

[나승민/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사 연습(1/2) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

공부에 진심

수학에 감각을 더하다.

instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

내일부터 열심히.

hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.

smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.

유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

2. 세 수 $\frac{21}{12}$, x , $\frac{39}{12}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,

x 의 값은? [2점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

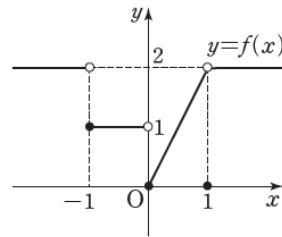
3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3) = 80, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3b_k) = 200$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 250 ② 275 ③ 300
 ④ 325 ⑤ 350

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

5. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_{\sqrt{2}}a = \log_5b = \log_24$ 일 때,
 $\log_3(a+b)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

7. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2x^2 - 1}{x-1} = f(1)$ 을

만족시킬 때, $f(1) + f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 7 ③ 6
 ④ 5 ⑤ 4

6. $-1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x}$ 의 최댓값을 M ,

최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치는

$$x(t) = -t^3 + 2t^2 + at$$

이다. $t=4$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 28 ③ 24
 ④ 20 ⑤ 16

9. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - ax + a$ 에 대하여

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한

모든 정수 a 의 값의 합은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

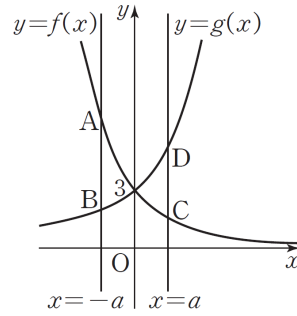
10. 두 함수 $f(x) = \frac{3}{2^x}$, $g(x) = 2^{x+1} + 1$ 이 있다. 그림과

같이 직선 $x = -a$ 가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의

그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x = a$ 가

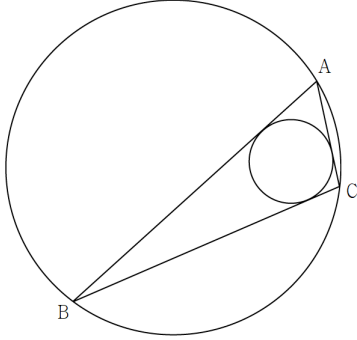
두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각

C, D라 하자. $2\overline{AB} + \overline{CD} = 54$ 일 때, 양수 a 의 값은? [4점]



- ① $-1 + \log_2 5$ ② $\log_2 7$ ③ $-1 + 2\log_2 3$
 ④ $\log_2 5$ ⑤ $1 + \log_2 7$

11. 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다. $\overline{AB} + \overline{AC}$ 의 값은? [4점]



- ① 16 ② 17 ③ 18
- ④ 19 ⑤ 20

12. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 = 2$
 ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여
 $(a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 4 \sum_{k=1}^n a_k$ 이다.
 ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2n$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구간 $[0, 4)$ 에서 $f(x) = ax(x-3)^2$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x-4) + 3$ 이다.

곡선 $y = f(x)$ 에 대하여 $\int_{-8}^8 |f(x)| dx$ 의 값은?
 (단, a 는 상수이다.) [4점]
 ① 46 ② 48 ③ 50
 ④ 52 ⑤ 54

14. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

열린 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$,
 열린 구간 $(2, \infty)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이다.

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x+1)f(x) - \int_{-1}^x f(t) dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $g'(-1) = 0$
 ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄷ. $0 < k < g(2)$ 인 실수 k 에 대하여 방정식 $g(x) = k$ 는 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 집합

$$A = \{n \mid n = 2^k, k \text{는 음이 아닌 정수}\}$$

와 상수 d 에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $n \in A$ 이면 $a_{2n} = 2a_n$ 이다.

