AWESOME

N

2024 학년도 대비

6월 모의 평가

"발글씨 해설"

이투스 정현정

제 2교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)$

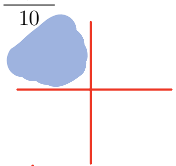
$=6+6$

$=12$

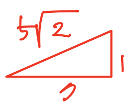
6. $\cos\theta<0$이고, $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　③ 0

④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$



$\tan\theta=-\frac{1}{7}$



$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

7. 상수 $a(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

$x=a$　$A(a, \log_2\frac{a}{4})$

$B(a, -\log_2 a)$

$\overline{AB}=\log_2\frac{a}{4}+\log_2 a=\log_2\frac{a^2}{4}=4$

$a^2=64$　$\therefore a=8$

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3-3x^2+k+1=0$

$3x^2-6x=0$,

$k+1=0$ 이거나 $8-12+k+1=0$

$k=3$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1$ $\quad a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

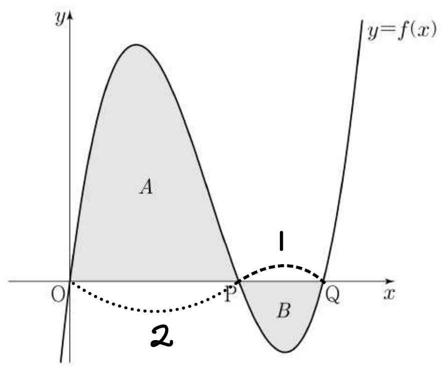
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



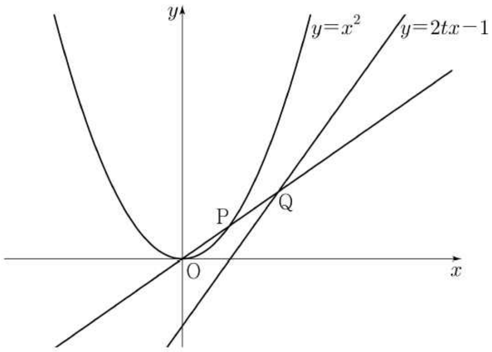
$A=\frac{k}{12}\times2^3\times(2+2)=\frac{8}{3}k$

$B=\frac{k}{12}\times1^3\times(1+4)=\frac{5}{12}k$

$\frac{32-5}{12}k=\frac{27}{12}k=3$

$k=\frac{4}{3}$

11. 그림과 같이 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$2x=2t$ $P(t, t^2)$

직선 OP $y=tx$

$\begin{cases} y=tx \\ y=2tx-1 \end{cases}$

$\therefore Q\left(\frac{1}{t}, 1\right)$

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(t^2-1)^2}$

$=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2}{t^2}+(t^2-1)^2}$

$=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2+t^2(t^2-1)^2}{t^2}}$

$=\frac{(1-t^2)}{t}\sqrt{t^2+1}$

$\lim_{t \to 1} \frac{(1-t^2)\sqrt{t^2+1}}{t(1-t)}=2\sqrt{2}$

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}(n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$a_1=-4-d$ $b_1=-8-d$

$a_2=-4$ $b_2=-8+d$ $2d$

$a_3=-4+d$ $b_3=-8+3d$

$a_4=-4+2d$ $b_4=-8+5d$

$a_5=-4+3d$ $b_5=-8+7d$

case1) $a_1=b_2$ $4=2d$ $\therefore d=2$

$a_{20}=-4+18\times 2=32$

case2) $a_1=b_3$ $-4-d=-8+3d$, $4d=4$, $d=1$

$a_{20}=-4+18=14$

$\therefore 46$

여기까지 풀이

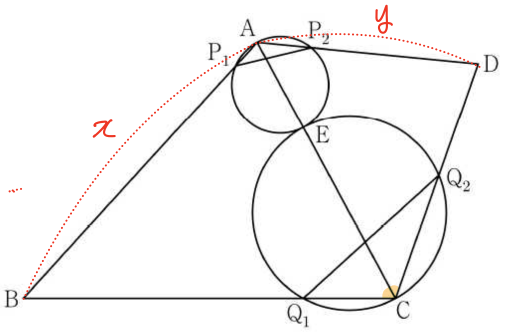
13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ABD는 모두 예각 삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)[4점]

