓이가 363인 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P_0라 하고, 선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{A}$를 121등분한 점과 끝점을 P_0로부터 차례로 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{120},\ \mathrm{P}_{121}=\mathrm{A}$ 라 하자. 점 $\mathrm{P}_k(k=1, 2, 3, \cdots, 120)$를 지나고 직선 $\mathrm{P}_0\mathrm{A}$에 수직인 직선이 선분 AB와 만나는 점을 B_k라 하고, 선분 AC와 만나는 점을 C_k라 하자. 삼각형

$$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 120)$$

의 넓이를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{120} a_k$의 값은?

① 177 ② 178 ③ 179
④ 180 ⑤ 181

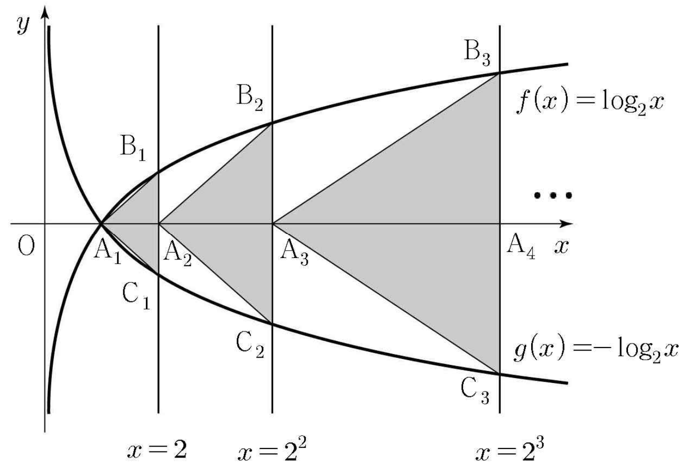
[출처] 2009 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

20. 자연수 n에 대하여 직선 $y=ax$가 원 $(x-4)^2+y^2=\frac{4}{n^2}$에 접하도록 하는 실수 a를 $f(n)$으로 나타낼 때, $\sum_{n=1}^{10}\{f(n)\}^2$의 값은?

① $\frac{8}{21}$　② $\frac{10}{21}$　③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{16}{21}$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 17

21. 두 함수 $f(x)=\log_2 x$와 $g(x)=-\log_2 x$의 그래프의 교점을 A_1, 직선 $x=2$가 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_1, A_2, C_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
직선 $x=2^2$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_2, A_3, C_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라 하자.
직선 $x=2^3$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_3, A_4, C_3라 하고 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}S_k$의 값은?

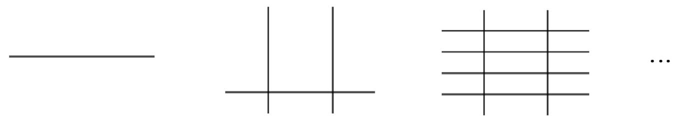


① $9\cdot 2^{10}+1$　② $9\cdot 2^{11}+1$　③ $10\cdot 2^{10}+1$
④ $10\cdot 2^{11}+1$　⑤ $11\cdot 2^{11}+1$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 03월 25

22. 한 평면 위에 다음과 같은 규칙으로 직선들을 차례로 그려 나간다.

[1단계] : 직선을 1개 그린다. [2단계] : [1단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 2개 그린다. [3단계] : [2단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 3개 그린다. ⋮ [n단계] : [$(n-1)$단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 n개 그린다. ($n=2, 3, 4, \cdots$)



[1단계] [2단계] [3단계]

[1단계]부터 [n단계]까지 그린 직선들의 모든 교점의 개수를 a_n ($n=2, 3, 4, \cdots$)이라 하자. 예를 들어, $a_2=2$, $a_3=8$이다. $a_{15}-a_{14}$의 값을 구하시오.
(단, 모든 직선은 서로 겹치지 않도록 그린다.)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 11

23. 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

라 정의하자. 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$과 $\mathrm{P}_n(n, 2^n)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n)$의 값은?

① 2^9+45　② $2^{10}+43$　③ $2^{10}+45$
④ $2^{11}+43$　⑤ $2^{11}+45$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 11

24. 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

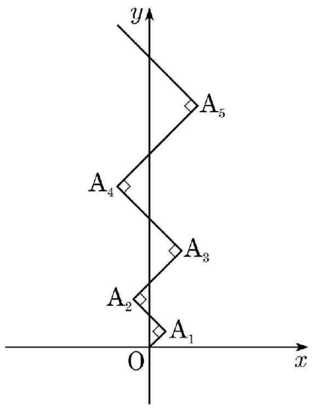
라 정의하자. 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$과 $\mathrm{P}_n(n, 2^n)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n)$의 값은?

① 2^9+45　② $2^{10}+43$　③ $2^{10}+45$
④ $2^{11}+43$　⑤ $2^{11}+45$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 30

25. 좌표평면에 다음과 같은 규칙으로 점 $A_n(n=1, 2, 3, \cdots)$을 정해 나간다. (단, 점 A_0의 좌표는 $(0, 0)$이다.)

(가) 점 A_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) $\overline{A_{n-1}A_n}=\sqrt{2}n$이고 $\angle A_{n-1}A_nA_{n+1}=90^\circ$이다.
(다) 선분 A_nA_{n+1}은 y축과 한 점에서 만난다.



삼각형 $A_{19}A_{20}A_{21}$의 무게중심의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 28

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 28

26. x에 대한 방정식

$$\cos x=\frac{1}{(2n-1)\pi}x \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

의 양의 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 30

27. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

(가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$이다.
(나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x가 자연수이고, $y=2^x$을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1=12$이다. $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 30

28. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

(가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$이다.
(나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x가 자연수이고, $y=2^x$을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1 = 12$이다. $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 30

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 30

29. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

(가) $a \geq 3$
(나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

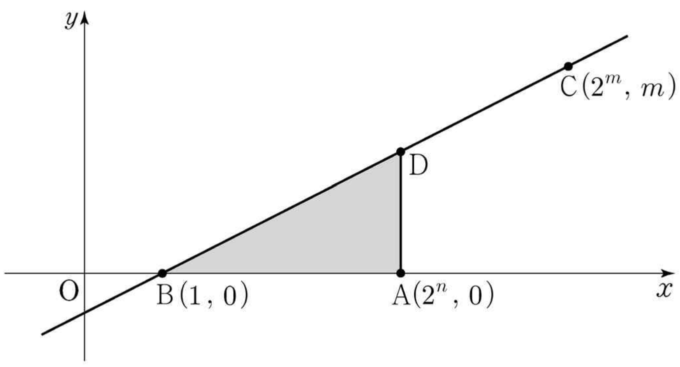
30. 원 $x^2+y^2=1$에 내접하는 정 96각형의 각 꼭짓점의 좌표를 (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$, (a_{96}, b_{96})이라 할 때, $\sum_{n=1}^{96} a_n^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 21

31. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n,\ 0)$이다.

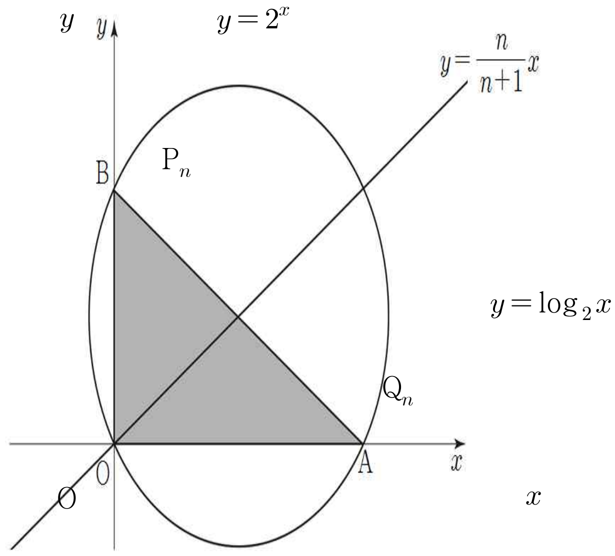
(나) 두 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$과 $\mathrm{C}(2^m,\ m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.



① 109　② 111　③ 113　④ 115　⑤ 117

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 19

32. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=2^x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$이 있다. 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $2\sum_{n=1}^{5} S_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1309　② 1311　③ 1313　④ 1315　⑤ 1317

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 29

33. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x < 1$에서 $f(x) = \|2x\|$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = \log_{2n} x$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

34. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$를 만족시키고 $f(x) = 2 - |x-1| \ (0 \leq x < 2)$이다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 $y = \log_n x$의 그래프와 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} a_n$의 값은?

① 250 ② 270 ③ 290
④ 310 ⑤ 330

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 15

35. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A의 좌표는 $(1, 0)$이다.
(나) 점 P_n은 선분 OA를 $2^n : 1$로 내분하는 점이다.

$l_n = \overline{\mathrm{OP}_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{l_n}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $10 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ② $10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ③ $11 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
④ $11 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ⑤ $12 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

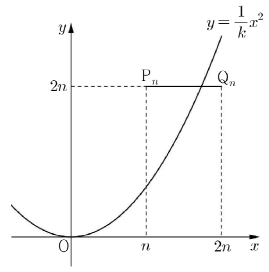
36. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}(k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만날 때, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} f(n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 30

37. 유리함수 $f(x)=\frac{8x}{2x-15}$ 와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=f(n)$이다. $\sum_{n=1}^{m} a_n \le 73$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오.

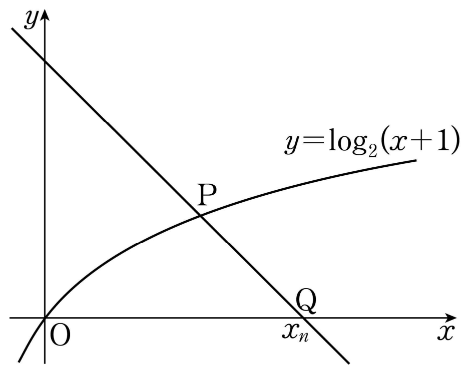
[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

38. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{P}_n(n, 2n)$, $\mathrm{Q}_n(2n, 2n)$이 있다. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 곡선 $y=\frac{1}{k}x^2$이 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 16

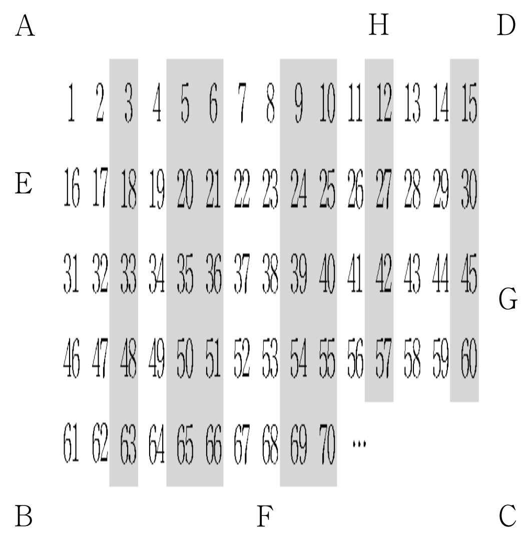
39. 그림과 같이 제 1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\,n$이 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} x_k$의 값은?



① 72 ② 84 ③ 96
④ 108 ⑤ 120

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 20

40. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형 ABCD가 있고, 네 점 E, F, G, H가 각각 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 있다. 선분 HF의 길이는 $\sqrt{4n^2+1}$이고 선분 HF와 선분 EG가 서로 수직일 때, 사각형 EFGH의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 765 ② 770 ③ 775
④ 780 ⑤ 785

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 16

41. 자연수 n에 대하여 $0 < x < n\pi$일 때, 방정식

$\sin x = \frac{3}{n}$의 모든 실근의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의

값은?

① 26 ② 27 ③ 28

④ 29 ⑤ 30

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 17

42. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 중심이 직선

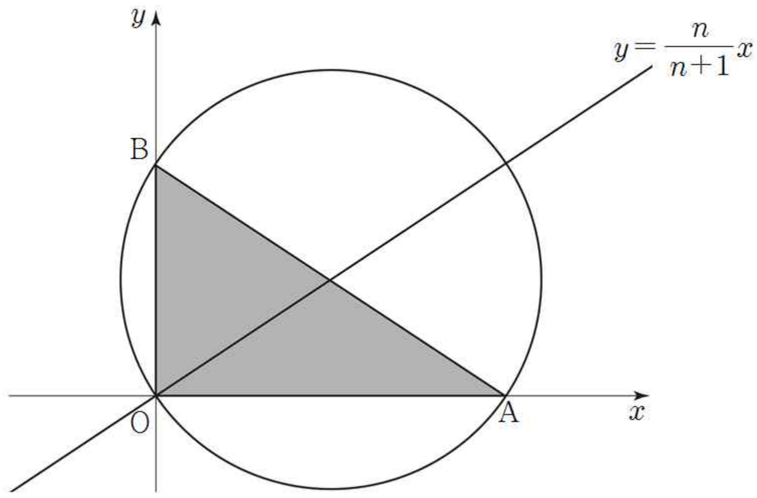
$y = \frac{n}{n+1}x$ 위에 있는 원이 원점을 지난다. 이 원이 x축과

만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A, y축과 만나는

점 중에서 y좌표가 양수인 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OB}} = 2n$이고

삼각형 OAB의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n}$의 값은?

(단, O는 원점이다.)



① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{6}{11}$ ③ $\frac{7}{11}$

④ $\frac{8}{11}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 27

43. 자연수n에 대하여 $0 \le x < 2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

44. 함수 $y = 2^x - \sqrt{2}$의 그래프 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = n$일 때, 점 P의 x좌표를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{6} a_n$의 정수 부분은? (단, 점 P는 제 1사분면에 있다.)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

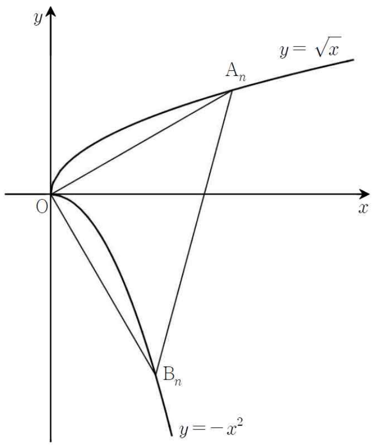
45. $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x = n$이 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - m)$의 그래프와 한 점에서 만나고, 직선 $y = n$이 함수 $y = |2^{-x} - m|$의 그래프와 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 하자.

$\sum_{n=5}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{30}$
④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{50}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

46. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A_n}(\mathrm{n}^2,\ \mathrm{n})$과 곡선 $y=-x^2\ (x\geq 0)$위의 점 $\mathrm{B_n}$이 $\overline{\mathrm{OA_n}}=\overline{\mathrm{OB_n}}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A_nOB_n}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 17

47. 자연수 n에 대하여 $0\leq x\leq 2^{n+1}$에서 함수 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{n}$과 만나는 모든 점의 x좌표의 합을 x_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{6}x_n$의 값은?

① 122 ② 126 ③ 130
④ 134 ⑤ 138

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

48. 자연수 n에 대하여 곡선

$$y=n\sin(n\pi x)\ \ (0\leq x\leq 1)$$

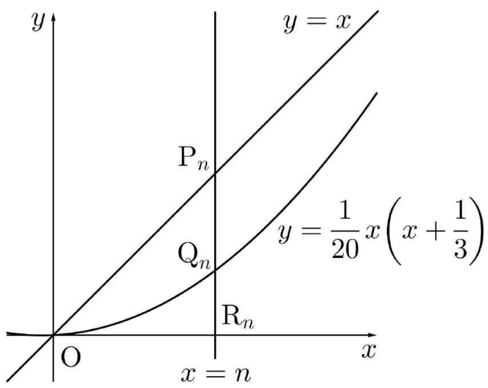
위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은?

① 340 ② 350 ③ 360
④ 370 ⑤ 380

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

49. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 P_n, 곡선 $y=\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)$과 만나는 점을 Q_n, x축과 만나는 점을 R_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 길이 중 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① $\frac{115}{6}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ $\frac{39}{2}$
④ $\frac{59}{3}$ ⑤ $\frac{119}{6}$



[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

50. 좌표평면에 네 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1)이 있다. 자연수 n에 대하여 집합 X_n은 다음 조건을 만족시키는 모든 점 (a, b)를 원소로 하는 집합이다.

(가) 점 (a, b)는 정사각형 ABCD의 내부에 있다.
(나) 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P와 점 (a, b) 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{1}{2^n}$이다.
(다) $a=\frac{1}{2^k}$이고 $b=\frac{1}{2^m}$인 자연수 k, m이 존재한다.

집합 X_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 100 ② 120 ③ 140
④ 160 ⑤ 180

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

06 활용3 (추론, 주기수열)

[출처] 2008 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

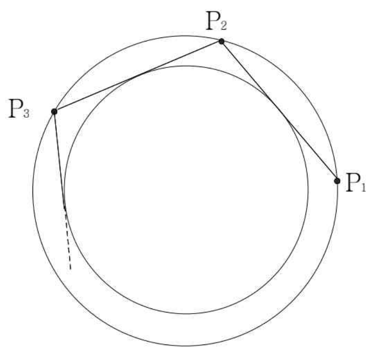
51. 두 원 $C_1 : x^2+y^2=1$과 $C_r : x^2+y^2=r^2$이 있다. (단, $r>1$) 다음 조건에 따라 C_r 위의 점 P_k를 차례로 잡자. $(k=1, 2, 3 \cdots)$

(ⅰ) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1\ (r, 0)$

(ⅱ) 점 P_{k+1}은 점 P_k에서 C_1에 그은 접선이 C_r와 만나는 점이다.

(ⅲ) 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$는 제1사분면을 지난다.

(ⅳ) 선분 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}$와 선분 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$은 다른 선분이다.



이때, <보기>에서 참인 명제를 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $r>\sqrt{2}$이면 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 < 90^\circ$이다.