(나) $n \notin A$ 이면 $a_{n+1} = a_n + d$ 이다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k = 218$ 일 때, a_{60} 의 값은? [4점]

- ① 44 ② 48 ③ 52
 ④ 56 ⑤ 60

단답형

16. $\sqrt[3]{4 \times 4^{\frac{1}{6}}}$ 의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 2t)dt$ 에 대하여,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h)}{h}$ 의 값을 구하여라. [3점]

18. 곡선 $y = x^3 + 10$ 에 접하는 직선이 점 $(0, -6)$ 를 지날 때, 이 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하자. 이때 $m - n$ 의 값을 구하여라. [3점]

19. 1이 아닌 양수 a, b 와 실수 x, y 에 대하여

$$a^2 b^3 = 1,$$

$$b \times a^x = a^4 \times b^y$$

가 성립한다. $3x + 2y$ 의 값을 구하여라. [3점]

20. 첫째항이 26이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 -6 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_m b_m > 0$$

이 되게 하는 자연수 m 의 개수가 2가 되게 하는 모든 실수 d 값의 범위는 $p \leq d < q$ 또는 $r < d \leq s$ 이다. $20pr$ 의 값을 구하여라. (단, $p < q < r < s$ 이다.) [4점]

21. 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2m\pi}{k} \mid m \text{은 모든 자연수} \right\}$$

로 정의하자. $A_6 \subset A_n$ 이 되도록 하는 50 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라. [4점]

22. 두 양수 a, k 에 대하여 $f(x) = kx^2(x-2a)^2$ 이고, 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 각각

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a \text{ 또는 } x \geq 2a) \\ -f'(x) & (a < x < 2a) \end{cases},$$

$$h(x) = \int_a^x g(t) dt$$

이다. 방정식 $f(x) = h(x)$ 의 모든 근을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것을 α, β, γ 라 할 때,

$$\gamma - \alpha = 2 + 2\sqrt{2},$$

$$f(\beta) = 4$$

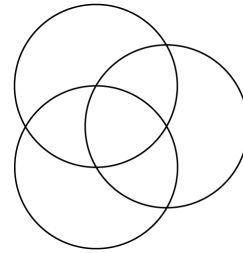
가 성립한다. $f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_3P_4$ 의 값은? [2점]

- ① 45 ② 54 ③ 63
④ 72 ⑤ 81

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 3개의 원이 있다. 이 3개의 원은 각각 다른 2개의 원의 중심을 지난다. 3개 원의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

25. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = 5P(B) = 1$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

26. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$
 ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

27. 자연수 p 에 대하여 다항식 $(x+p)^8$ 의 전개식에서 x^k 의 계수를 a_k 라 하자. 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_3 중 최댓값이 a_2 일 때, a_6 의 값은? [3점]

- ① 126 ② 168 ③ 252
 ④ 336 ⑤ 504

28. 수직선 위의 점 P는 원점에서 출발하여 동전을 한 번 던질 때마다 앞면이 나오면 양의 방향으로 2만큼, 뒷면이 나오면 음의 방향으로 1만큼 움직이는 시행을 반복한다. 7번의 시행 후 점 P가 A(5)의 눈에 도착할 때, 4번의 시행 점 P가 후 B(2)의 눈에 위치하였을 확률은? [4점]

- ① $\frac{14}{35}$ ② $\frac{16}{35}$ ③ $\frac{18}{35}$
 ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{22}{35}$

단답형

29. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $f(1) < f(3) < f(5) < f(6)$

(나) $f(4) \leq f(2)$

30. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $a+b+c$ 는 $d+e$ 의 배수이다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n(n+1)}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

24. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{6}\right)$ 를 만족시키는 α 에 대하여

$\tan\alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $-2 - \sqrt{3}$ ② $-3 - \sqrt{3}$ ③ $-4 - \sqrt{3}$
④ $-5 - \sqrt{3}$ ⑤ $-6 - \sqrt{3}$

25. 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = x^3 + x$ 에 대하여
 합성함수 $h(x) = (g \circ f)(x)$ 가

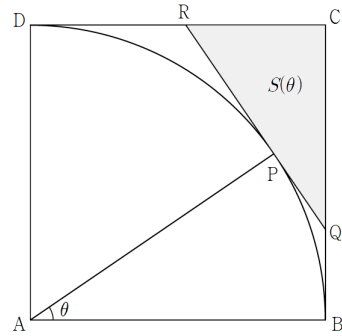
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - f(x) - 1}{x - 1} = 6$$