$\triangle AP_1P_2$ $\triangle CQ_1Q_2$ 외접원 지름의 비율

사인법칙



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\angle BCD=\theta$, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{AE}=2R$, $\overline{EC}=4R$

$\overline{P_1P_2}=3k$, $\overline{Q_1Q_2}=5\sqrt{2}k$ 라 하자.

$\triangle CQ_1Q_2$에서 $\dfrac{5\sqrt{2}k}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R$ $\therefore R=\frac{15}{4}k$

$\triangle AP_1P_2$에서 $\dfrac{3k}{\sin BAD}=\frac{15}{4}k$ $\therefore \sin BAD=\frac{4}{5}$

$\cos BAD=-\frac{3}{5}$

$\triangle ABD$ 넓이 $\frac{1}{2}\times x\times y\times\frac{4}{5}=2$ $\therefore xy=5$

$\triangle BCD$ 에서

$\overline{BD}^2=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$

$=x^2+y^2-2xy\cos BAD$

$\therefore x^2+y^2-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$

$\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ xy=5 \end{cases}$

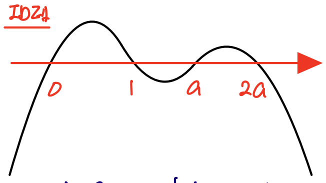
$(x+y)^2=21$

14. 실수 $a(a\ge0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

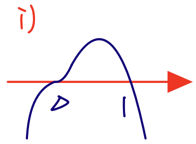


case1) $a=0$ 이면 $v(t)=-t^3(t-1)$

$a=1$ 이면 $v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

$a=\frac{1}{2}$ 이면 $v(t)=-t(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)$

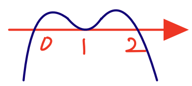
i)



$\int_0^2 (t^3-t^4)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{5}t^5\right]_0^2=4-\frac{32}{5}=-\frac{12}{5}$

ii)



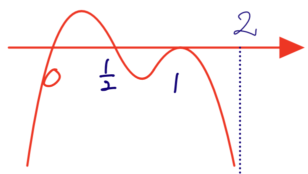
$\int_0^1 t(t-1)^2(t-2)dt=\int_{-1}^0 t^2(t+1)(t-1)dt$

$=\int_{-1}^0 (t^4-t^2)dt=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0$

$=0-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}$

$\therefore \frac{4}{15}$

iii) $\int_0^2 -t(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$ 의미 없음



15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

$a_1=K$, $a_2=a_1-2-K=-2$,

$a_3=a_2+4-K=2-K\ (\neq 0)$ — $K=1$ 일때 / $K>2$ 일때

① $K=1$ 이면, $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-1, & a_n\le 0 \\ a_n-(2n+1), & a_n>0\end{cases}$

$a_3=1$, $a_4=1-7=-6$, $a_5=-6+7=1$,

$a_6=1-11=-10$ NO!

② $K>2$ 이면 $a_3=2-K<0$ 이므로

$\boxed{a_4=2-K+6-K=8-2K}$

i) $K=3$ 일때 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(2n-3) & a_n\le 0 \\ a_n-(2n+3) & a_n>0\end{cases}$

$a_3=-1$, $a_4=2$, $a_5=2-11=-9$

$a_6=-9+7=-2$

ii) $K=4$ 일때 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-4 \\ a_n-(2n+4)\end{cases}$

$a_3=-2$ $a_4=-2+2=0$ NO

iii) $K\ge 5$ 일때 $a_4<0$ $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(2n-K) \\ a_n-(2n+K)\end{cases}$