ㄴ. $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이면 P_5의 좌표는 $\mathrm{P}_5\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이다.

ㄷ. $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 = 100^\circ$이면 $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_{10}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 03월 21

52. 자연수 n에 대하여 n^2을 6으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $a_n=4$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

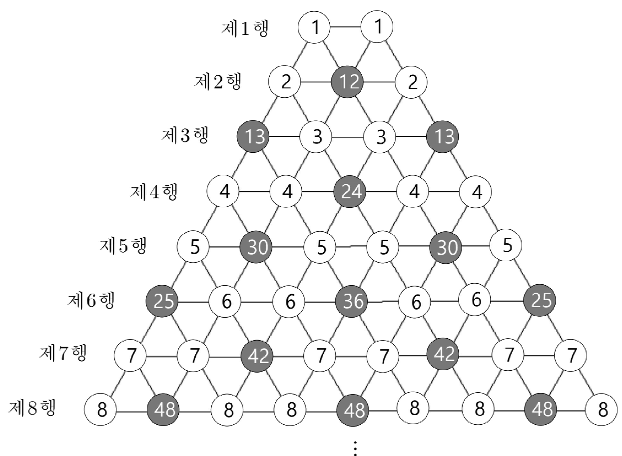
[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

53. 그림과 같이 정삼각형을 붙여서 만든 도형 위에 흰색과 검은색의 바둑돌을 정삼각형의 각 꼭짓점 위에 나열하는데, 제 n행에는 $(n+1)$개의 돌을 다음과 같은 규칙으로 나열한다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(가) 제 1행에는 모두 흰색의 바둑돌을 나열한다.
(나) 제 $(3n-1)$행에는 맨 왼쪽부터 흰색, 검은색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
(다) 제 $3n$행에는 맨 왼쪽에 검은색의 바둑돌을 1개 놓은 다음 그 오른쪽으로 흰색, 흰색, 검은색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
(라) 제 $(3n+1)$행에는 맨 왼쪽에 흰색의 바둑돌을 2개 나열한 다음 그 오른쪽으로 검은색, 흰색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.

위의 규칙대로 바둑돌을 나열한 다음 제 n행에 놓인 흰색의 바둑돌에는 n을 적고, 각 행에 놓인 검은색의 바둑돌에는 그 돌과 가장 가까운 4개 또는 6개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합을 적는다. 이때, 198이 적힌 바둑돌의 개수를 구하시오.



03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

07 활용4 (추론, 규칙적인 변화)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 7

54. 3으로도 5로도 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 한다. 예를 들면, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$이다. 이때, a_{100}의 값은?

① 172 ② 187 ③ 195
④ 202 ⑤ 210

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 10

55. 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 3으로 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이다.

$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots$

이때 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① 675 ② 685 ③ 695
④ 705 ⑤ 715

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

56. $1 \le x < 10$인 실수 x에 대하여 $\frac{x^3}{[x]}$의 값이 자연수가 되는 x의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[출처] 2009 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

57. 함수 $f(x)=\log_2(x^2+x+1)-\log_2 x$에 대하여

$[f(1)]+[f(2)]+[f(3)]+\cdots+[f(1022)]$

의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $2^{11}+2$ ② $2^{12}-2$ ③ $2^{12}+2$
④ $2^{13}-2$ ⑤ $2^{13}+2$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 28

58. $\sum_{n=1}^{50} n\left(\sin\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{n}{2}\pi\right)^n$의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

59. 양수 x에 대하여 x의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때,

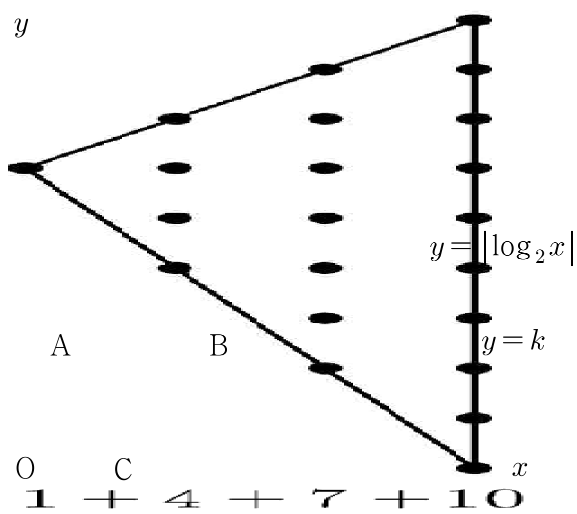
$$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) + \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)$$

의 값은?

① 9850 ② 9950 ③ 10050
④ 10150 ⑤ 10250

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 13

60. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 직선 $y=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 x축이 만나는 점을 C라 하자.



k가 자연수일 때, 선분 AB 위의 점(양 끝점 포함) 중에서 x좌표가 2^m (m은 정수) 꼴인 점의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 의 값은?

① 240 ② 245 ③ 250
④ 255 ⑤ 260

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 21

61. 수열 $\{a_n\}$은 15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 모두 나열하여 만든 것이다. 예를 들면 $a_2=2$, $a_4=7$이다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월

62. $x \geq 1$일 때, $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 함수

$$y=\{f(x)+1\}g(x)$$

의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n+\frac{1}{n+1}\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 26

63. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 소수부분을 $f(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(2^k)=m\log 2-n$이다. 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

64. 함수

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{100}\right]+\left[x+\frac{2}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{99}{100}\right]$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{4}{3}\right)=133$

ㄴ. 자연수 n에 대하여 $f\left(x+\frac{n}{2}\right)=f(x)+50n$

ㄷ. 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{100}\le x<\frac{n+1}{100}$일 때,
$f(f(x)-1)=nf(x)-1$
을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

65. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+cn \ (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20}=199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

66. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은?

① 150 ② 160 ③ 170
④ 180 ⑤ 190

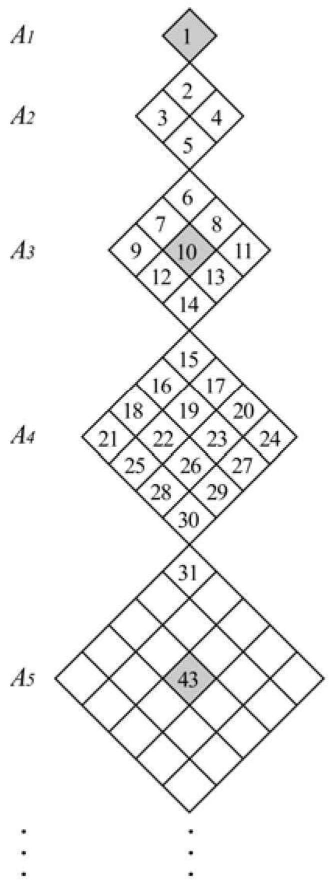
03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

08 활용5 (여러가지 추론)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 30

67. 그림과 같이 크기가 같은 정사각형 1개, 4개, 9개, $\cdots$로 만들 어진 도형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$이 이어져 있다.
각 정사각형에 자연수를 규칙적으로 적어 나갈 때, A_1, A_3, A_5, $\cdots$에는 정중앙(어두운 부분)에 적힌 수가 있다. 예를 들면, A_3의 정중앙에 적힌 수는 10이고, A_5의 정중앙에 적힌 수는 43이다. 이때 A_9의 정중앙에 적힌 수를 구하시오.



[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 11월 30

68. 상용로그 $\log A$의 정수부분 n과 소수부분 α가 방정식 $4x^2-13x+\beta=0$의 두 근일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{400\alpha}{n^k}\right]$의 값을 구하시오. (단, β는 상수이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 30

69. 그림은 직사각형 모양을 이루고 있는 (5×100)개의 칸에 다음 규칙에 따라 수를 나열한 것이다.

(가) 제1행에는 1, 2, 3, $\cdots$, 100을 차례로 나열하고, 각 행의 첫 칸에는 모두 1을 나열한다.
(나) 그림에 있는 (2×2)개의 칸으로 이루어진 임의의 직사각형 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$에서 등식 $d=|b-c|$가 성립하도록 한다.
예를 들면 $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ 에서 $3=|5-2|$가 성립한다.

이때 제5행 (어두운 부분)에 나열된 100개의 수의 합을 구하시오.

제1행	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	100
제2행	1	1	2	2	3	3	$\cdots$	50
제3행	1	0	2	0	3	0	$\cdots$	0
제4행	1	1	1	1	2	2	$\cdots$	25
제5행	1	0	1	0	2	0	$\cdots$	0

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 23

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 23

70. 2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$\{3^{2k-1}\,|\,k\text{는 자연수},\ 1\le k\le n\}$$

의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구하시오.

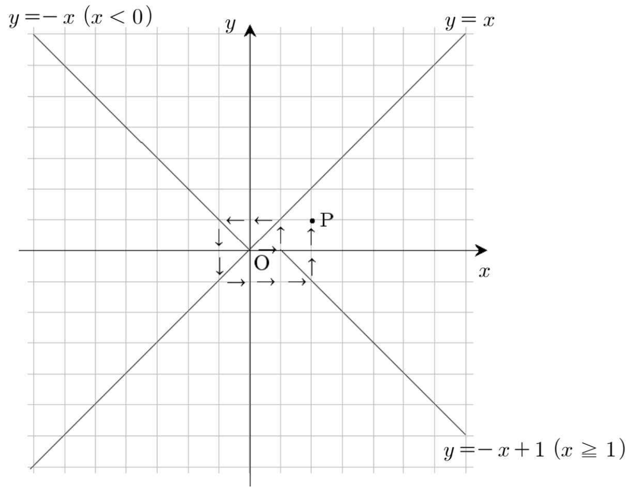
[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

71. 좌표평면 위를 움직이는 점 P는 다음과 같은 규칙으로 x축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동한다.

(가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1,\ 0)$으로 이동한다.
(나) 점 P가 반직선 $y=-x+1(x \geq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x(x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
(다) 점 P가 반직선 $y=-x(x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x(x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여 11회 이동하면 점 $(2,\ 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0,\ 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.)

① 350 ② 360 ③ 370
④ 380 ⑤ 390

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 30

72. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 양수 a가 다음 조건을 만족한다.

(가) $\sum_{k=1}^{10} f\left(\sqrt[10]{10^k a}\right)=94$
(나) $100g(a)$의 값은 자연수이다.

$100g(a)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 29

73. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

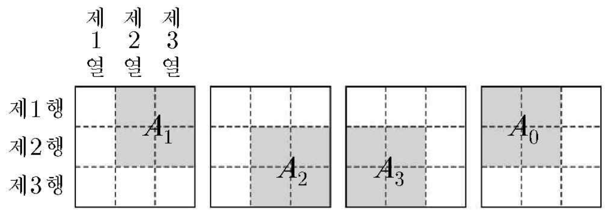
$$\sum_{k=1}^{n} k\log a_k = n^2 - n \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. $\log a_m$의 소수부분이 0.9일 때, m의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 21

74. 3행 3열로 이루어진 바닥에 고정된 숫자판이 있다.

[그림]과 같이 이 숫자판에서 이웃한 두 행과 이웃한 두 열이 교차하여 만들어지는 오른쪽 위, 오른쪽 아래, 왼쪽 아래, 왼쪽 위에 있는 두 행과 두 열의 네 칸으로 이루어진 영역을 각각 A_1, A_2, A_3, A_0이라 하자.



[그림]

0 이상의 정수 n에 대하여 숫자판 T_n을 다음과 같은 규칙에 따라 만든다.

(가) 모든 칸에 0을 써 만든 숫자판이 T_0이다.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

(나) $n \geq 1$, $m=$(n을 4로 나눈 나머지)일 때, 숫자판 T_{n-1}에서 영역 A_m의 네 칸에만 각각 n을 더하여 만든 숫자판이 T_n이다.

T_1

0	1	1
0	1	1
0	0	0

T_2

0	1	1
0	3	3
0	2	2

T_3

0	1	1
3	6	3
3	5	2

T_4

4	5	1
7	10	3
3	5	2

T_5

4	10	6
7	15	8
3	5	2

$\cdots$

숫자판 T_n에서 제 2행에 있는 세 수를 왼쪽부터 차례대로 a_n, b_n, c_n이라 하자. 예를 들어 $a_5=7$, $b_5=15$, $c_5=8$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $b_8=36$

ㄴ. $c_{4n}=\sum_{k=1}^{n}(8k-5)$

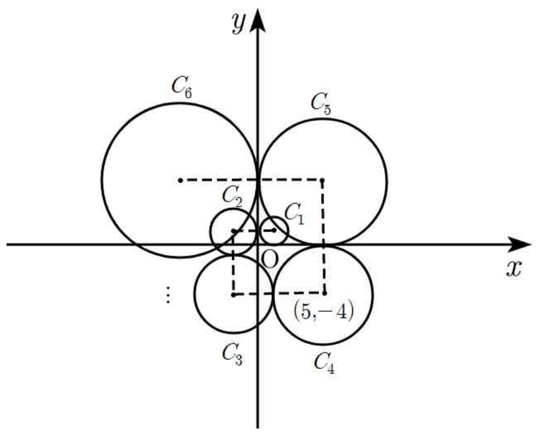
ㄷ. $\sum_{n=1}^{10} a_{4n}=1505$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

75. 자연수 n에 대하여 좌표평면에 원 C_n을 다음과 같은 규칙으로 그린다.

(가) 원 C_1의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.
(나) 원 C_n의 반지름의 길이는 n이다.
(다) 원 C_{n+1}은 원 C_n과 외접하고, 두 원 C_n, C_{n+1}의 중심을 지나는 직선은 x축 또는 y축과 평행하다.
(라) $n=4k+p$ (k는 음이 아닌 정수, $p=1, 2, 3, 4$) 일 때, 원 C_n의 중심은 제p사분면에 있다.



예를 들어 원 C_4의 중심의 좌표는 $(5, -4)$이고 반지름의 길이는 4이다. 원 C_n중에서 그 중심이 원 C_{40}의 내부에 있는 원의 개수는?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

76. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1<x<10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값은? (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

(가) $\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$

(나) $\sum_{k=1}^{3} f(kx)=3f(x)$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 30

77. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하고, $h(x)=x+5f(x)$라 하자. 두 조건

$$f(m)\le f(x),\ g(h(m))\le g(x)$$

를 만족시키는 자연수 m의 개수를 $p(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} p(2k)$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

78. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1<x<10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값을 구하시오. (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

(가) $\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$

(나) $\sum_{k=1}^{3} f(kx)=3f(x)$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 30

79. 집합 $U=\{x|x$는 30 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ ,\ a_{15}\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 임의의 두 원소 $a_i,\ a_j(i\neq j)$에 대하여 $a_i+a_j\neq 31$

(나) $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}a_i=264$

$\displaystyle\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

80. 정수 d는 다음 조건을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$의 공차이다.

(가) $a_1=-2016$

(나) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}a_k=0$인 자연수 n이 존재한다.

모든 d의 합을 k라 할 때, k를 1000으로 나눈 나머지를 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 03월 20

81. 자연수 m에 대하여 함수 $f(m)$을 다음과 같이 정의한다.

$$f(m)=\begin{cases}\log_2 m & (m\text{은 홀수})\\ \log_4 m & (m\text{은 짝수})\end{cases}$$

$f(m)$의 값이 유리수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 만든 수열을 $\{a_n\}$이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{2}$이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 20

82. 첫째항이 -36이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 d의 값의 합은?

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
>
> (나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 0$인 m이 존재한다.

① 100 ② 104 ③ 108
④ 112 ⑤ 116

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 21

83. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1) = 8$, $f(3) \neq 6$
>
> (나) 함수 $(g \circ f)(x)$는 항등함수이다.
>
> (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) + g(x)$의 값은 일정하다.

$(f \circ f \circ f)(7)$의 값은?

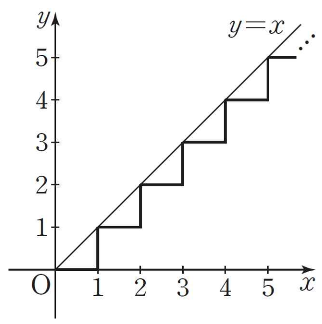
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 29

[출처] 2020 일반_기타개인 구분

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

84. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.



(i) A_0은 원점이다. (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

85. 1부터 12까지의 모든 자연수를 임의로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{12}라 할 때,

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+\cdots+|a_{11}-a_{12}|$$

의 최댓값은?

① 67 ② 68 ③ 69 ④ 70 ⑤ 71

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

86. 자연수 n에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$이라 할 때, S_{180}의 정수 부분을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 17

87. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ 라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_7=T_7$
>
> (나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은?

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 17

88. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_7=a_6+a_8$
>
> (나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은?

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

89. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

> (가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k>-100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 21

90. 첫째항이 b (b는 자연수)이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 14$를 만족시키는 모든 b의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, m번째 수를 b_m이라 하자. $\sum_{m=1}^{10} b_m$의 값은?

① 345 ② 350 ③ 355
④ 360 ⑤ 365

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

09 활용6 (격자점)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

91. 자연수 n에 대하여 집합 A_n, B_n을

$$A_n = \{(n,\ k) \mid k \leq n^2 + n,\ k\text{는 자연수}\}$$

$$B_n = \left\{(n,\ k) \,\middle|\, k \leq \frac{1}{2}n + 5,\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 $A_n - B_n$의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은?

① 2883 ② 2886 ③ 2889
④ 2892 ⑤ 2895

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 27

92. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{6^n}{x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 30

93. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)=|x-1|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x+f(x)$$

라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오.