일 때, $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
- ④ 2 ⑤ 4

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와
 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가
 있다. 원 C 위의 점 P에서의 접선이 두 선분 BC, CD와
 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때,
 삼각형 CQR의 넓이는 $S(\theta)$ 이다. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]



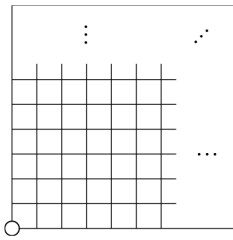
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
- ④ 2 ⑤ 4

27. 돌을 놓을 수 있는 눈 $2n \times 2n$ 개가 있는 바둑판에 다음 단계에 따라 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 올려 놓는다.

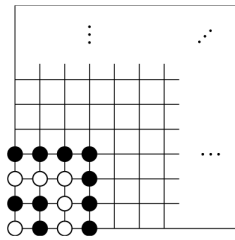
[단계1] [그림1]과 같이 바둑판 한쪽 구석의 눈에 흰 돌을 올려놓는다.

[단계2] 놓인 돌들의 바깥쪽에 돌들을 놓아 한 변의 길이가 1 늘어난 정사각형이 되도록 한다. 이때 전 단계에서 흰 돌을 놓았다면 검은 돌을, 검은 돌을 놓았다면 흰 돌을 놓는다.

[그림2]는 [단계2]를 세 번 반복한 것이다. 이와 같이 [단계2]를 바둑판의 $2n \times 2n$ 개의 눈이 가득 찰 때까지 반복했을 때, 검은 바둑돌의 개수를 a_n , 흰 바둑돌의 개수를 b_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\}$ 의 값은? [3점]



[그림1]



[그림2]

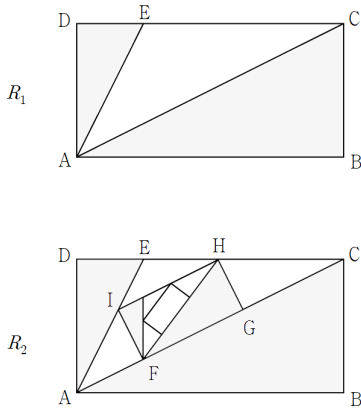
- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ④ $\sqrt{2}$
- ⑤ 2

28. 함수 $f(x) = \ln x$ 와 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y = x$ 가 이루는 예각이 t 인 점 P의 x 좌표 중 가장 작은 것을 $g(t)$, 가장 큰 것을 $h(t)$ 라 하자. $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 인 실수 a 가 $\tan a = \frac{1}{2}$ 를 만족시킬 때, $g'(a) \times h'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{25}{2}$
- ② $-\frac{100}{9}$
- ③ -10
- ④ $-\frac{100}{11}$
- ⑤ $-\frac{25}{3}$

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 CD를 3:1로 내분하는 점을 E라 하고, 두 삼각형 ABC, ADE를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 AC 위의 두 점 F, G, 선분 CE 위의 점 H, 선분 AE 위의 점 I를 꼭짓점으로 하고 $\overline{FG}:\overline{FI}=2:1$ 인 직사각형 FGHI를 그리고, 그림 R_1 과 같은 방법으로 직사각형 FGHI에 두 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 이차함수 $P(x)$ 와 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = P(x)e^{ax}$$

와 함수 $g(x)$ 는 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$(x^2 - 1)g(x) = f(x)$$

일 때, 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$
- (나) 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

$60f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4, 2)$, $\vec{b}=(-1, 1)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

24. 두 점 $F(-3, 0)$, $F'(3, 0)$ 을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 장축의 길이와 단축의 길이의 곱이 80일 때, a^2 의 값은? [3점]
- ① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