$a_5=8-2K+8-K=16-3K$

① $K=5$ 이면, $a_3=-3$, $a_4=-2$

$a_5=1$, $a_6=1-(2\times5+5)=-14$

$-\ -\ +\ -$ ok

단답형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$x-6 \le -2x$

$x \le 2$ 3

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

② $K\ge 6$ 이면 $a_5<0$, $a_6=a_5+(2\times5-K)$

$=26-4K$

if $K\ge 7$ 이면 $a_6<0$

$a_3\sim a_6<0$ NO

②-1 $K=6$,

$a_3=2-K$, $a_4=8-2K$ $a_5=16-3K$

$a_6=26-4K>0$ 성립

$3+5+6=14$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

$a_1 = k$, $a_2 = a_1 - 2 - k = -2$, $a_3 = -2 + 4 - k = 2 - k$

$k=1$ 이면 $a_3 = 1$, $a_4 = 1 - 2\times 3 - 1 = -6$, $a_5 = -6 + 2\times 4 - 1 = 1$, $a_6 = 1 - 2\times 5 - 1 = -10$

$+$ $-$ $+$ $-$ X

$k \ge 2$

$a_3 = 2 - k < 0$ ⊖,

$a_4 = 2 - k + 2\times 3 - k$
$= 8 - 2k$

$a_4 = 8 - 2k > 0$, $k = 3$ ⊕, $a_5 = 8 - 6 - 8 - 3 = -9$ ⊖, $a_6 = -9 + 2\times 5 - 3 = -2$ ⊖ OK

$a_4 = 8 - 2k < 0$, $k \ge 4$ ⊖, $a_5 = 8 - 2k + 8 - k = 16 - 3k$

$a_5 = 16 - 3k$, $k = 5$ ⊕, $a_6 = 16 - 3\times 5 - 2\times 5 - 5 = -14$ ⊖ OK

$a_5 = 16 - 3k$, $k \ge 6$ ⊖, $a_6 = 16 - 3k + 2\times 5 - 5 = 26 - 3k$

$k = 6$ ⊕ ok

$k \ge 7$ ⊖ X

$\therefore k = 3 + 5 + 6 = 14$

단 답 형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=3ax^2+b \qquad 3a+b=0$

$=3ax^2-3a$

$=3a(x+1)(x-1)$

$f(1)=-2, \quad 2a+b=-2$

$a=2, \ b=-6$

$\therefore f(-1)=-a-b+a=6.$

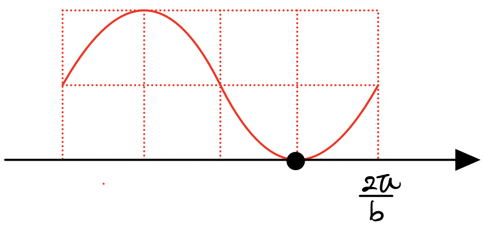
19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
> (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

주기 $\frac{2\pi}{b}$ $\quad M=8, \ m=8-2a$



$\therefore \frac{8\pi}{b}=2\pi \quad \begin{cases} b=4 \\ a=4 \end{cases} \quad \therefore 8$

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

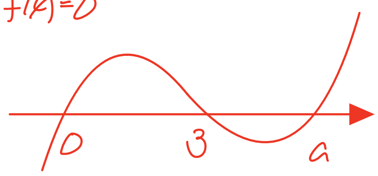
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

$\rightarrow g(3)=0$

$g(0)=0, \ g'(x)=f(x) \quad g(x)=\frac{1}{3}x^3+\cdots$

$f(4)=0$



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-a)$

$g'(x)=\frac{1}{3}(x-3)(x-a)+\frac{1}{3}x(x-a)+\frac{1}{3}x(x-3)$

$g'(4)=\frac{1}{3}(4-a+16-4a+4)=0$

$\therefore a=\frac{24}{5}$

$g'(9)=f(9)=\frac{1}{3}\left\{6\times\left(9-\frac{24}{5}\right)+9\left(9-\frac{24}{5}\right)+9\times 6\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left(54-\frac{144}{5}+81-\frac{216}{5}+54\right)$