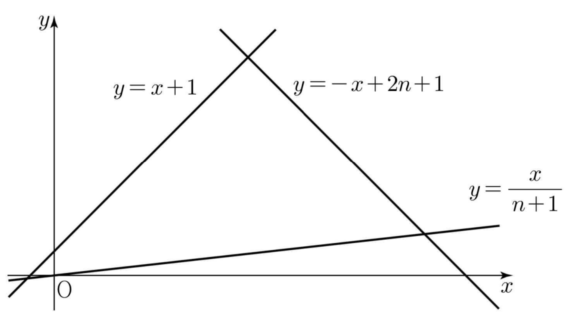
(가) $n \le a \le n+2$
(나) $0 < b \le g(a)$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 29

94. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sqrt{x+n^2}$, $y=-\sqrt{x}+n$과 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

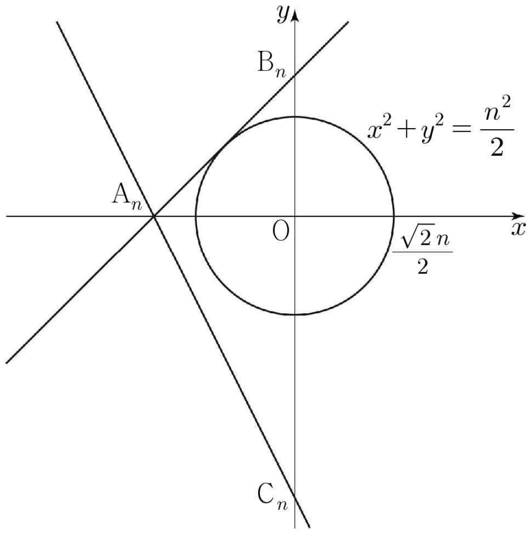
[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

95. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 세 직선 $y=x+1$, $y=-x+2n+1$, $y=\dfrac{x}{n+1}$로 둘러싸인 삼각형의 내부(경계선 제외)에 있는 점 $(x,\ y)$ 중에서 $x,\ y$가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_n=133$인 n의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 29

96. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 기울기가 1이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선이 y축과 만나는 점을 C_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 21

97. 좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+10 & (x<10) \\ (x-10)^2 & (x \ge 10) \end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은?

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 29

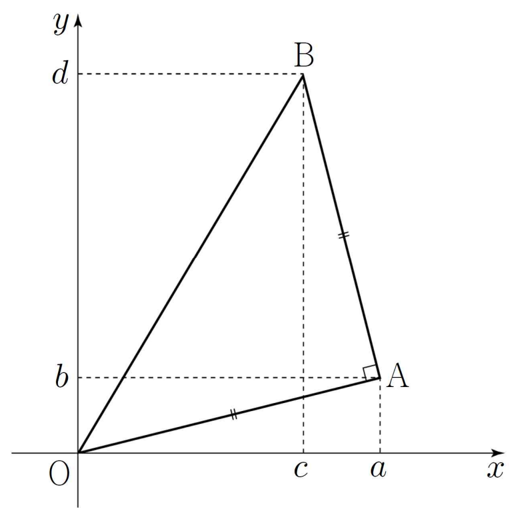
98. 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0,\ n+5)$, $\mathrm{B}(n+4,\ 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 14

99. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

> ◦ $a>b$
>
> ◦ 좌표평면 위의 두 점 A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 A$(a,\ b)$에 대하여

점 B$(c,\ d)$가 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로

$b<\frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\leq n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는

$n-2k$이다.

2 이상의 자연수 m에 대하여

(i) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터

$\boxed{\text{(가)}}$까지이므로

$$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}}(2m-2k)=\boxed{\text{(나)}}$$

(ii) $n=2m+1$인 경우

$$T_{2m+1}=\boxed{\text{(다)}}$$

(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_n=614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은?

① 71 ② 74 ③ 77

④ 80 ⑤ 83

[준킬러][수학1] 6수열2(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] ①
2. [정답] ③
3. [정답] ⑤
4. [정답] ①
5. [정답] 11

6. [정답] 11
7. [정답] 75
8. [정답] ④
9. [정답] 330
10. [정답] ③

11. [정답] ②
12. [정답] ①
13. [정답] 202
14. [정답] ③
15. [정답] **525**

16. [정답] **49**
17. [정답] 3
18. [정답] ③
19. [정답] ④
20. [정답] ②

21. [정답] ①
22. [정답] 840
23. [정답] ④
24. [정답] ④
25. [정답] 214

26. [정답] 120
27. [정답] 392
28. [정답] 392
29. [정답] 86
30. [정답] 48

31. [정답] ①
32. [정답] ①
33. [정답] 553
34. [정답] ⑤
35. [정답] ③
36. [정답] 195
37. [정답] 16
38. [정답] 191
39. [정답] ①
40. [정답] ③

41. [정답] ①
42. [정답] ①
43. [정답] **169**
44. [정답] ②
45. [정답] ①

46. [정답] **395**
47. [정답] ②
48. [정답] ⑤
49. [정답] ⑤
50. [정답] ①

51. [정답] ④
52. [정답] 34
53. [정답] 142
54. [정답] ②
55. [정답] ①

56. [정답] 171
57. [정답] ⑤
58. [정답] 675
59. [정답] ⑤
60. [정답] ④

61. [정답] ①
62. [정답] **65**
63. [정답] **67**
64. [정답] ③
65. [정답] **282**

66. [정답] ⑤
67. [정답] 245
68. [정답] 48
69. [정답] 650
70. [정답] **100**

71. [정답] ⑤
72. [정답] 69

73. [정답] 20
74. [정답] ③
75. [정답] ②

76. [정답] ⑤
77. [정답] 65
78. [정답] 23
79. [정답] 184
80. [정답] 120

81. [정답] ②
82. [정답] ②
83. [정답] ②
84. [정답] 8
85. [정답] ⑤

86. [정답] 17
87. [정답] ④
88. [정답] ④
89. [정답] ②
90. [정답] ④

91. [정답] ①
92. [정답] 505
93. [정답] 427
94. [정답] 300
95. [정답] 12

96. [정답] 725
97. [정답] ④
98. [정답] 164
99. [정답] ⑤

[준킬러][수학1] 6수열2(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] ①

[해설]
이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에서 $a+\beta=3$, $a\beta=1$

(주어진 식) $=\sum_{k=1}^{10}\left(1-\frac{k}{a}\right)\left(1-\frac{k}{\beta}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a\beta}(a-k)(\beta-k)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(a+\beta)k+a\beta)\}$ $(\because a\beta=1)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k+1)$

$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10$

$=230$

2) [정답] ③

[해설]
$\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)=65k$이고 2와 65는 서로소이므로 $2^n-1=65k'$이 성립하면 된다.

$2^n=65k'+1=(5\cdot 13)k'+1$ (n, k는 자연수)

(ⅰ) 수열 $a_n=2^n$을 5로 나눈 나머지의 수열을 $a_n{}'$이라고 하면 $a_n{}':2,\ 4,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 1,\ \cdots$ 이므로 2^n을 5로 나눈 나머지가 1이 되는 경우는 n이 4의 배수일 때이다.

(ⅱ) $2^{4m}=(2^4)^m=(13+3)^m$을 13으로 나눈 나머지는 3^m을 13으로 나눈 나머지와 같다.
수열 $b_m=3^m$을 13으로 나눈 나머지의 수열을 $b_m{}'$이라고 하면 $b_m{}':3,\ 9,\ 1,\ 3,\ 9,\ 1,\ \cdots$ 이므로 2^{4m}을 13으로 나눈 나머지가 1이 되는 경우는 m이 3의 배수일 때이다.

∴ (ⅰ), (ⅱ)에서 2^n을 5, 13으로 나눈 나머지가 모두 1이 되는 경우는 n이 12의 배수가 될 때이다.

3) [정답] ⑤

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 연속하는 두 항의 값이 서로 다르기 위한 조건은

$a_{n+1}\geq a_n+1$

즉, $b_n=\frac{n^2}{104}$라고 하면

$b_{n+1}\geq b_n+1$ …… (1)

여기서

$b_{n+1}-b_n=\frac{(n+1)^2-n^2}{104}=\frac{2n+1}{104}$

이므로 조건 (1)에 의해

$2n+1\geq 104$ $\quad\therefore\ n\geq 52$

1) $n\leq 52$인 경우 :
$a_{52}=\left[\frac{52^2}{104}\right]=26$이므로 0부터 26까지 27개의 값을 갖는다.

2) $n>52$인 경우 :
모든 항이 다른 값을 가지므로 51개의 값이 나온다.

따라서 가질 수 있는 값은
$27+51=78$ (가지)

4) [정답] ①

[해설]
$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$에서

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots+\frac{a_n}{5^n}<\frac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{5}{3}-\frac{1}{5^{n-1}}<a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-1}}<\frac{5}{3}$ …… ㉠

∴ $a_1=1$ ($\because$ a_1은 자연수)

㉠의 각 변에서 1을 빼면

$\frac{2}{3}-\frac{1}{5^{n-1}}<\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-1}}<\frac{2}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{10}{3}-\frac{1}{5^{n-2}}<a_2+\frac{a_3}{5^1}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-2}}<\frac{10}{3}$ …… ㉡

∴ $a_2=3$ ($\because a_2$는 자연수)

㉡의 각 변에서 3을 빼면

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^{n-2}}<\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\frac{a_5}{5^3}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-2}}<\frac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{5}{3}-\frac{1}{5^{n-3}}<a_3+\frac{a_4}{5}+\frac{a_5}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-3}}<\frac{5}{3}$

∴ $a_3=1$ ($\because a_3$은 자연수)

마찬가지로

$a_4=3,\ a_5=1,\ a_6=3,\ \cdots$

$\therefore\ a_n=\begin{cases}1 & (n\text{이 홀수})\\ 3 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$\therefore\ a_{2007}+a_{2008}+a_{2009}=1+3+1=5$

5) [정답] 11

[해설]

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$의

$n-1$개다.

$$\therefore a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$에서

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$$

$(n-1)n(n+1)>1000$

$9\cdot10\cdot11=990<1000$

$10\cdot11\cdot12=1320>1000$

이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

6) [정답] 11

[해설]

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$의

$n-1$개다.

$$\therefore a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$에서

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$$

$(n-1)n(n+1)>1000$

$9\cdot10\cdot11=990<1000$

$10\cdot11\cdot12=1320>1000$

이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

7) [정답] 75

[해설]

부등식에 밑을 2로 하는 로그를 취해주면

$n\le\log_2 x\le n+10\Rightarrow -n\le\log_2 x-2n\le 10-n$

$n<5$일 때는 $10-n$의 절댓값이 더 크므로$a_n=10-n$

$n=5$일 때는 $-n$과 $10-n$의 절댓값이 같으므로 $a_n=5$

$n>5$일 때는 $-n$의 절댓값이 더 크므로 $a_n=n$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=9+8+7+6+5+6+7+8+9+10=75$$

8) [정답] ④

[해설]

$f(r)=\dfrac{1}{1-r}$이므로

$$\left|f(-0.1)-1-\sum_{k=1}^{n}(-0.1)^k\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{1}{1-(-0.1)}-1-\frac{(-0.1)\{1-(-0.1)^n\}}{1-(-0.1)}\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{1-1.1+0.1+(-0.1)^{n+1}}{1.1}\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{(-0.1)^{n+1}}{1.1}\right|<(0.1)^7$$

$|(-0.1)^{n+1}|<1.1\times(0.1)^7$

$\therefore\ n+1\ge 7$

따라서 $n\ge 6$이므로 가장 작은 자연수 n의 값은 6이다.

9) [정답] 330

[해설]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=2n+1$이고 $a_nb_n=n(n+1)$

$$\sum_{n=1}^{10}\{1-(a_n+b_n)+a_nb_n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\{1-(2n+1)+n(n+1)\}=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}=330$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(1-a_n)(1-b_n)=330$

10) [정답] ③

[해설]

n이 한 자릿수이면 a_n은 n자릿수이므로 $b_n=n-1$,

n이 두 자릿수이면 a_n은 $2n$자릿수이므로

$b_n=2n-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{20} b_n=\sum_{n=1}^{9}(n-1)+\sum_{n=10}^{20}(2n-1)$$

$$=-\sum_{n=1}^{9}n+\sum_{n=1}^{9}(2n-1)+\sum_{n=10}^{20}(2n-1)$$

$$=-\sum_{n=1}^{9}n+\sum_{n=1}^{20}(2n-1)=355$$ 이다.

11) [정답] ②

[해설]

$$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m<\frac{1}{2}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}$$ 에서

$$-\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$$

m, n은 정수이므로 $n^2+n-m=0$이다.

m은 n^2+n이다. 즉, $a_n=n^2+n$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$

$=55+15=70$이다.

12) [정답] ①

[해설]

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$은 짝수이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$$

$$=-\log1+\log2+\log3-\log4+\log6-\log9+\log12+\log18-\log36$$

$$=\log\frac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$$

$$=\log6$$

$$=\log2+\log3$$

13) [정답] 202

[해설]

$n-1<\sqrt{m-\frac{1}{2}}<n+1$, $(n-1)^2<m-\frac{1}{2}<(n+1)^2$

$(n-1)^2+\frac{1}{2}<m<(n+1)^2+\frac{1}{2}$, $a_n=(n+1)^2-(n-1)^2=4n$

$$\therefore \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100}a_n=\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100}4n=\frac{1}{50}\times100\times101=202$$

14) [정답] ③

[해설]

세 자연수 a, b, d는 $2b=a+d$를 만족시키므로 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2, 가장 큰 값은 $\boxed{10}$이다.

이 등차수열의 공차를 $k\left(2\le k\le \boxed{10}\right)$이라 하면 $1\le a<a+k<c<a+2k\le21$이므로 c가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $k-1$이고 a가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $\boxed{21-2k}$이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$\sum_{k=2}^{\boxed{10}}\left\{(k-1)\times\left(\boxed{21-2k}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}(-2k^2+23k-21)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(-2k^2+23k-21)-(-2\times1^2+23\times1-21)$$

$$=-2\times\frac{10\times11\times21}{6}+23\times\frac{10\times11}{2}-21\times10$$

$$=\boxed{285}$$

따라서 $p=10$, $f(k)=21-2k$, $q=285$이므로

$p+q+f(3)=10+285+15=310$

15) [정답] **525**

[해설]

자연수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 조건 (나)에서 $a+b>c$이므로 $c\geq 4$이다.

(ⅰ) $c=2k$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$인 경우

$b=2k-1$일 때 $2\leq a\leq 2k-2$

$b=2k-2$일 때 $3\leq a\leq 2k-3$

$\vdots$

$b=k+1$일 때 $a=k$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$(2k-3)+(2k-5)+(2k-7)+\cdots+3+1$$
$$=\frac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2}$$
$$=(k-1)^2$$

(ⅱ) $c=2k+1$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우

$b=2k$일 때 $2\leq a\leq 2k-1$

$b=2k-1$일 때 $3\leq a\leq 2k-2$

$\vdots$

$b=k+2$일 때 $k\leq a\leq k+1$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$(2k-2)+(2k-4)+(2k-6)+\cdots+4+2$$
$$=\frac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2}$$
$$=k(k-1)$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2+\sum_{k=2}^{9}k(k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(k^2-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k)$$
$$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}$$
$$=525$$

16) [정답] 49

[해설]

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=1^3-3\times(-1)\times1=4$$
$$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3+\beta^3)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=4^2-2\times(-1)^3=18$$

(ⅰ) $k=1$일 때

$$a_3=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=\frac{1}{2}\times4=2$$

(ⅱ) $k=2$일 때

$$a_6=\frac{1}{2}(\alpha^6+\beta^6)=\frac{1}{2}\times18=9$$

(ⅲ) $k=3$일 때

$$a_9=\frac{1}{2}(\alpha^9+\beta^9)$$
$$=\frac{1}{2}\{(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^6+\beta^6)-\alpha^3\beta^3(\alpha^3+\beta^3)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{4\times18-(-1)\times4\}$$
$$=38$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\sum_{k=1}^{3}a_{3k}=a_3+a_6+a_9=2+9+38=49$$

17) [정답] 3

[해설]

$n\geq 2$에서 $n^2-17n+19k$의 값을 $g(n)$이라 하자.

(i) n이 홀수일 때, $n=2m+1$(m은 자연수)

$g(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로

$f(2m+1)=1$

(ii) n이 짝수일 때, $n=2m$(m은 자연수)

$g(2m)>0$이면 $f(2m)=2$

$g(2m)<0$이면 $f(2m)=0$

$g(2m)=0$이라 하면 $19k=2m(17-2m)$

이를 만족시키는 두 자연수 m과 k는 존재하지 않는다.

(i), (ii) 에 의하여

$$\sum_{n=2}^{19}f(n)=\sum_{m=1}^{9}f(2m)+\sum_{m=1}^{9}f(2m+1)$$
$$\sum_{m=1}^{9}f(2m)=19-1\times9=10$$

$\sum_{m=1}^{9}f(2m)=10$을 만족시키기 위해서는

$g(2m)>0$인 m의 개수가 5이어야 한다. ……㉠

$2\leq n\leq 7$이면 $g(n)>g(n+1)$

$n=8$이면 $g(n)=g(n+1)$, 즉 $g(8)=g(9)$

$n\geq 9$이면 $g(n)<g(n+1)$

자연수 n에 대하여 $g(n)=g(17-n)$이므로

$g(18)>g(16)>g(15)=g(2)>g(14)>g(13)=g(4)$

$>g(12)>g(11)=g(6)>g(10)>g(9)=g(8)$

㉠을 만족시키는 경우는

$g(18)>g(16)>g(2)>g(14)>g(4)>0>g(12)$

$g(4)=4^2-17\times4+19k>0,\ 19k>52$

$g(12)=g(5)=5^2-17\times5+19k<0,\ 19k<60$

$\frac{52}{19}<k<\frac{60}{19}$

따라서 자연수 k는 3

18) [정답] ③

[해설]

m^{12}의 n제곱근 중 정수가 존재하기 위해서는

$$\sqrt[n]{m^{12}}=m^{\frac{12}{n}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 정수이어야 한다.

m의 값에 따라 2이상의 자연수 n의 개수는 m이 제곱수, 세제곱수인지에 따라서 다음과 같이 나눌 수 있다.