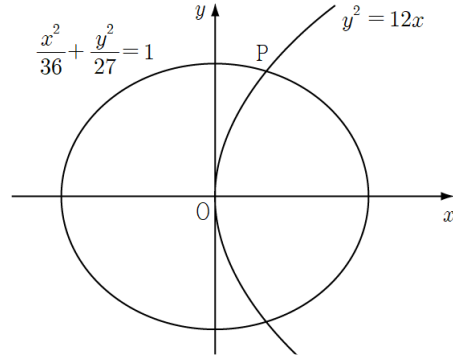
25. 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 24$ 일 때, $|\overrightarrow{AD}|$ 의 값은? [3점]

- ① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{29}$
- ④ $\sqrt{30}$ ⑤ $\sqrt{31}$

26. 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ 과

포물선 $y^2 = 12x$ 의 두 교점 중 한 점을 P라 하자.

$\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 값은? [3점]



- ① 35 ② 38 ③ 41
- ④ 44 ⑤ 47

27. 두 곡선

$$y = \frac{1}{16}x^2, \quad y^2 = x - a$$

에 동시에 접하는 직선의 개수가 2일 때, a 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

28. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD와 점 P가

$$|9\overrightarrow{AP} - 6\overrightarrow{BP} - 5\overrightarrow{DP}| = 4$$

를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

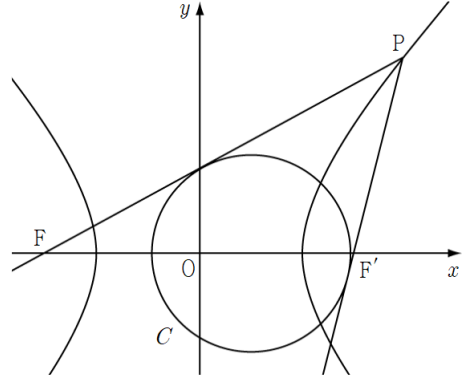
단답형

29. 원 C 위의 세 점 A, B, C 는

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 64, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

을 만족시킨다. 원 C 위를 움직이는 점 P, Q 에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값이 48일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값을 구하여라. [4점]

30. 그림과 같이 두 초점이 $F(-6, 0), F'(6, 0)$ 인 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 두 직선 PF, PF' 은 모두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 15$ 의 접선이다. $\overrightarrow{PF} \times \overrightarrow{PF'}$ 의 값을 구하여라. [4점]



[나승민/한성은 모의고사 6월 연습(1/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	①	03	①	04	⑤	05	③
06	④	07	②	08	①	09	④	10	②
11	③	12	⑤	13	②	14	⑤	15	③
16	2	17	9	18	18	19	14	20	16
21	408	22	72						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	④	26	①	27	③
28	③	29	315	30	205				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	①	25	④	26	②	27	③
28	②	29	531	30	45				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	⑤	25	②	26	①	27	④
28	①	29	72	30	128				

COMMENT 11

사인법칙에서 $a = 12$ 이다. 삼각형의 넓이에서 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (12 + b + c) = \frac{1}{2} bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,
코사인법칙에서 $144 = b^2 + c^2 - bc$ 이다. 연립하여 풀면 $b + c = 18$ 이다.

COMMENT 12

기역 : 준 식에 $n = 1$ 을 대입하면, $a_1^3 = 2a_1^2$ 이고 $a_n > 0$ 이므로 $a_1 = 2$ 이다.

니은 : 준 식의 n 자리에 $n + 1$ 을 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2$ 이다.

여기서 준 식을 빼면, $a_{n+1}^3 = 2 \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \right) = 2a_{n+1} \left(a_{n+1} + 2 \sum_{k=1}^n a_k \right)$ 이다.

디글 : 니은의 식과 니은 식의 n 자리에 $n - 1$ 을 대입한 것을 빼면 등차수열 뜬다.

COMMENT 14

$g(x) = (x+1)f(x) - \int_{-1}^x f(t)dt$ 에서 $g(-1) = 0$ 이고 $g'(x) = (x+1)f'(x)$ 이다.

$g'(x)$ 는 $x < -1$ 일 때 음수, $-1 < x < 2$ 일 때 양수, $2 < x$ 일 때 음수이다.