$=\frac{1}{3}\times 117=39$

다른풀이)

let $f(x)=(x-4)(x-a)$

$=x^2-(4+a)x+4a$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{4+a}{2}\right)x^2+4ax$

$g(3)=9-\frac{36+9a}{2}+12a=0$

$18-36-9a+24a=0$

$15a=18 \quad a=\frac{6}{5}$

$\therefore f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$

$f(9)=5\times\left(9-\frac{6}{5}\right)$

$=45-6=39$

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오.(단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

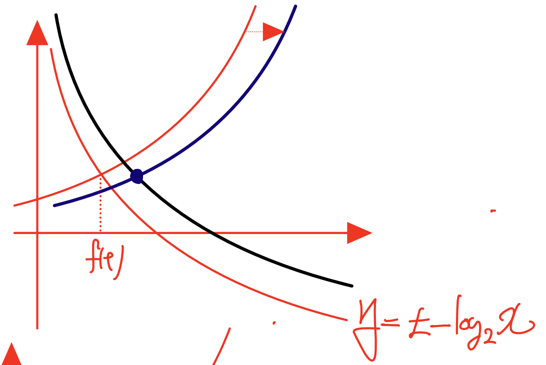
- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

< 보 기 >

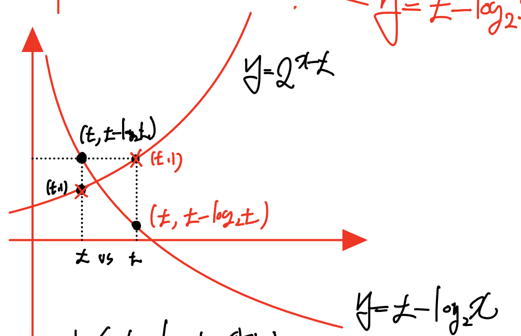
ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

ㄱ, $1-\log_2 1=2^{1-1}$, $2-\log_2 2=2^{2-2}$ 자명

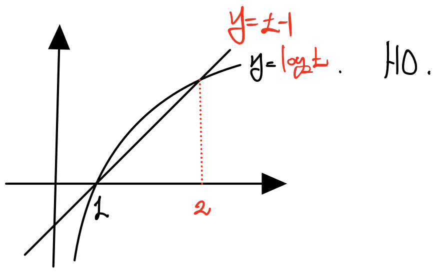
ㄴ,



~~ㄷ~~,



$1 < t-\log_2 t$ 인가?
$\log_2 t < t-1$ 인가?



NO.

$\therefore$ 110

22. 정수 $a(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.[4점]

함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$

을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 『선택과목(확률과 통계)』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

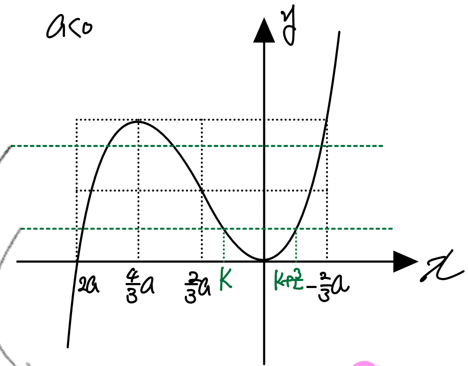
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오.(단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