(ⅰ) $m=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7$일 때

n은 12의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로

$f(m)=5$

(ⅱ) $m=4,\ 9$일 때

$m=k^2\ (k=2,\ 3)$이라 하면 ㉠에서

$m^{\frac{12}{n}}=k^{\frac{24}{n}}$

따라서 n은 24의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로

$f(m)=7$

(ⅲ) $m=8$일 때

$m=2^3$이므로 ㉠에서

$m^{\frac{12}{n}}=2^{\frac{36}{n}}$

따라서 n은 36의 약수 중 1을 제외한 수가 가능하므로

$f(8)=8$

이상에서

$$\sum_{m=2}^{9}f(m)=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$$
$$=5\times5+7\times2+8$$
$$=47$$

19) [정답] ④

[해설]

삼각형 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$의 높이는 삼각형 ABC의 높이의 $\frac{1}{121}$이고,

밑변 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$는 $\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}:\overline{\mathrm{BC}}=\left(1-\frac{k}{121}\right):1$에서 $\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=\left(1-\frac{k}{121}\right)\overline{\mathrm{BC}}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$의 면적 a_k는

$a_k=\frac{1}{121}\times\left(1-\frac{k}{121}\right)\times363=3\left(1-\frac{k}{121}\right)$

따라서

$$\sum_{k=1}^{120}a_k=\sum_{k=1}^{120}\left(3-\frac{3}{121}k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{120}3-\frac{3}{121}\sum_{k=1}^{120}k$$
$$=360-\frac{3}{121}\times\frac{1}{2}\times120\times121$$
$$=180$$

20) [정답] ②

[해설]

직선 $y=ax$가 원 $(x-4)^2+y^2=\frac{4}{n^2}$에 접하므로

원의 중심 $(4,\ 0)$에서 직선 $ax-y=0$에 이르는 거리와 원의 반지름의 길이 $\frac{2}{n}$가 같다.

즉, $\frac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{n}$ 이므로

$\frac{16a^2}{a^2+1}=\frac{4}{n^2}$

$16a^2n^2=4a^2+4$

$16a^2n^2-4a^2=4$

$a^2(16n^2-4)=4$

$a^2=\frac{4}{16n^2-4}=\frac{1}{4n^2-1}$

이때, $a=f(n)$이므로

$a^2=\{f(n)\}^2=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\{f(n)\}^2$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$

21) [정답] ①

[해설]

$\mathrm{A}_n(2^{n-1},\ 0),\ \mathrm{A}_{n+1}(2^n,\ 0),\ \mathrm{B}_n(2^n,\ n),$

$\mathrm{C}_n(2^n,\ -n)$이므로 $S_n=n\cdot2^{n-1}$이다.

$\sum_{k=1}^{10}S_k=S$라 하면

$S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+10\cdot2^9\cdots\cdots$ ①

$2S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^{10}\cdots\cdots$ ②

①-②를 하면

$-S=1+2+2^2+\cdots+2^9-10\cdot 2^{10}$

$=-9\cdot 2^{10}-1$이다. 따라서 $S=9\cdot 2^{10}+1$이다.

22) [정답] 840

[해설]

구하는 $a_{15}-a_{14}$의 값은 2단계, 4단계, 6단계, $\cdots$, 14단계에서 그린 직선의 총 개수와 15단계에서 그린 직선의 개수의 곱과 같다.

$\therefore\ a_{15}-a_{14}=15\times(2+4+6+\cdots+14)=840$

23) [정답] ④

[해설]

$d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)=|1-n|+|0-2^n|$이다.

$\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)=\sum_{n=1}^{10}(-1+n+2^n)=2^{11}+43$

24) [정답] ④

[해설]

$d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)=|1-n|+|0-2^n|$이다.

$\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)=\sum_{n=1}^{10}(-1+n+2^n)=2^{11}+43$

25) [정답] 214

[해설]

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=3\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}=4\sqrt{2},\ \cdots$이므로

점 $\mathrm{A}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 x좌표를 x_n이라 하면 수열 $\{x_n\}$은 다음과 같다.

$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots$

$\therefore\ x_{2k-1}=k,\ x_{2k}=-k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

한편, 점 $\mathrm{A}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서 세 점 $\mathrm{A}_{19},\ \mathrm{A}_{20},\ \mathrm{A}_{21}$의 좌표는

$\mathrm{A}_{19}(10,\ 190),\ \mathrm{A}_{20}(-10,\ 210),\ \mathrm{A}_{21}(11,\ 231)$

이므로 삼각형 $\mathrm{A}_{19}\mathrm{A}_{20}\mathrm{A}_{21}$의 무게중심의 좌표는

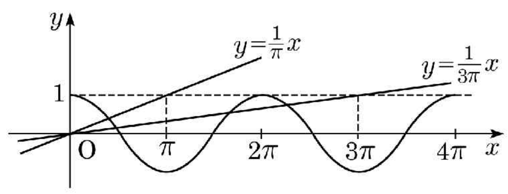
$\left(\dfrac{10-10+11}{3},\ \dfrac{190+210+231}{3}\right)$

즉, $\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{631}{3}\right)$이다.

$\therefore\ a+b=\dfrac{11}{3}+\dfrac{631}{3}=\dfrac{642}{3}=214$

26) [정답] 120

[해설]



그림에서 $a_n=2n-1(n\geq 1)$

$\sum_{n=1}^{24}\dfrac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\dfrac{500}{2n(2n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{24}\dfrac{125}{n(n+1)}$

$=125\sum_{n=1}^{24}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=120$

27) [정답] 392

[해설]

(i) $n=1$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_1=2\times(2^3-2^1)=12$

(ii) $n=2$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_2=2\times(2^3-2^2)=8$

(iii) $n\geq 3$일 때

세 점 $(n-2,2^{n-2})$, $(n-1,2^{n-1})$, $(n,2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n=2\times(2^n-2^{n-2})=3\times 2^{n-1}$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{k=1}^{7} a_k=12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$

$=20+3\times\dfrac{2^2(2^5-1)}{2-1}=20+12\times 31=392$

28) [정답] 392

[해설]

i) $n=1$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_1=2\times(2^3-2^1)=12$

(ii) $n=2$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_2=2\times(2^3-2^2)=8$

(iii) $n\ge 3$일 때

세 점 $(n-2,2^{n-2})$, $(n-1,2^{n-1})$, $(n,2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n=2\times(2^n-2^{n-2})=3\times 2^{n-1}$

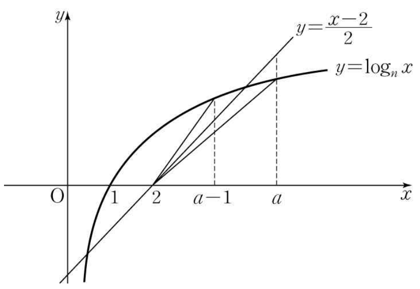
(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$$

$$=20+3\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1}=20+12\times 31=392$$

29) [정답] 86

[해설]



조건 (나)에서 두 점 $(2,0)$, $(a,\log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{\log_n a}{a-2}\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

3보다 큰 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠을 만족시키는 가장 작은 자연수 a는 다음 두 부등식을 동시에 만족시킨다.

$\log_n a\le\dfrac{a-2}{2}\ (\because\ a\ge 3)$ …… ㉡

$\log_n(a-1)>\dfrac{(a-1)-2}{2}$ …… ㉢

(i) $a=3$일 때

㉡에서 $\log_n 3\le\dfrac{1}{2}$, $n\ge 9$

㉢에서 모든 n에 대하여 $\log_n 2>0$

그러므로 $n\ge 9$인 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)=3$

(ii) $a=4$일 때

㉡에서 $\log_n 4\le 1$, $n\ge 4$

㉢에서 모든 n에 대하여 $\log_n 3>\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 4\le n<9\ (\because\ n\ge 4)$

그러므로 $4\le n<9$인 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)=4$

(i), (ii)에서

$$f(n)=\begin{cases}4 & (4\le n<9)\\ 3 & (n\ge 9)\end{cases}$$

$$f(n)=\begin{cases}4 & (4\le n<9)\\ 3 & (n\ge 9)\end{cases}$$

$$\therefore\ \sum_{n=4}^{30}f(n)=4\times 5+3\times 22=86$$

30) [정답] 48

[해설]

$P_n(a_n,\ b_n)(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 96)$이라 하면

$\angle P_nOP_{n+1}=\dfrac{\pi}{48}(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 95)$이다

동경 OP_n이 x축 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하면

점 P_n이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a_n=\cos\theta_n$이다.

그런데 $\angle P_nOP_{n+48}=\dfrac{\pi}{48}\times 48=\pi$이므로

$(a_{n+48})^2=\cos^2(\theta_n+\pi)=\cos^2\theta_n=(a_n)^2$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{96}a_n^2=2\sum_{n=1}^{48}a_n^2$이다.

또한, $\angle P_nOP_{n+24}=\dfrac{\pi}{48}\times 24=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$(a_n)^2+(a_{n+24})^2=\cos^2\theta_n+\cos^2\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos^2\theta_n+\sin^2\theta_n=1$$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{48}a_n^2=\sum_{n=1}^{24}\left\{(a_n)^2+(a_{n+24})^2\right\}=\sum_{n=1}^{24}1=24$이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{96}a_n^2=2\sum_{n=1}^{48}a_n^2=2\times 24=48$$

31) [정답] ①

[해설]

두 점 $B(1,\ 0)$, $C(2^m,\ m)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$이므로 점 D의 좌표는

$D\left(2^n,\ \frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\right)$

따라서, 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\le\frac{m}{2}$

$(2^n-1)^2\le 2^m-1$

이때 $n=1$이면

$1\le 2^m-1,\ 2\le 2^m$이므로 $a_1=1$

또한, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(2^n-1)^2\le 2^{2n}-1$

이므로 $2n\le m$이면 된다.

$\therefore a_1=1,\ a_n=2n(n\ge 2)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{10}2n$

$=1+\frac{9(4+20)}{2}=109$

32) [정답] ①

[해설]

함수 $y=\log_2 x$는 함수 $y=2^x$의 역함수이므로 점 Q_n의 좌표는 $(2^n,\ n)$, 직선 P_nQ_n의 방정식은

$x+y-2^n-n=0$이고,

원점 O와 직선 P_nQ_n 사이의 거리는 $\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}$,

선분 P_nQ_n의 길이는 $\sqrt{2}(2^n-n)\,(\because 2^n>n)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\times\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}(2^n-n)=\frac{4^n-n^2}{2}$

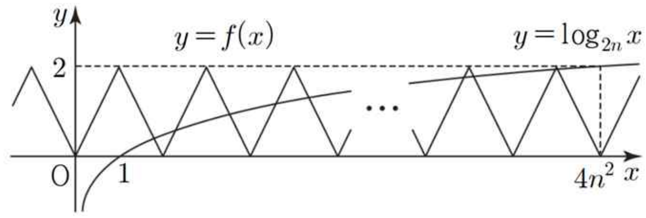
따라서

$2\sum_{n=1}^{5}S_n=\sum_{n=1}^{5}(4^n-n^2)=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{5\times6\times11}{6}=1309$

33) [정답] 553

[해설]

그림과 같이 곡선 $y=\log_{2n}x$는 점 $(4n^2,\ 2)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k,\ k+1]$에서 곡선 $y=\log_{2n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1\le k\le 4n^2-1$) $\therefore a_n=4n^2-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)=4\times\frac{7\times8\times15}{6}-7=553$

34) [정답] ⑤

[해설]

1)n이 홀수 일 때

$(n^2,2)$에서 마지막으로 만나고

$(n,1)$을 지나므로 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하면 n^2-n개 이다.

2)n이 짝수일 때

$(n,1)$에서 처음 만나고 $(n^2,2)$을 지나므로 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하면 n^2-n개 이다.

$\sum_{n=2}^{10}a_n=330$

35) [정답] ③

[해설]

선분 OA를 $2^n:1$로 내분하는 점 P_n의 좌표는

$\left(\frac{2^n}{2^n+1},\ 0\right)$이므로 $l_n=\frac{2^n}{2^n+1}$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{l_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2^n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{10}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{10}1+\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n=10+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=10+\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=11-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

36) [정답] 195

[해설]

원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}$의 제1사분면의 두 교점을

$P\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$, $Q\left(\frac{k}{a},\ a\right)\left(a>\frac{k}{a}\right)$라 하고

선분PQ의 중점을 $M\left(\frac{a+\frac{k}{a}}{2},\ \frac{a+\frac{k}{a}}{2}\right)$라 하자.

두 점 P, Q는 원 위의 점이므로 $a^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2=n^2$ ⋯⋯(1)

직사각형의 긴변이 짧은 변의 2배이면 $\overline{PQ}=\overline{OM}$이 성립한다

$$\sqrt{2}\left(a-\frac{k}{a}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{a+\frac{k}{a}}{2}\right)$$

정리하면 $a^2=3k$ ⋯⋯(2)

(2)를 (1)에 대입하면

$$3k+\frac{k}{3}=n^2$$

$$k=\frac{3n^2}{10}$$

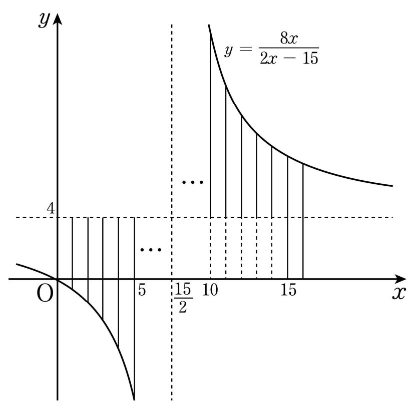
$$\therefore\ f(n)=\frac{3}{10}n^2$$

$$\sum_{n=1}^{12}f(n)=\frac{3}{10}\times\frac{12\times13\times25}{6}=195$$

37) [정답] 16

[해설]

곡선 $f(x)=4+\frac{60}{2x-15}$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{15}{2},\ 4\right)$에 대해 대칭이므로

$f(7)+f(8)=8$, $f(6)+f(9)=8$,

$f(5)+f(10)=8$, $f(4)+f(11)=8$,

$f(3)+f(12)=8$, $f(2)+f(13)=8$,

$f(1)+f(14)=8$

에서 $\sum_{n=1}^{14}a_n=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)=56$

또, $a_{15}=f(15)=8$

$$a_{16}=f(16)=4+\frac{60}{2\times16-15}=7+\frac{9}{17}<8$$

$a_{17}=f(17)>4$이므로 $\sum_{n=1}^{16}a_n<73<\sum_{n=1}^{17}a_n$이다.

따라서 m의 최댓값은 16이다.

38) [정답] 191

[해설]

선분과 곡선의 위치관계로부터

$\frac{1}{k}n^2\le2n\le\frac{1}{k}4n^2$, $\frac{n}{2}\le k\le2n$

(ⅰ) $n=2m-1$ (홀수)이면

$m\le k\le4m-2$, $a_n=a_{2m-1}=3m-1$

(ⅱ) $n=2m$ (짝수)이면

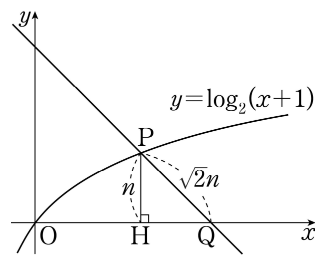
$m\le k\le4m$, $a_n=a_{2m}=3m+1$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{m=1}^{8}(3m-1)+\sum_{m=1}^{7}(3m+1)=100+91=191$$

39) [정답] ①

[해설]



점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{PH}=\overline{HQ}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{2}n$이므로

$\overline{PH}=n$, 즉 $b=n$이다.

점 $P(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{OQ}=\overline{OH}+\overline{HQ}$, $\overline{HQ}=n$이므로

$x_n=a+n$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n,\ 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\frac{0-b}{x_n-a}=-1$에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}$

$=\sqrt{b^2+b^2}$

$=\sqrt{2}b$

$\overline{PQ}=\sqrt{2}n$에서 $b=n$이다.

점 $P(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$에서

$a=2^n-1$

$x_n=a+b=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

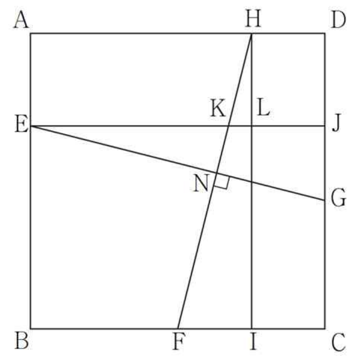
$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

40) [정답] ③

[해설]



점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고
점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자.

두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고,

선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하면

$\angle HKL=\angle NKE$이고, $\angle KLH=\angle ENK=90^\circ$

이므로 $\angle KEN=\angle LHK$

또한 $\overline{HI}=\overline{EJ}$이고 $\angle FIH=\angle GJE=90^\circ$ 이므로

두 삼각형 HFI, EGJ는 합동이다.