$g(x)$ 는 다항함수이다. 삼차함수처럼 생겼지만, 삼차라는 보장은 없다.

COMMENT 15

(가)에 의해 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 4, a_8 = 8, a_{16} = 16, a_{32} = 32$ 이다.

(나)에 의해 $a_3 = 4 - d,$

$$a_7 = 8 - d, a_6 = 8 - 2d, a_5 = 8 - 3d,$$

$$a_{15} = 16 - d, a_{14} = 16 - 2d, \dots, a_9 = 16 - 7d,$$

$$a_{31} = 32 - d, a_{30} = 32 - 2d, \dots, a_{17} = 32 - 15d$$

이다. $\sum_{k=1}^{32} a_k$ 는, 좀 노가다인데,

$$\{1 + 2 + 4 \times 2 + 8 \times 4 + 16 \times 8 + 32 \times 16\} - \{1 + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + \dots + 7) + (1 + 2 + \dots + 15)\}d$$

이므로 $683 - 155d$ 이다. $d = 3$ 이고 $a_{64} = 64, a_{60} = 64 - 4d = 52$ 이다.

COMMENT 20

조건 ' $b_5 \leq 0$ 이고 $b_6 > 0$ ' 또는 ' $b_9 < 0$ 이고 $b_{10} \geq 0$ '를 만족시켜야 한다.

풀면 $\frac{2}{3} \leq d < \frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{5} < d \leq \frac{3}{2}$ 이다.

COMMENT 21

적당한 k 값들을 넣고 A_k 들을 조사해보자. 예를 들어 $k = 5$ 이면

$$A_5 = \left\{ 0, \sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5}, \sin \frac{6\pi}{5}, \sin \frac{8\pi}{5} \right\}$$

이다. 뭐 이런 식에 걸치는 것 빼면 되겠지. $A_6 \subset A_n$ 이려면 대충 n 이 3의 배수 각이다.

$\sin \frac{2\pi}{6} = \sin \frac{4\pi}{6}, \sin \frac{6\pi}{6} = 0, \sin \frac{8\pi}{6} = \sin \frac{10\pi}{6}$ 이므로 $A_6 = A_3$ 이다.

$$3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 48 = 408$$

이다.

COMMENT 22

$h(a) = 0$ 이고 $h'(x) = g(x)$ 이다. 이를 이용하여 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = h(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

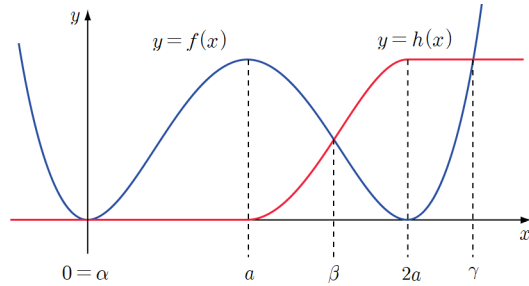
$\alpha = 0$ 이고 비율관계에 의해 $\gamma = a + \sqrt{2}a$ 이므로 $a = 2$ 이다.

$f(\beta) = \frac{1}{2}f(a)$ 이므로 $f(a) = ka^4 = 8$ 에서 $k = \frac{1}{2}$ 이다.

※ 비율관계에 대하여 : 나도 이걸 외우고 있지는 않다.

함수 $P(x) = x^2(x+a)(x-a)$ 가 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}a$ 에서 극값을 가짐을 확인한다.

※ β 값에 대하여 : 못 구한다.



COMMENT 확률과 통계 28

$$\frac{{}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}{{}_7C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7}$$

COMMENT 확률과 통계 30

$d+e$ 는 12의 약수이다.