따라서 $\overline{EG}=\overline{HF}=\sqrt{4n^2+1}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{4n^2+1}$

$=\frac{4n^2+1}{2}=2n^2+\frac{1}{2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times10$

$=775$

41) [정답] ①

[해설]

(i) $n=1,\ 2$일 때,

$\frac{3}{n}>1$이므로 방정식 $\sin x=\frac{3}{n}$의 실근의 개수

$a_1=a_2=0$

(ii) $n=3$일 때,

$\frac{3}{n}=1$이므로 방정식 $\sin x=\frac{3}{n}$의 실근의 개수

$a_3 = 2$

(iii) $n \geq 4$일 때,

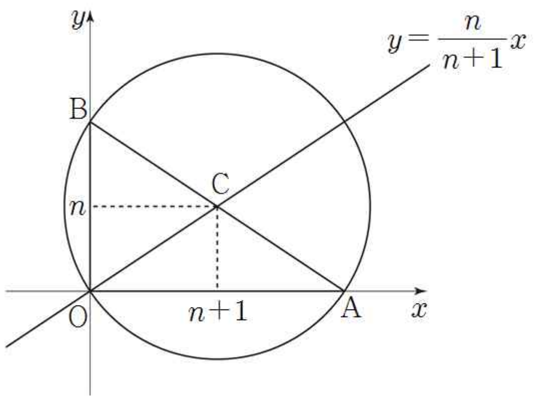
자연수 $k\,(k \geq 2)$에 대하여

$$a_n = \begin{cases} n & (n=2k) \\ n+1 & (n=2k+1) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{7} a_n = 0+0+2+4+6+6+8 = 26$$

42) [정답] ①

[해설]



$\angle\text{BOA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AB는 원의 지름이다.

원의 중심을 C라 하면, 점 C는 선분 AB의 중점이고, $\overline{\text{OB}}=2n$이므로 점 C의 y좌표는 n이다. 점 C는 직선 $y=\dfrac{n}{n+1}x$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $(n+1,\ n)$이다.

$$S_n = \frac{1}{2} \times 2n \times 2(n+1) = 2n(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{5}{11}$$

43) [정답] 169

[해설]

$0 \leq x < 2^{n+1}$일 때, $0 \leq \dfrac{\pi}{2^n}x < 2\pi$이므로 부등식

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\dfrac{1}{2}$의 해는 $\dfrac{2}{3}\pi \leq \dfrac{\pi}{2^n}x \leq \dfrac{4}{3}\pi$

즉, $\dfrac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \dfrac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\dfrac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \dfrac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고, $\dfrac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n$은 $\dfrac{2^2}{3} \leq x \leq \dfrac{2^9}{3}$이 자연수의 개수와 같다.

$$\frac{2^2}{3} = 1.333\cdots,\quad \frac{2^9}{3} = 170.666\cdots$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n = 170 - 1 = 169$

[참고]

(i) $n=1$일 때, $\dfrac{2^2}{3} \leq x \leq \dfrac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로

$a_1 = 1$

(ii) $n=2$일 때, $\dfrac{2^3}{3} \leq x \leq \dfrac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로

$a_2 = 3$

(iii) $n=3$일 때, $\dfrac{2^4}{3} \leq x \leq \dfrac{2^5}{3}$인 자연수 x는

6, 7, 8, 9, 10이므로 $a_3 = 5$

(iv) $n=4$일 때, $\dfrac{2^5}{3} \leq x \leq \dfrac{2^6}{3}$인 자연수 x는

11, 12, 13, $\cdots$, 21이므로 $a_4 = 11$

(v) $n=5$일 때, $\dfrac{2^6}{3} \leq x \leq \dfrac{2^7}{3}$인 자연수 x는

22, 23, 24, $\cdots$, 42이므로 $a_5 = 21$

(vi) $n=6$일 때, $\dfrac{2^7}{3} \leq x \leq \dfrac{2^8}{3}$인 자연수 x는

43, 44, 45, $\cdots$, 85이므로 $a_6 = 43$

(vii) $n=7$일 때, $\dfrac{2^8}{3} \leq x \leq \dfrac{2^9}{3}$인 자연수 x는

86, 87, 88, $\cdots$, 170이므로 $a_7 = 85$

44) [정답] ②

[해설]

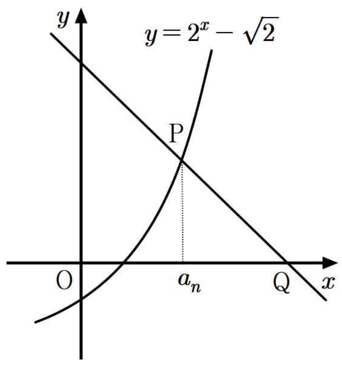
점 $P(a_n, 2^{a_n}-\sqrt{2})$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y=-x+a_n+2^{a_n}-\sqrt{2}$$

따라서 점 Q는

$(a_n+2^{a_n}-\sqrt{2},\ 0)$

$\overline{PQ}=n$이므로



$$\sqrt{(2^{a_n}-\sqrt{2})^2+(2^{a_n}-\sqrt{2})^2}=n$$

$$\sqrt{2}\,(2^{a_n}-\sqrt{2})=n$$

따라서 $2^{a_n}-\sqrt{2}=\dfrac{n}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\times 2^{a_n}=n+2$

$$2^{\frac{1}{2}+a_n}=n+2,\ \frac{1}{2}+a_n=\log_2(n+2)$$

$$\therefore a_n=\log_2(n+2)-\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{6}a_n=\log_2(3\times4\times\cdots\times8)-3$$

$=\log_2(2^6\times315)-3$

$=3+\log_2 315$

여기서 $2^8<315<2^9$이므로 $\log_2 315=8.\cdots$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{6}a_n$의 정수부분은 11이다.

45) [정답] ①

[해설]

로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)$과 직선 $x=n$이 한 점에서 만나므로

$$\frac{m}{2}<n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

지수함수 $y=|2^{-x}-m|$와 직선 $y=n$이 두 점에서 만나므로

$$n<m \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $n<m<2n$

따라서 만족하는 자연수 m의 값의 합 a_n은

$$a_n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$$

따라서 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3n(n-1)}$

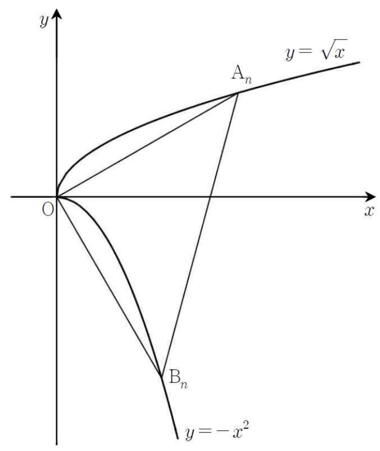
$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=5}^{10}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$$

46) [정답] 395

[해설]



위의 그래프에서 $\overline{OA_n}$의 기울기는 $\dfrac{1}{n}$, $\overline{OB_n}$의 기울기는 $-n$이므로 두 기울기는 수직이다.

또, $\overline{OA_n}=\overline{OB_n}$이므로 삼각형 OA_nB_n은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 OA_nB_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}(n^2+n^4)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{10}(1+n^2)$$

$=10+\dfrac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21$

$=395$

47) [정답] ②

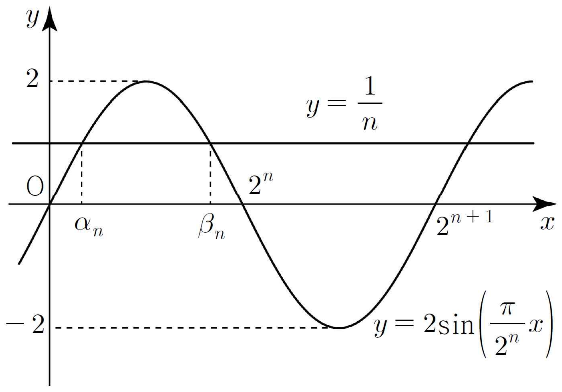
[해설]

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right)$라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2^n}}=2^{n+1}$,

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

자연수 n에 대하여 $0<\dfrac{1}{n}<2$이므로 $0\le x\le 2^{n+1}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{n}$은 서로 다른 두 점에서 만난다.



만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면

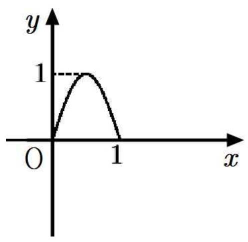
$\beta_n=2^n-\alpha_n$이므로 $x_n=\alpha_n+\beta_n=2^n$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}x_n=\sum_{n=1}^{6}2^n=\frac{2\times(2^6-1)}{2-1}=126$

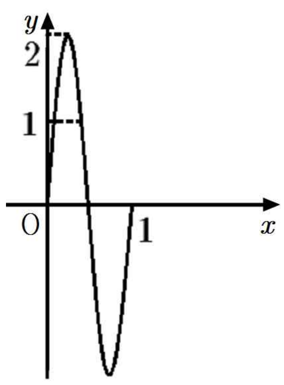
48) [정답] ⑤

[해설]

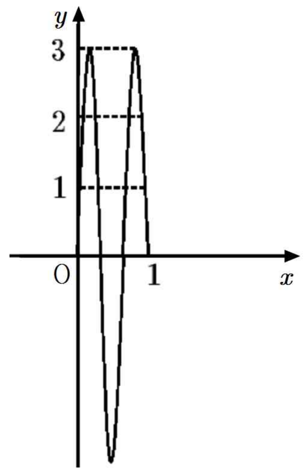
(i) $n=1$일 때, 1개



(ii) $n=2$일 때, 3개



(iii) $n=3$일 때, 10개



⋮

계속하여 규칙을 구하면

$n=1$일 때, 1개

$n=2$일 때, $1+2=3$개

$n=3$일 때, $2+4+4=10$개

$n=4$일 때, $2+4+4+4=14$개

$n=5$일 때, $3+6+6+6+6=3+(6\times4)=27$개

$n=6$일 때, $3+(6\times5)=33$개

$n=7$일 때, $4+(8\times6)=52$개

$n=8$일 때, $4+(8\times7)=60$개

$n=9$일 때, $5+(10\times8)=85$개

$n=10$일 때, $5+(10\times9)=95$개

⋮

$y=n\sin(n\pi x)$ $(0\le x\le 1)$위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=1+3+10+14+27+33+52+60+85+95$$
$$=380$$

49) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{P_nQ_n}=n-\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right)$, $\overline{Q_nR_n}=\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right)$이다.

$\overline{P_nQ_n}>\overline{Q_nR_n}$을 만족하는 n의 범위를 구하면

$n-\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right)>\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right)$

$n>\dfrac{1}{10}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right)$

n은 자연수이므로

$1>\dfrac{1}{10}\left(n+\dfrac{1}{3}\right)$, $n<10-\dfrac{1}{3}$

$$\therefore a_n=\begin{cases}\overline{Q_nR_n}=\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right) & (1\le n\le 9)\\ \overline{P_nQ_n}=n-\dfrac{1}{20}n\left(n+\dfrac{1}{3}\right) & (n\ge 10)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{20} n\left(n+\frac{1}{3}\right)+a_{10}$$
$$=\frac{1}{20}\times\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{1}{60}\times\frac{9\times10}{2}$$
$$+10-\frac{1}{20}\times10\left(10+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{119}{6}$$

50) [정답] ①

[해설]

조건 (다)에서 k, m이 자연수이므로 $0<a\le\frac{1}{2}$, $0<b\le\frac{1}{2}$를 만족한다. 따라서 조건 (나)에서 점 P와 점 $(a,\ b)$ 사이의 거리의 최솟값 $\frac{1}{2^n}$은 $\frac{1}{2^k}$ 또는 $\frac{1}{2^m}$과 같아야 한다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 다음과 같다.

(ⅰ) $k=n$일 때, $1\le m\le n$이므로 n가지

(ⅱ) $m=n$일 때, $1\le k\le n$이므로 n가지

(ⅲ) $k=m=n$일 때, 1가지

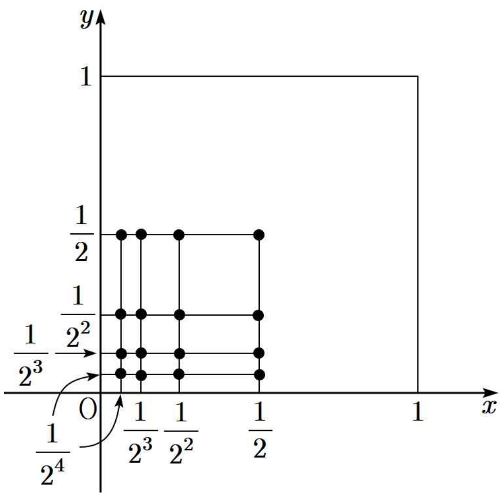
a_n의 값은 (ⅰ)+(ⅱ)−(ⅲ)이므로

$a_n=2n-1$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=100$$

[다른 풀이]

n의 값에 따라서 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하면 다음과 같다.



(ⅰ) $n=1$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

즉 집합 X_1의 원소의 개수를 $a_1=1$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로

$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$,$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

즉 집합 X_2의 원소의 개수를 $a_2=3$

(ⅲ) $n=3$일 때,

$\left(\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^m}\right)$과 정사각형 ABCD의 변 위를 움직이는 점 P의 거리의 최솟값이 $\frac{1}{8}$이므로

$\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{2}\right)$,$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)$,$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$

즉 집합 X_3의 원소의 개수를 $a_2=5$

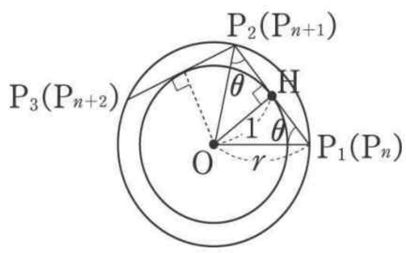
⋮

따라서 집합 X_n의 원소의 개수를 $a_n=2n-1$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=100$$

51) [정답] ④

[해설]



그림에서 $\angle \mathrm{OP_1H}=\theta$라고 하면

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=2\theta$, $\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OP_1}}}=\frac{1}{r}$이다.

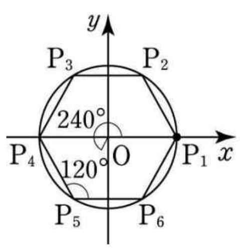
ㄱ. $r>\sqrt{2}$이면 $\sin\theta=\frac{1}{r}<\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\theta<45^\circ$

$\therefore\ \angle \mathrm{P_1P_2P_3}=2\theta<90^\circ$ (참)

ㄴ. $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이면 $\sin\theta=\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\theta=60^\circ$이므로

$\angle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}=60^\circ$, $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=120^\circ$이다.

따라서 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이면 한 내각의 크기가 120°이므로 정육각형이 된다.



그러므로 그림에서와 같이 P_5의 좌표는 P_2의 좌표의 원점 대칭이다.

$$P_2(x,\ y)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos60^\circ,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin60^\circ\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$$

$\therefore\ P_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -1\right)$ (거짓)

ㄷ. $\angle P_1P_2P_3=100^\circ$ 이면, $\angle P_nOP_{n+1}=80^\circ$ 이다.

따라서 $80\times n=360\times m$인 최소의 양의 정수 m, n은 각각 $n=9$, $m=2$이다.

그러므로 $P_1=P_{10}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

52) [정답] 34

[해설]

$(n+6)^2=n^2+12n+36$

$\qquad=6(2n+6)+n^2$

이므로 $a_{n+6}=a_n$이 성립한다.

또, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=1$, $a_6=0$이므로

$a_n=4$를 만족시키는 자연수 n은

2 또는 $n=6k\pm2$(k는 자연수)이다.

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은

2, 4, 8, 10, $\cdots$, 94, 98, 100의 34개다.

53) [정답] 142

[해설]

198행의 흰 돌에는 198이 적혀 있으므로 그 수를 구하면 132개다.

n행의 검은 돌에 198이 적혀있다면 주변의 4개 또는 6개 돌의 숫자의 합이다.

4개 숫자의 합이라면 $n-1+n+2(n+1)=198$이므로 만족하는 자연수 n이 존재하지 않는다.

6개 숫자의 합이라면 $2(n-1)+2n+2(n+1)=198$이므로 $n=33$이다.

33행에는 검은 돌이 12개 있고 양 끝의 검은 돌을 제외하면 가능한 경우는 10개다.

따라서 198이 적혀 있는 돌의 개수는 $132+10=142$개다.

54) [정답] ②

[해설]

다음과 같이 자연수를 나열하여 3의 배수와 5의 배수를 지우고 남는 수가 수열 $\{a_n\}$의 각 항이므로

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	$\cdots$					

$a_{n+8}=a_n+15\ \therefore\ a_{100}=a_4+15\times12=187$

55) [정답] ①

[해설]

주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면

1, 2, ❸, 4, 5, ❻, $\cdots$, 44, ㊺

$$\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{45}k-\sum_{k=1}^{15}3k=\frac{45\times46}{2}-3\times\frac{15\times16}{2}=675$$

56) [정답] 171

[해설]

$[x]=n$이라 두면

$n\le x<n+1$

$\Rightarrow n^3\le x^3<(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$

$\Rightarrow n^2\le\frac{x^3}{n}\le n^2+3n+3<n^2+3n+3+\frac{1}{n}$

$\therefore\ [x]=n$일 때, $\frac{x^3}{[x]}$가 자연수가 되는 x는 총

$n^2+3n+3-(n^2)+1=3n+4$개가 존재한다.

그런데 $1\le x<10$이므로 $[x]$값은 $1\le[x]<10$이므로

1, 2, $\cdots$, 9까지 총 9개가 존재한다.