Case1) $a+b+c=10, d+e=2 \Rightarrow {}_3H_7 \times {}_2H_0 = 36$

Case2) $a+b+c=9, d+e=3 \Rightarrow {}_3H_6 \times {}_2H_1 = 56$

Case3) $a+b+c=8, d+e=4 \Rightarrow {}_3H_5 \times {}_2H_2 = 63$

Case4) $a+b+c=6, d+e=6 \Rightarrow {}_3H_3 \times {}_2H_4 = 50$

COMMENT 미적분 27

$$a_n = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + ((2n)^2 - (2n-1)^2)$$

$$= 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (4k-1) = 2n^2 + n$$

$$b_n = 4n^2 - a_n = 2n^2 - n$$

COMMENT 미적분 28

$$\frac{1-g(t)}{1+g(t)} = \tan t \text{ 이고 } \frac{h(t)-1}{h(t)+1} = \tan t \text{ 이다.}$$

각각의 식에 $t = a$ 를 대입하면 $g(a) = \frac{1}{3}, h(a) = 3$ 이다.

각각의 식을 미분하고 $t = a$ 를 대입하면 $g'(a) = -\frac{10}{9}, h'(a) = 10$ 이다.

COMMENT 미적분 29

$\tan(\angle EAC) = \tan(\angle CAD - \angle EAD) = \frac{3}{4}$ 이다. $\overline{AF} = 4x$ 라 하면 $\overline{IF} = 3x$, $\overline{FG} = 6x$, $\overline{CG} = 6x$ 이므로 $16x = \sqrt{5}$ 에서

$x = \frac{\sqrt{5}}{16}$ 이다. 첫째항은 $\frac{5}{4}$, 둘째항은 $1 : \frac{3\sqrt{5}}{16}$, 넓이비는 $256 : 45$, 구하는 값은 $\frac{320}{211}$ 이다.

COMMENT 미적분 30

$x > -1$, $x \neq 1$ 일 때, $g(x) = \frac{f(x)}{(x+1)(x-1)}$ 이다.

(가)에서 $f(x) = k(x-1)^2 e^{ax}$ 이다.

$g(x) = \frac{k(x-1)e^{ax}}{x+1}$ 이다. $g(2) = \frac{1}{e}$, $g'(2) = 0$ 을 풀면 $k = 3e^{\frac{1}{3}}$, $a = -\frac{2}{3}$ 이다.

※ $g(x)$ 를 두 점 $(-1, 0)$, $(x, k(x-1)e^{ax})$ 사이의 평균변화율로 만들다 망한 문제다.

COMMENT 기하 27

접점을 (α, β) 라 하자.

$$\beta = \frac{1}{16}\alpha^2, \beta^2 = \alpha - a, \frac{1}{8}\alpha = \frac{1}{2\beta}$$

를 연립하여 풀면 $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $a = 3$ 이다.

COMMENT 기하 28

준 식을 변형하면

$$|6(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) + 5(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD}) - 2\overrightarrow{AP}| = 4 \Leftrightarrow |3\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}| = 2$$

이다. $3\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ 라 하면 $|\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}| = 2$ 에서 점 P의 자취는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

COMMENT 기하 29

선분 AC는 원의 지름이다. 원의 반지름의 길이를 r , $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = 2b$ 라 하자. $r^2 = a^2 + b^2$ 이다.

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}|^2 = 4a^2$ 이므로 $a = 4$ 이다. $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |\overline{PM}|^2 - |\overline{MA}|^2$ 때리면 최댓값은 $(r+b)^2 - a^2 = 48$ 이다.

연립하여 풀면 $r = 5$, $b = 3$ 이다. $\overline{AB} \cdot \overline{AP}$ 의 최댓값은 $2a \times (a+r)$ 인 72이다.

COMMENT 기하 30

쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하자. $\overline{PF} = b+2a$ 이다.

$A(2, 0)$, 두 직선 PF, PF'과 원의 접점을 각각 B, C라 하면

$\overline{FB} = 7$ 이므로 $\overline{PB} = b+2a-7$, $\overline{F'C} = 1$ 이므로 $\overline{PC} = b+1$ 이고 $\overline{PB} = \overline{PC}$ 이므로 $a = 4$ 이다.

$\cos(\angle BFA) = \frac{7}{8} = \frac{(b+8)^2 + 12^2 - b^2}{24(b+8)}$ 에서 $b = 8$ 이다.