$\therefore\ x$의 개수 $=\sum_{n=1}^{9}(3n+4)=3\cdot45+4\cdot9=171$

57) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\log_2(x^2+x+1)-\log_2 x=\log_2\frac{x^2+x+1}{x}$

$\qquad=\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)$

에서 $x\ge1$일 때 $x+1+\frac{1}{x}\ge3$이므로

$f(x)=\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)>1$

따라서 $[f(x)]=\left[\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\right]=k$($k$는 자연수)라 하면

$k\le\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)<k+1$

$2^k \le x+1+\frac{1}{x} < 2^{k+1}$

$\therefore\ 2^k-1 \le x+\frac{1}{x} < 2^{k+1}-1$

$k=1$일 때, $1 \le x+\frac{1}{x} < 3$이므로 자연수 x는 1, 2의 2개

$k=2$일 때, $3 \le x+\frac{1}{x} < 7$이므로 자연수 x는 3, 4, 5, 6의 4개

$k=3$일 때, $7 \le x+\frac{1}{x} < 15$이므로 자연수 x는 7, 8, $\cdots$, 14의 8개

$\vdots$

$k=9$일 때, $511 \le x+\frac{1}{x} < 1023$이므로 자연수 x는 511, 512, $\cdots$, 1022의 512개

이때, $k=[f(x)]$이므로

$[f(1)]+[f(2)]+\cdots+[f(1022)]$

$=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+9\times2^9$

$S=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+9\times2^9 \quad \cdots\cdots㉠$

이라 하면

$2S=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+8\times2^9+9\times2^{10} \cdots\cdots㉡$

이므로 ㉠−㉡을 하면

$-S=2+2^2+2^3+\cdots+2^9-9\times2^{10}=\frac{2(2^9-1)}{2-1}-9\times2^{10}$

$\therefore\ S=-\frac{2(2^9-1)}{2-1}+9\times2^{10}$

$=9\times2^{10}-2^{10}+2=8\times2^{10}+2=2^{13}+2$

58) [정답] 675

[해설]

$\sum_{n=1}^{50} n\left(\sin\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{n}{2}\pi\right)^n$

$=1+2-3+4+5+6-7+8$

$+\cdots+41+42-43+44+45+46-47+48+49+50$

$=\sum_{n=1}^{50} n-2\sum_{n=1}^{12}(4n-1)=1275-600=675$

59) [정답] ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{10} f(2^k)=\sum_{k=1}^{10} 2^k=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$

$2^n \le k < 2^{n+1}$일 때, $n \le \log_2 k < n+1$이므로

$f(\log_2 k)=n$이다.

이때, $f(\log_2 k)=n$인 자연수 k의 개수는 $2^{n+1}-2^n=2^n$이다.

$2=2^1,\ 1024=2^{10}$이므로

$\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=\sum_{n=1}^{9} n\cdot2^n+10$

$S=\sum_{n=1}^{9} n\cdot2^n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+9\cdot2^9 \cdots\cdots㉠$

이라 하면

$2S=\sum_{n=1}^{9} n\cdot2^{n+1}$

$=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+9\cdot2^{10} \quad \cdots\cdots㉡$

㉠−㉡에서 $-S=\sum_{n=1}^{9}2^n-9\cdot2^{10}$

$S=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+9\cdot2^9$

$-2S=\quad 1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+9\cdot2^{10}$

$-S=\quad 2^2+2^3+\cdots+2^9-9\cdot2^{10}$

$\therefore\ S=9\cdot2^{10}-\sum_{n=1}^{9}2^n$

$=9\cdot2^{10}-\frac{2(2^9-1)}{2-1}$

$=8\cdot2^{10}+2$

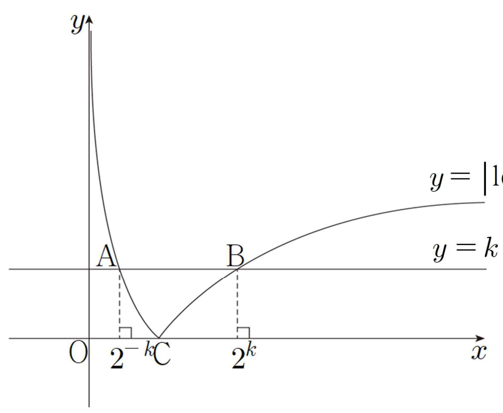
$=8194$

$\therefore \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=8194+10=8204$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(2^k)+\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=2046+8204=10250$

60) [정답] ④

[해설]



$A(2^{-k},\ k)$, $B(2^k,\ k)$이므로 x좌표가 2^m(m은 정수)의 꼴인 점의 개수는 $-k$부터 k까지 정수의 개수이다. 따라서 $a_k=k-(-k)+1=2k+1$이다. 그러므로

$\sum_{k=1}^{15} a_k=\sum_{k=1}^{15}(2k+1)=2\times\frac{15\times16}{2}+15=255$이다.

[다른 풀이]

$k=1$일 때, $\mathrm{A}(2^{-1},\ 1)$, $\mathrm{B}(2^{1},\ 1)$이고 $a_1=3$이다.

$k=2$일 때, $\mathrm{A}(2^{-2},\ 2)$, $\mathrm{B}(2^{2},\ 2)$이고 $a_2=5$이다.

k가 증가할수록 양 끝점이 두 개씩 늘어나므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이다. 따라서 $a_k=2k+1$이다. 그러므로

$\sum_{k=1}^{15} a_k=\sum_{k=1}^{15}(2k+1)=2\times\frac{15\times16}{2}+15=255$이다.

61) [정답] ①

[해설]

$1\le n\le 15$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16\le n\le 30$을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1\le n\le 15k$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1,2,3,\cdots$)

a_{16}은 $16\le n\le 30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16}a_n$은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{30}n-\sum_{n=1}^{10}3n-\sum_{n=1}^{6}5n+\sum_{n=1}^{2}15n$

$=240$

[다른 풀이]

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$이고

$k\,(k=1,2,3,\cdots,14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$

$\sum_{n=1}^{8}a_n=1+2+4+7+8+11+13+14=60$

$\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{16}a_n=2\sum_{n=1}^{8}a_n+15\times8=2\times60+120$

$=240$

62) [정답] **65**

[해설]

정수 $k(k\ge0)$에 대하여

$10^k\le x<10^{k+1}$에서 $\log x$의 정수부분과 소수부분은

$f(x)=k,\ g(x)=\log x-k$

이므로

$y=\{f(x)+1\}g(x)=(k+1)(\log x-k)$가 $y=n$과 만나는 점의 x좌표는

$(k+1)(\log x-k)=n$

$\log x=k+\frac{n}{k+1}$ (단, $n<k+1$)

$\therefore x=10^{k+\frac{n}{k+1}}$

$n=1$일 때,

$x=10^{1+\frac{1}{2}},\ 10^{2+\frac{1}{3}},\ 10^{3+\frac{1}{4}},\ \cdots$

$\therefore a_1=10^{1+\frac{1}{2}}$

$n=2$일 때,

$x=10^{2+\frac{2}{3}},\ 10^{3+\frac{2}{4}},\ 10^{4+\frac{2}{5}},\ \cdots$

$\therefore a_2=10^{2+\frac{2}{3}}$

$n=3$일 때,

$x=10^{3+\frac{3}{4}},\ 10^{4+\frac{3}{5}},\ 10^{5+\frac{3}{6}},\ \cdots$

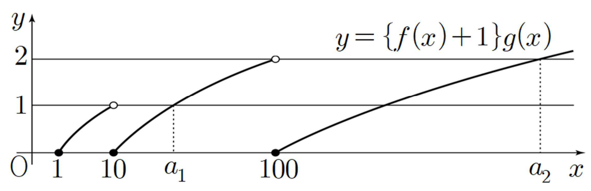
$\therefore a_3=10^{3+\frac{3}{4}}$

⋮

$\therefore a_n=10^{n+\frac{n}{n+1}}$

$\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n+\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{10}\left(\log 10^{n+\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)$

$=\sum_{n=1}^{10}(n+1)=65$



63) [정답] **67**

[해설]

i) $1 \le k \le 3$일 때, $1 \le 2^k < 10$이므로

$\log 2^k$의 정수부분은 0이고,

$f(2^k)=\log 2^k = k\log 2$

ii) $4 \le k \le 6$일 때, $10 \le 2^k < 10^2$이므로

$\log 2^k$의 정수부분은 1이고,

$f(2^k)=\log 2^k - 1 = k\log 2 - 1$

iii) $7 \le k \le 9$일 때, $10^2 \le 2^k < 10^3$이므로

$\log 2^k$의 정수부분은 2이고,

$f(2^k)=\log 2^k - 2 = k\log 2 - 2$

iv) $k=10$일 때, $10^3 \le 2^k < 10^4$이므로

$\log 2^k$의 정수부분은 3이고,

$f(2^k)=\log 2^k - 3 = k\log 2 - 3$

따라서

$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) = \sum_{k=1}^{10} k\log 2 - (1\times3+2\times3+3\times1)$

$=55\log 2 - 12$

이므로 $m=55$, $n=12$

따라서

$m+n=67$

64) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\frac{4}{3}=1.333\cdots$ 이므로

$0 \le k \le 66;\left[x+\frac{k}{100}\right]=1,\quad 67 \le k \le 99;\left[x+\frac{k}{100}\right]=2$

이므로 $f\left(\frac{4}{3}\right)=67\times1+33\times2=134$

ㄴ. $n=2m$ (짝수) 이면

$\left[x+\frac{n}{2}\right]=\left[x+m+\frac{k}{100}\right]=m+\left[x+\frac{k}{100}\right]$이므로

$f\left(x+\frac{n}{2}\right)=100m+f(x)=50n+f(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$n=2m-1$ (홀수) 이면

$\left[x+\frac{n}{2}\right]=\left[x+m-\frac{1}{2}+\frac{k}{100}\right]$의 값은

$0 \le k \le 49 : m-1+\left[x+\frac{k+50}{100}\right]$

$50 \le k \le 99 : m+\left[x+\frac{k-50}{100}\right]$이므로

$f\left(x+\frac{n}{2}\right)=50(m-1)+50m+f(x)=50n+f(x)\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서

$\therefore\ f\left(x+\frac{n}{2}\right)=f(x)+50n$ (참)

ㄷ. $\frac{n}{100} \le x < \frac{n+1}{100}$일 때, $f(x)=n$이므로

$f(f(x)-1)=f(n-1)=100n-100$

$nf(x)-1=n^2-1$

식에 대입하면

$100n-100=n^2-1$

$n^2-100n+99=0$

$n=1,\ 99$

$\therefore$ 2개 (거짓)

65) [정답] **282**

[해설]

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+cn)-(n-1)^2-c(n-1)$

$=2n-1+c$

수열 $\{a_n\}$을 30번째항까지 나열하면

$1+c,\ 3+c,\ 5+c,\ \cdots,\ 55+c,\ 57+c,\ 59+c$

(i) $c=3k$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 $c\ne 3k$꼴이므로 성립하지 않는다.

(ii) $c=3k+1$인 경우

$b_{20}=57+c$이므로 $57+c=199$

$c=142$

따라서 성립한다.

(iii) $c=3k+2$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $b_{20}=199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합은 $142+140=282$

66) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$이고 $f(x+1)=f(x)$를 만족하므로

(ⅰ) $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 즉 $x=$(자연수)일 때, $f(x)=1$

(ⅱ) $x\neq$(자연수)일 때, $f(x)=3$

또, $\sqrt{k}$가 자연수가 되려면 k는 완전제곱수이므로

$k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=1$

$k\neq1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}\{k\times f(\sqrt{k})\}$$
$$=\frac{1}{3}(1\times1+4\times1+9\times1+16\times1)$$
$$+\frac{1}{3}(2\times3+3\times3+5\times3+\cdots+20\times3)$$
$$=10+(2+3+5+6+\cdots+20)$$
←( )안에 1, 4, 9, 16이 빠짐
$$=10+(1+2+3+\cdots+20)-(1+4+9+16)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}k-20$$
$$=\frac{20\times21}{2}-20$$
$$=190$$

67) [정답] 245

[해설]

A_8의 마지막 수는

$1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}=204$

이므로 A_9의 처음 수는 205이다.

A_9의 마지막 수는

$1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=204+81=285$

따라서 A_9의 정중앙에 적힌 수는

$\frac{205+285}{2}=\frac{490}{2}=245$

68) [정답] 48

[해설]

상용로그 $\log A$의 정수부분 n과 소수부분 α가 방정식 $4x^2-13x+\beta=0$의 두 근이므로

$\log A=n+\alpha=\frac{13}{4}$이다.

n은 정수, $0\le\alpha<1$이므로, $n=3$, $\alpha=\frac{1}{4}$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}\left[\frac{400\alpha}{n^k}\right]=\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{100}{3^k}\right]$$
$$=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]+0+\cdots$$
$$=48$$

69) [정답] 650

[해설]

나머지 빈 칸을 주어진 규칙에 따라 채워보면 각 행의 수들은 다음과 같은 규칙대로 나열됨을 알 수 있다.

제2행: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), $\cdots$, (50, 50)

제3행: (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), $\cdots$, (50, 0)

제4행: (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), $\cdots$, (25, 25, 25, 25)

제5행: (1, 0, 1, 0), (2, 0, 2, 0), $\cdots$, (25, 0, 25, 0)

따라서 구하는 제 5행의 100개의 수들의 합은

$$\sum_{n=1}^{25}2n=25\times26=650$$

70) [정답] 100

[해설]

$n=2$일 때, $\{3,\ 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$, 즉 $f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8\}$, 즉 $f(3)=3$

$n=4$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ 3^7\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ 3^{10},\ 3^{12}\}$, 즉 $f(4)=5$

$\vdots$

$n=k$일 때, $\{3,\ 3^3,\ \cdots,\ 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ \cdots,\ 3^{4(k-1)}\}$, 즉 $f(k)=2k-3$

따라서

$\sum_{n=2}^{11} f(n) = \sum_{n=2}^{11} (2n-3)$

$= 1+3+5+ \cdots +19$

$= \dfrac{10 \times (1+19)}{2} = 100$

71) [정답] ⑤

[해설]

$(0,\ 1) : 3$

$(0,\ 2) : 3+11$

$(0,\ 3) : 3+11+19$

$\vdots$

$(0,\ 10) : 3+11+19+ \cdots +75 = 390$

72) [정답] 69

[해설]

$f(a) = n$이라 하면

$n = f(a) \le f(\sqrt[10]{10}\,a) \le f(\sqrt[10]{10^2}\,a) \le f(\sqrt[10]{10^3}\,a) \le \cdots$

$\le f(\sqrt[10]{10^9}\,a) \le f(\sqrt[10]{10^{10}}\,a) = n+1$

이고 $\sum_{k=1}^{10} f(\sqrt[10]{10^k}\,a) = 94$이므로

$f(\sqrt[10]{10}\,a) = f(\sqrt[10]{10^2}\,a) = f(\sqrt[10]{10^3}\,a) = \cdots = f(\sqrt[10]{10^6}\,a) = 9$

$f(\sqrt[10]{10^7}\,a) = f(\sqrt[10]{10^8}\,a) = f(\sqrt[10]{10^9}\,a) = f(\sqrt[10]{10^{10}}\,a) = 10$

이다. 그러므로

$9 \le \dfrac{1}{10} + \log a < 10$ ……①

$9 \le \dfrac{2}{10} + \log a < 10$ ……②

$\vdots$

$9 \le \dfrac{6}{10} + \log a < 10$ ……⑥

$10 \le \dfrac{7}{10} + \log a < 11$ ……⑦

$\vdots$

$10 \le \dfrac{10}{10} + \log a < 11$ ……⑩

이다. 이 10개의 부등식은 ⑥, ⑦만 연립하면 충분하다.

따라서 $9.3 \le \log a < 9.4$이므로 $0.3 \le g(a) < 0.4$이고

$30 \le 100g(a) < 40$이다.

그러므로 $M+m = 39+30 = 69$이다.

73) [정답] 20

[해설]

$\sum_{k=1}^{n} k\log a_k = n^2 - n \ (n \ge 1)$

$b_n = n\log a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$라 하면 $S_n = n^2 - n$이므로

$b_1 = S_1 = 0$

$b_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2 (n \ge 2)$

$\therefore\ b_n = n\log a_n = 2n - 2 (n \ge 1)$

$\therefore\ \log a_n = 2 - \dfrac{2}{n} (n \ge 1)$

$n=1$ 또는 $n=2$일 때, $\log a_n$의 소수부분은 0이므로

$m \ge 3$이다. 이때 $0 < \dfrac{2}{m} < 1$이므로

$\log a_m = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{m}\right)$

에서 $\log a_m$의 소수부분은 $1 - \dfrac{2}{m}$이다.

$1 - \dfrac{2}{m} = 0.9$

$\therefore\ m = 20$

74) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $b_n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$이므로 $b_8 = 36$ (참)

ㄴ. $c_{4n} = (1+2)+(5+6)+(9+10)+\cdots$

$+\{(4n-3)+(4n-2)\}$

$= \sum_{k=1}^{n} (8k-5)$ (참)

ㄷ. $b_{4n} = a_{4n} + c_{4n}$이 성립하므로

$a_{4n} = b_{4n} - c_{4n} = 4n^2 + 3n$

$\sum_{n=1}^{10} a_{4n} = \sum_{n=1}^{10} (4n^2+3n) = 1705$ (거짓)

75) [정답] ②

[해설]

원 C_n의 중심을 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$x_1 = 1$

$x_2 = x_3 = 1-(1+2)$

$x_4 = x_5 = 1-(1+2)+(3+4)$

$x_6 = x_7 = 1-(1+2)+(3+4)-(5+6)$

$x_8 = x_9 = 1-(1+2)+(3+4)-(5+6)+(7+8)$

$\vdots$

정수 m에 대하여

$-\{(4m-3)+(4m-2)\}+\{(4m-1)+4m\}=4$이다.

$\therefore\ x_{4k}=1+4k$

$y_1=y_2=1$

$y_3=y_4=1-(2+3)$

$y_5=y_6=1-(2+3)+(4+5)$

$y_7=y_8=1-(2+3)+(4+5)-(6+7)$

$\vdots$

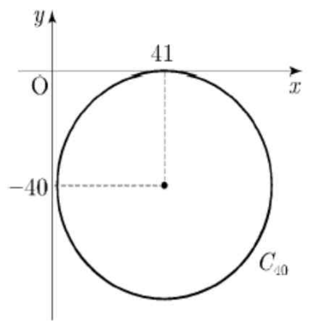
정수 m에 대하여

$\{(4m-4)+(4m-3)\}-\{(4m-2)+(4m-1)\}=-4$이다.

$\therefore y_{4k}=-4k\ (\because\ 1=0+1)$

$\therefore (x_{4k},\ y_{4k})=(1+4k,\ -4k)$

원 C_{40}는 중심이 $(41,\ -40)$이고 반지름이 40 인 원이므로 원의 내부는 모두 제4사분면에 포함된다.



따라서 원 C_n의 중심이 원 C_{40}의 내부에 있으려면 원 C_n의 중심은 제4사분면에 있어야 한다.

즉, $n=4k$ (k는 자연수)이어야 한다.

이때, 원 C_n의 중심과 원 C_{40}의 중심과의 거리는 원 C_{40}의 반지름 40보다 작다.

따라서 구하는 원의 개수는

점 $(1+4k,\ -4k)$과 점 $(41,\ -40)$의 거리가 40보다 작도록 하는 자연수 k의 개수이다.

$\sqrt{(4k-40)^2+(-4k+40)^2}<40$에서

$(k-10)^2<50$

$10-\sqrt{50}<k<10+\sqrt{50}$

$7<\sqrt{50}<8$이므로

위 부등식을 만족시키는 k는 3, 4, $\cdots$, 17이다.

따라서 구하는 원의 개수는 15개다.

76) [정답] ⑤

[해설]

모든 자연수 k에 대하여

$g(x^k)=k\times g(x)-a_k$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.

조건 (가)에서

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=5g(x)+\sum_{k=1}^{5} a_k$$

$$g(x^{10})+2=10g(x)+a_{10}+2$$

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$$

$$5g(x)=a_{10}-\sum_{k=1}^{5} a_k+2$$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ (\because\ 0\le g(x)<1)\ \cdots\cdots$ ㉠

모든 자연수 k에 대하여

$f(kx)\ge f(x)$

이다. 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{3} f(kx)=3f(x)$$

이므로 $f(3x)=f(x)$이어야 한다.

$\log 3x=f(x)+g(x)+\log 3$

이므로

$f(3x)=f(x)$이려면 $g(x)+\log 3<1$이어야 한다.

$\therefore\ g(x)<1-\log 3=0.5229\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$

(ⅰ) $g(x)=0$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=0$이고 $g(x^{10})+2=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)\ne g(x^{10})+2$$

(ⅱ) $g(x)=\frac{1}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+0=2$이고

$g(x^{10})+2=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$$

(ⅲ) $g(x)=\frac{2}{5}$이면

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+0=2$$

$g(x^{10})+2=2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에서 $g(x)=\frac{1}{5}$ 또는 $g(x)=\frac{2}{5}$

$1<x<10^5$이므로 $0 \le f(x)<5$이다.

따라서 x가 조건을 만족시킬 때,
$\log x=f(x)+g(x)$

이다. (단, $f(x)=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고 $g(x)=\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$)

$$\therefore\ \log A=\sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{1}{5}\right\}+\sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{2}{5}\right\}$$
$=11+12$
$=23$

77) [정답] 65

[해설]

$\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x),\ g(x)$라 할 때,

$f(m)\le f(x),\ g(m+5f(m))\le g(x)$을 만족시키는 자연수 m의 개수를 $p(x)$라 하면

$\sum_{k=1}^{10} p(2k)=p(2)+p(4)+\cdots+p(20)$으로부터 $f(m)$은 $\log 20$의 정수부분 보다 작거나 같아야 하므로 0 또는 1이 됨을 알 수 있다.

1) $f(m)=0$일 때,

$0\le f(x),\ g(m)\le g(x)$을 만족하는 한 자리 자연수 m은

$x=2$일 때, $m=1,\ 2$

$x=4$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=6$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$x=8$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

$x=10$일 때, $m=1$

$x=12$일 때, $m=1$

$x=14$일 때, $m=1$

$x=16$일 때, $m=1$

$x=18$일 때, $m=1$

$x=20$일 때, $m=1,\ 2$

2) $f(m)=1$일 때,

$1\le f(x),\ g(m+5)\le g(x)$을 만족하는 두 자리 자연수 m은

$x=10$일 때, $m=95$

$x=12$일 때, $m=95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=14$일 때, $m=95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=16$일 때, $m=10,\ 11,\ 95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=18$일 때, $m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=20$일 때, $m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 95,\ 96,\ 97,$ $98,\ 99$

1), 2)로부터

$\sum_{k=1}^{10} p(2k)=2+4+6+8+1+1+1+1+2+1$

$+5+5+7+9+11=65$

78) [정답] 23

[해설]
모든 자연수 k에 대하여
$g(x^k)=k\times g(x)-a_k$
을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.
조건 (가)에서

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=5g(x)+\sum_{k=1}^{5} a_k$이고

$g(x^{10})+2=10g(x)+a_{10}+2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$에서

$5g(x)=a_{10}-\sum_{k=1}^{5} a_k+2$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ (\because\ 0\le g(x)<1)$ …… ㉠

모든 자연수 k에 대하여
$f(kx)\ge f(x)$
이다. 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{3} f(kx)=3f(x)$

이므로 $f(3x)=f(x)$이어야 한다.
$\log 3x=f(x)+g(x)+\log 3$이므로
$f(3x)=f(x)$이려면 $g(x)+\log 3<1$이어야 한다.
$\therefore\ g(x)<1-\log 3=0.5229$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$

(ⅰ) $g(x)=0$이면

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = 0\text{이고 } g(x^{10})+2=2\text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) \neq g(x^{10})+2$$

(ii) $g(x)=\frac{1}{5}$이면

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+0=2\text{이고}$$

$g(x^{10})+2=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10})+2$$

(iii) $g(x)=\frac{2}{5}$이면

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+0=2$$

$g(x^{10})+2=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10})+2$$

(i), (ii), (iii)에서 $g(x)=\frac{1}{5}$ 또는 $g(x)=\frac{2}{5}$

$1<x<10^5$이므로 $0 \le f(x) < 5$이다.

따라서 x가 조건을 만족시킬 때,

$\log x = f(x)+g(x)$

이다. $\left(\text{단, } f(x)=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\text{이고 } g(x)=\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

$$\therefore\ \log A = \sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{1}{5}\right\}+\sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{2}{5}\right\}$$

$$=11+12$$

$$=23$$

79) [정답] 184

[해설]

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i\ (1 \le i \le 15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}31^2-62\sum_{i=1}^{15}a_i+\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{30\times31\times61}{6}$$

조건 (나)에 의해

$$2\sum_{i=1}^{15} a_i^2+15\times31^2-62\times264=5\times31\times61$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2=\frac{1}{2}(5\times31\times61-15\times31^2+62\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(5\times61-15\times31+2\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(-5\times32+2\times264)$$

$$=31\times184$$

따라서 $\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2=184$

[참고]

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 $(1,\ 30)$, $(2,\ 29)$, $\cdots$, $(15,\ 16)$이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 찾은 집합 A의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.

$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$

80) [정답] 120

[해설]

$\sum_{k=n}^{2n} a_k=0$이므로 $a_n+a_{2n}=0$이다.

따라서 $4032=(3n-2)d$이다.

$4032=2^7\times3^2\times7$에서

$(3n-2)$는 1, 2^2, 2^4, 2^6과 7 그리고 그들의 곱으로 만들어지므로 $(3n-2,\ d)$의 가능한 순서쌍은

$(1, 4032)$, $(4, 1008)$, $(7, 576)$, $(16, 252)$, $(28, 144)$, $(64, 63)$, $(112, 36)$, $(448, 9)$

이고, 이때 모든 d의 합은 6120

$\therefore$ 6120을 1000으로 나눈 나머지 $=120$

81) [정답] ②

[해설]

자연수 n에 대하여 $m \neq 2^{n-1}$일 때

$\log_2 m$, $\log_4 m$

의 값은 유리수가 아니다.

따라서 $f(1)=0$이고, $m=2^{n-1}\ (n \ge 2)$일 때,

$$f(m)=f(2^{n-1})=\log_4 2^{n-1}=\frac{n-1}{2}$$

은 유리수이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_1=0,\ a_n=\dfrac{n-1}{2}\ (n\ge 2)$

즉 $a_n=\dfrac{n-1}{2}\ (n\ge 1)$이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=\dfrac{n(n-1)}{4}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k>50$에서

$\dfrac{n(n-1)}{4}>50$

$n(n-1)>200$

$n=14$일 때,

$n(n-1)=14\times13=182$

$n=15$일 때,

$n(n-1)=15\times14=210$

이므로 $n\ge15$일 때 부등식이 성립한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 15이다.

[참고]

자연수 m은 $m\ne 2^{n-1}$(n은 자연수)일 때

음이 아닌 정수 k와 1이 아닌 홀수 p에 대하여

$m=2^k\times p$

로 나타내어진다.

만약 $\log_2 m$의 값이 유리수라 가정하면

$\log_2 m=\log_2(2^k\times p)$

$=k+\log_2 p$

즉 $\log_2 p$의 값이 유리수이어야 한다.

이때 $\log_2 p=\dfrac{b}{a}$ (a와 b는 서로소인 자연수) 라 하면

$\log_2 p=\dfrac{b}{a}$에서 $2^{\frac{b}{a}}=p$

$2^b=p^a$ ⋯⋯ ㉠

이때 ㉠의 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

따라서 $\log_2 p$의 값이 유리수가 아니므로 $\log_2 m$의 값도 유리수가 아니다.

82) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에 의해 $a_n=-36+(n-1)d\ne0$이므로 $(n-1)d\ne36$이다. d는 자연수이므로, d는 36의 양의 약수가

아니다. 또한 조건 (나)에 의해

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m\{-72+(m-1)d\}}{2}=0$에서

$-72+(m-1)d=0$이므로

$(m-1)d=72$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=0$인 m이 존재하기 위해서 d가 72의 양의 약수이어야 한다.

그러므로 d는 36의 양의 약수가 아닌 72의 양의 약수이므로 모든 d의 값의 합은 $8+24+72=104$이다.

83) [정답] ②

[해설]

함수 $f:X\to X$가 일대일 대응이 아니라고 가정하면

합성함수 $g\circ f:X\to X$는 일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.

이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로 함수 f는 일대일 대응이어야 한다.

마찬가지 이유로 함수 g도 일대일 대응이다.

두 일대일 대응 $f,\ g$에 대하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}f(n)=1+2+\cdots+9=45,$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}g(n)=1+2+\cdots+9=45$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}f(n)+\sum_{n=1}^{9}g(n)$

$=45+45=90$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하므로

$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}k=9k$이므로

$9k=90$ 에서 $k=10$

모든 $x \in X$ 에 대하여

$f(x)+g(x)=10$ …… ㉠

조건 (가)에서

$f(1)=8$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $g(8)=1$

$g(8)=1$ 이므로 ㉠에 의하여 $f(8)=9$

$f(8)=9$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $g(9)=8$

$g(9)=8$ 이므로 ㉠에 의하여 $f(9)=2$

$f(9)=2$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $g(2)=9$

$g(2)=9$ 이므로 ㉠에 의하여 $f(2)=1$

$f(2)=1$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $g(1)=2$

$f(5)=a$ 라 하면

조건 (나)에 의하여 $g(a)=5$

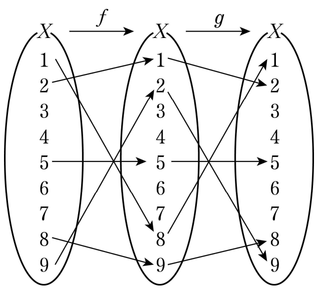
$g(a)=5$ 이면 ㉠에 의하여 $f(a)=5$

$f(a)=5$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(5)=a$

이때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$ 이므로 $a=5$

즉 $f(5)=5$ 이고 ㉠에 의하여 $g(5)=5$

이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



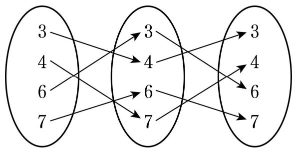
조건 (가)에 의하여 $f(3) \neq 6$ 이므로

(ⅰ) $f(3)=3$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(3)=3$
㉠에 의하여 $g(3)=7$ 이므로 이 경우는 불가능하다.

(ⅱ) $f(3)=7$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(7)=3$
$g(7)=3$ 이면 ㉠에 의하여 $f(7)=7$
함수 f 가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.

(ⅲ) $f(3)=4$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(4)=3$
$g(4)=3$ 이면 ㉠에 의하여 $f(4)=7$
$f(4)=7$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(7)=4$
$g(7)=4$ 이면 ㉠에 의하여 $f(7)=6$
$f(7)=6$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(6)=7$
$g(6)=7$ 이면 ㉠에 의하여 $f(6)=3$
$f(6)=3$ 이면 조건 (나)에 의하여 $g(3)=6$

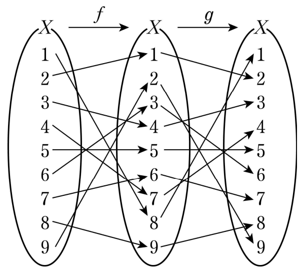
(ⅲ)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



따라서

$(f \circ f \circ f)(7)=f(f(6))$
$=f(3)$
$=4$

[참고] 함수 f 와 g 는 다음과 같다.



84) [정답] 8

[해설]

점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{25} = \frac{1}{25}\left\{2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n\right\}$$

$$= \frac{n^2}{25} = \left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n 이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$ 이 짝수이면 $\frac{n}{5}$ 도 짝수이므로

$\frac{n}{5}=2m$ (m 은 자연수)

에서 $n=10m$

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$,

즉 $n=20$ 일 때이므로 점 A_{20} 이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$ (k 는 자연수)일 때 점 P의 x 좌표는 k 이고, 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$ 이므로 점 A_{20} 의 x 좌표는 8이다. 즉, $a=8$

85) [정답] ⑤

[해설]

$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{11}-a_{12}|$

$=$(11개의 a_i의 합)$-$(11개의 a_j의 합)

인데, 1, 2, 3, $\cdots$, 11, 12 가 각각 최대 2번씩 22개의 수들이다.

그 중 (11개의 a_i의 합)이 최대인 경우는

$12+12+11+11+10+10+9+9+8+8+7=107$

(11개의 a_i의 합)이 최소인 경우는

$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6=36$

이다. 따라서 구하는 최댓값은 $107-36=71$이다.

86) [정답] 17

[해설]

$$\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}=\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}>\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

$$\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}=\frac{2}{\sqrt{2k+3}+\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

$17=19-2<\sqrt{361}-\sqrt{3}<S_{179}<S_{180}<\sqrt{361}-\sqrt{1}$
$=19-1=18$

$17<S_{180}<18$이므로 구하는 정수부분은 17이다.

87) [정답] ④

[해설]

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42\,S_7=T_7$이므로

7이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\ge 0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

조건 (나)에 의하여

6이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|\,a_{n+1}\,|=0$

$a_{n+1}\le 0$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0\le a_7\le 0$이므로 $a_7=0$ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서

$a=12$, $d=-2$

$\therefore a_n=14-2n$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$\therefore S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-S_{15}=114$

88) [정답] ④

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
등차중항의 성질에 의하여 $a_6+a_8=2a_7$
조건(가)에 의하여 $a_7=2a_7$, $a_7=0$
(i) $d>0$인 경우
$n\ge 7$인 자연수 n에 대하여
$S_n+T_n<S_{n+1}+T_{n+1}$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $d=0$인 경우
모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$이므로
$S_n+T_n=0$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $d<0$이고,
$a_7=a+6d=0$, $a=-6d>0$이므로
7 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\ge 0$, $S_7=T_7$
조건(나)에 의하여 $S_7=T_7=42$

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=-21d=42$

$a=12$, $d=-2$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$
따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

89) [정답] ②

[해설]
$a_1=-45<0$이고 $d>0$이므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$a_m < 0,\ a_{m+3} > 0$

즉, $-a_m = a_{m+3}$에서 $a_m + a_{m+3} = 0$

따라서

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)=0$

$(2m+1)d=90$ …… ㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90=2\times3^2\times5$이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2} > -100$$

$n\{-90+(n-1)d\} > -200$ …… ㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은 $18+30=48$

90) [정답] ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $|S_n| = |b| \geq 14$

b가 자연수이므로 $b \geq 14$

$$S_n = \frac{n\{2b+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$

$= -n(2n-b-2)$

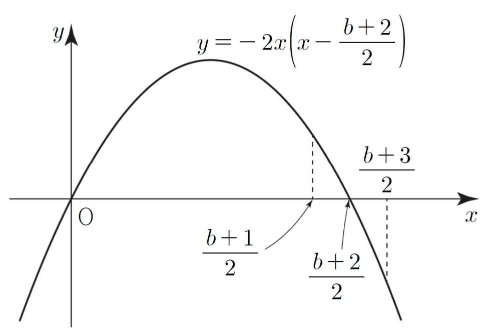
$= -2n\left(n-\frac{b+2}{2}\right)$

(i) b가 짝수인 경우

$S_{\frac{b+2}{2}} = 0$이 되어 조건 $|S_n| \geq 14$를 만족시키지 않는다.

(ii) b가 홀수인 경우

함수 $y = -2x\left(x-\frac{b+2}{2}\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$|S_n| \geq 14$이므로 $S_{\frac{b+1}{2}} \geq 14$, $S_{\frac{b+3}{2}} \leq -14$를 동시에 만족시켜야 한다.

$$S_{\frac{b+1}{2}} = -2\times\frac{b+1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 14$$

$b \geq 27$ …… ㉠

$$S_{\frac{b+3}{2}} = -2\times\frac{b+3}{2}\times\frac{1}{2} \leq -14$$

$b \geq 25$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b \geq 27$

(i), (ii)에 의하여

$b_1 = 27,\ b_2 = 29,\ b_3 = 31,\ \cdots$이므로

$b_m = 2m+25$ (m은 자연수)

따라서

$$\sum_{m=1}^{10} b_m = \sum_{m=1}^{10}(2m+25)$$

$= 2\times\frac{10\times11}{2}+250$

$=360$

91) [정답] ①

[해설]

$n^2+n \leq \frac{1}{2}n+5$에서

$2n^2+n-10=(2n+5)(n-2)\leq 0$

따라서 $n \leq 2$일 때, $n^2+n \leq \frac{1}{2}n+5$가 성립한다.

따라서 $A_n \subset B_n\,(n=1,2)$이고 $B_n \subset A_n\,(n=3,4,\cdots)$이다.

따라서 $A_n - B_n = \varnothing\,(n=1,2)$이므로 $a_n=0$이고

$n \geq 3$일 때, $a_n = n(A_n)-n(B_n) = n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]$이다.

그런데

n이 짝수일 때, $\left[\frac{1}{2}n+5\right] = \frac{1}{2}n+5$

n이 홀수일 때, $\left[\frac{1}{2}n+5\right] = \frac{1}{2}n+5-\frac{1}{2}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=3}^{20}\left(n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$$

$$= \sum_{n=3}^{20}(n^2+n) - \sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$$

이때, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$이므로

$$\sum_{n=3}^{20}(n^2+n) = \left\{\sum_{n=1}^{20}(n^2+n) - \sum_{n=1}^{2}(n^2+n)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(20\cdot21\cdot22 - 2\cdot3\cdot4)$$

$$= \frac{1}{3}(9240-24) = 3072$$

이고

$$\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)=\sum_{n=3}^{20}\left(\frac{1}{2}n+5\right)-9\cdot\frac{1}{2}$$

($\because$ $3\sim20$까지 자연수 중 홀수는 9개)

$$=\left(\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{2}n-\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{2}n\right)+18\times5-9\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\left(105-\frac{3}{2}\right)+90-\frac{9}{2}=189$$

이므로 $\sum_{n=1}^{20}a_n=3072-189=2883$

92) [정답] 505

[해설]

곡선 $y=\frac{6^n}{x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는 6^n의 양의 약수의 개수와 같다.

$6^n=2^n\times3^n$이므로 $a_n=(n+1)^2$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n+1)^2$

$$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+2n+1)$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+10$$

$$=505$$

93) [정답] 427

[해설]

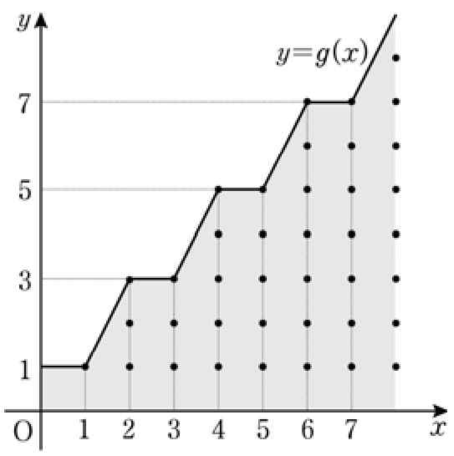
닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수 $g(x)=x+f(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<1)\\ 2x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여

$$g(x+2)=(x+2)+f(x+2)$$
$$=x+2+f(x)$$
$$=g(x)+2$$

이므로 제 1사분면에서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 그림에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점으로 나타내어진다. 또, $a=n$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $g(n)$과 같다. 따라서

$a_1=g(1)+g(2)+g(3)=1+3+3=7$,

$a_2=g(2)+g(3)+g(4)=3+3+5=11$,

$a_3=g(3)+g(4)+g(5)=3+5+5=13$,

$a_4=g(4)+g(5)+g(6)=5+5+7=17$,

$a_5=g(5)+g(6)+g(7)=5+7+7=19$,

$a_6=g(6)+g(7)+g(8)=7+7+9=23$,

$a_7=g(7)+g(8)+g(9)=7+9+9=25$,

$a_8=g(8)+g(9)+g(10)=9+9+11=29$

$\vdots$

여기서

$a_3-a_1=a_5-a_3=a_7-a_5=\cdots=6$,

$a_4-a_2=a_6-a_4=a_8-a_6=\cdots=6$

이므로

자연수 n에 대하여 a_{2n-1}과 a_{2n}을 추론하면

$a_{2n-1}=a_1+6(n-1)=7+6(n-1)=6n+1$

$a_{2n}=a_2+6(n-1)=11+6(n-1)=6n+5$

따라서

$$\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{7}a_{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{8}(6n+1)+\sum_{n=1}^{7}(6n+5)$$

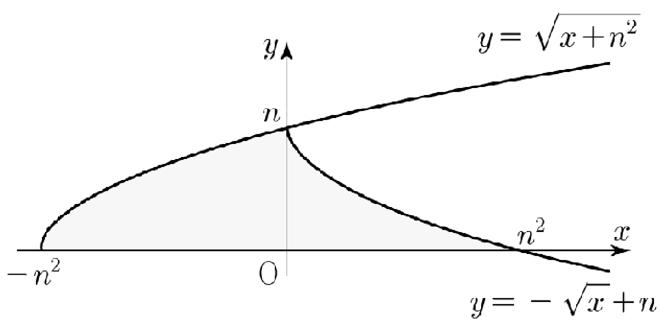
$$=\left(6\times\frac{8\times9}{2}+1\times8\right)+\left(6\times\frac{7\times8}{2}+5\times7\right)$$

$$=427$$

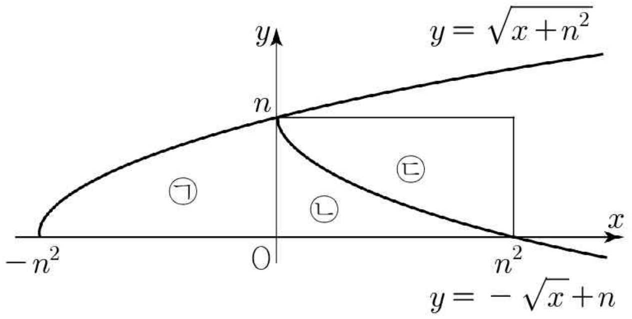
94) [정답] 300

[해설]

함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-n^2$만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는 <그림 1>과 같다.



<그림 1>



<그림 2>

이때, 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 n^2만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로

<그림2>와 같이 함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역 ㉠의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프와 두 직선 $x=n^2$, $y=n$으로 둘러싸인 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

그러므로 영역 ㉠과 영역 ㉡의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 영역 ㉡ 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

x축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, n^2이므로 (n^2+1)개

y축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, n이므로 $(n+1)$개

$\therefore\ a_n=(n^2+1)(n+1)=n^3+n^2+n+1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}(n^3+n^2+n+1)$$
$$=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2+\left(\frac{5\times6\times11}{6}\right)+\left(\frac{5\times6}{2}\right)+5$$
$$=300$$

[다른 풀이]

<그림1>에서 y의 값에 대한 점의 개수는 아래의 표와 같다.

n	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	합
1	3	1					4
2	9	5	1				15
3	19	13	7	1			40
4	33	25	17	9	1		85
5	51	41	31	21	11	1	156

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=4+15+40+85+156=300$$

95) [정답] **12**

[해설]

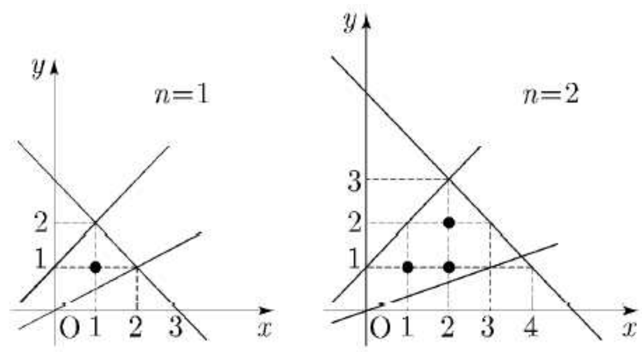
방정식 $x+1=-x+2n+1$에서 $x=n$

따라서 직선 $y=x+1$과 직선 $y=-x+2n+1$의 교점은 $(n,\ n+1)$이다.

또, 직선 $y=-x+2n+1$의 x절편은 $2n+1$이고

직선 $y=\dfrac{x}{n+1}$는 두 점 $(n+1,\ 1)$과 $(2n+2,\ 2)$를 지난다.

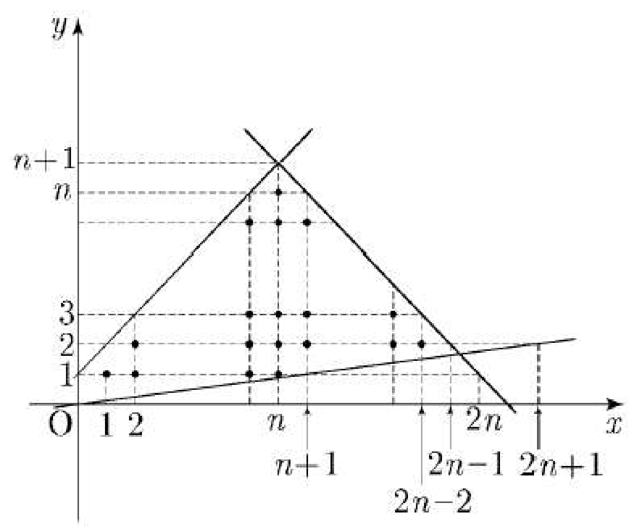
(ⅰ) $n=1,\ 2$일 때



위의 그림에서

$a_1=1,\ a_2=3$

(ⅱ) $n\geq3$일 때



위의 그림과 같이 직선 $y=-x+2n+1$과

$y=-x+2n+1$는 $2n-1<x<2n$에서 만난다.

$\therefore a_n=(1+2+\cdots+n)+\{(n-2)+(n-3)+\cdots+1\}$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$

$=n^2-n+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=n^2-n+1\,(n\geq1)$이므로 $a_n=133$에서

$n^2-n+1=133,\qquad n(n-1)=132=12\cdot11$

$\therefore n=12$

96) [정답] 725

[해설]

기울기가 1이고 y절편이 양수인 원 $x^2+y^2=\dfrac{n^2}{2}$의 접선의 방정식은 $y=x+\dfrac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1^2}$

$\therefore \quad y=x+n$

직선 $y=x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A_n(-n, 0)$, $B_n(0, n)$이고, 점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y=-2x-2n$이므로 $C_n(0, -2n)$ 삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은

$n=1$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 4, x좌표가 -1인 점의 개수는 1이므로 $a_1=1+4=5$

$n=2$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 7,

x좌표가 -1인 점의 개수는 4,

x좌표가 -2인 점의 개수는 1이므로 $a_2=1+4+7=12$

$n=3$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 10, x좌표가 -1인 점의 개수는 7,

x좌표가 -2인 점의 개수는 4,

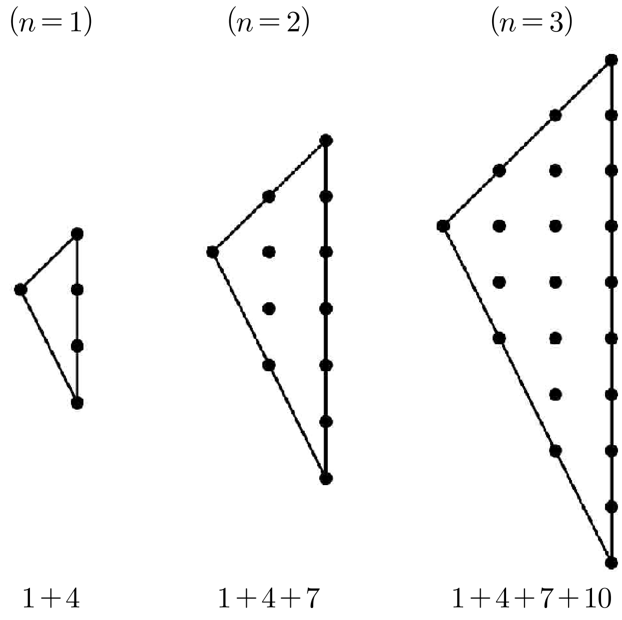
x좌표가 -3인 점의 개수는 1이므로 $a_3=1+4+7+10=22$

$\vdots$

$$\therefore \ a_n=1+\{4+7+10+\cdots+(3n+1)\}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{5}{2}\times\frac{10\times11}{2}+1\times10$$
$$=725$$



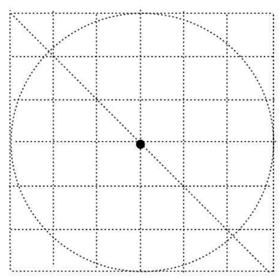
97) [정답] ④

[해설]

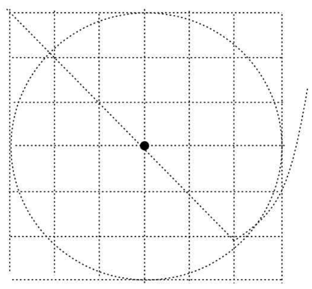
각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $n\le 7$일 때,

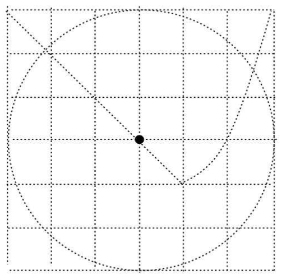
대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로 $A_n-B_n=0$



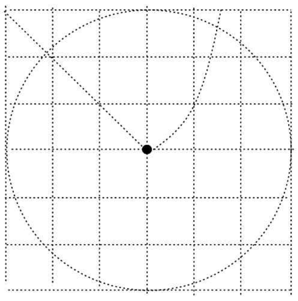
(ii) $n=8$일 때, 아래 그림에서 대칭성을 이용하여 조사하면 $A_8-B_8=0$



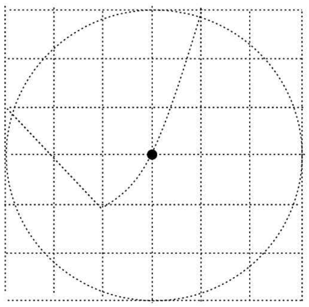
(iii) $n=9$일 때, 아래 그림에서 $A_9-B_9=12-8=4$



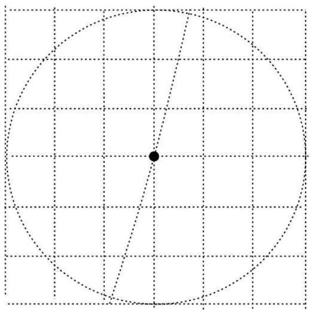
(iv) $n=10$일 때, 아래 그림에서 $A_{10}-B_{10}=17-4=13$



(ⅴ) $n=11$일 때, 아래 그림에서 $A_{11}-B_{11}=15-7=8$



(ⅵ) $12 \le n \le 20$일 때, 대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수와 같으므로 $A_n-B_n=0$



따라서 구하는 값은 $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)=4+13+8=25$

98) [정답] 164

[해설]

직선 AB의 방정식은

$$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$$

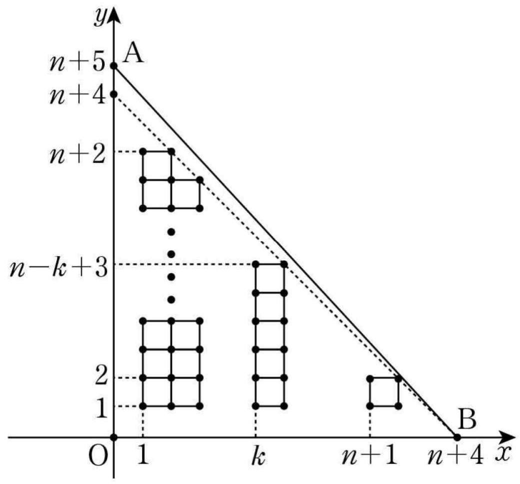
자연수 a에 대하여 $x=a$일 때

$$y=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5$$

$$=m+5-\left(1+\frac{1}{n+4}\right)a$$

$$=n+5-a-\frac{a}{n+4}$$

$0<a<n+4$일 때, $0<\frac{a}{n+4}<1$이므로 $x=a$일 때, y좌표가 자연수인 점의 개수는 $n+4-a$이다.



두 자연수 a, b에 대하여 삼각형 OAB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(a+1,\ b)$, $(a+1,\ b+1)$, $(a,\ b+1)$이라 하면

$a=1$일 때, $1 \le b \le n+1$이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$이다.

$a=2$일 때, $1 \le b \le n$이므로 정사각형의 개수는 n이다.

$a=3$일 때, $1 \le b \le n-1$이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$이다.

⋮

$a=n+1$일 때, $b=1$이므로 정사각형의 개수는 1이다.

따라서

$$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8\right)$$

$$=164$$

99) [정답] ⑤

[해설]

점 A$(a,\ b)$에 대하여 점 B$(c,\ d)$가

$\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n이하의 자연수이므로

$b < \frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b = k$일 때, $a + b \le n$을 만족시키는 자연수

a의 개수는 $n - 2k$이다.

2이상의 자연수 m에 대하여

(i) $n = 2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는

1부터 $\boxed{m-1}$까지이므로

$$T_{2m} = \sum_{k=1}^{\boxed{m-1}} (2m - 2k)$$

$$= 2m(m-1) - m(m-1)$$

$$= \boxed{m^2 - m}$$

(ii) $n = 2m + 1$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 m까지이므로

$$T_{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} (2m + 1 - 2k)$$

$$= m(2m+1) - m(m+1)$$

$$= \boxed{m^2}$$

(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_m = 614$

따라서 $f(m) = m - 1$, $g(m) = m^2 - m$, $h(m) = m^2$

이므로 $f(5) + g(6) + h(7) = 4 + 30 + 49 = 83$