< 보 기 >

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

$a<0$



$k<0$이므로 $k+\frac{3}{2}>0$ ∴ $k=-1$

$\frac{2}{3}a<-1$

$a<-\frac{3}{2}$

$k<\frac{4}{3}a$ $k+\frac{3}{2}>\frac{4}{3}a$

$\frac{3}{4}k<a<\frac{3}{4}k+\frac{9}{8}$

모든 k곱 -12

$k=-2$ ✗

$k=-3$ $-\frac{9}{4}<a<-\frac{9}{4}+\frac{9}{8}=-\frac{9}{8}$, $a=-2$

$k=-4$ $-3<a<-3+\frac{9}{8}=-\frac{5}{8}$ $a=-2$

$f'(x)=3x^2+8x$ ∴ $f'(10)=380$

22. 정수 $a(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

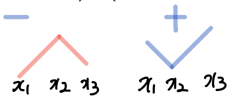
이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.[4점]

적어도 1개의 음수존재

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

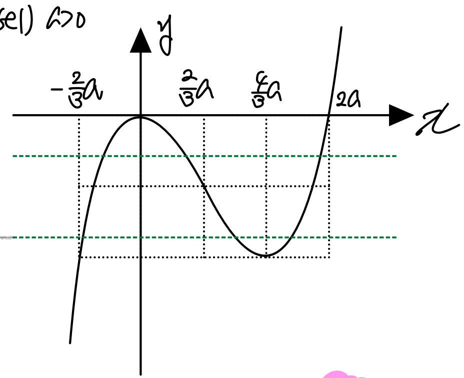
$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$

IDEA



$\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$ 사이에 극점 포함

case1) $a>0$



if $k<0$이면, $k+\frac{3}{2}>0$ ∴ $k=-1$ 이지만 $k=2,3,4,12$ 인.

이때, $k<-1$인 모든 정수일때 성립 ✗

그림에서 $0<k<\frac{4}{3}a$ 이고 $k+\frac{3}{2}>\frac{4}{3}a$

∴ $\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$ → $\frac{3}{4}k<a<\frac{3}{4}k+\frac{9}{8}$

인 정수 a는 없다

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『선택과목(확률과 통계)』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\ y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 $\boxed{④\ -4}$ ⑤ -5

$\frac{dy}{dt}=3\times\frac{2t}{t^2+1}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-10t^2}{(t^2+1)^2}=\frac{5(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

$\frac{\frac{12}{5}}{\frac{-15}{25}}=-4$

25. $\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

$2^b=8$ ∴ $b=3$

$\frac{a\times\ln2\times2^{ax+b}}{b\times\ln2\times2^{bx}} \to \frac{a\times2^b}{b\times1}=16$

∴ $a\times8=48$

$a=6$

∴ 9

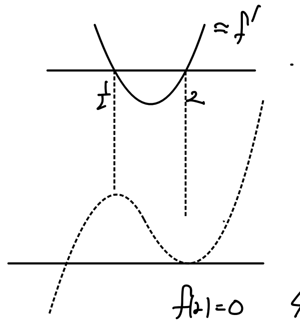
26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$　② $-\frac{33}{4}$　③ -8　④ $-\frac{31}{4}$　⑤ $-\frac{15}{2}$

$f(x)=x^2-5x+2\ln x-t$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

$f'(x)=2x-5+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-5x+1}{x}$

$\approx 2x^2-5x+1=(2x-1)(x-2)=0$



$f(2)=0$　$4-10+2\ln2=t$

$f(\frac12)=0$　$\frac14-\frac52-2\ln2=t$

∴ $-6+\frac14-\frac{10}{4}=-6-\frac94$

$=\frac{-33}{4}$

27. 실수 t $(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim\limits_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

$m_1 = \cot t$ $m_2 = -1$

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| = \frac{\cot t+1}{1-\cot t}$$

$$\lim_{t\to\pi}\frac{1}{(\pi-t)^2}\times\frac{\cot t+1}{1-\cot t}$$

$\pi - t = \theta$ $\cot t = \cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^2}\times\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\theta^2 = \frac{1}{4}$$

여기까지 풀이.

28. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

수치대입, 미.적 주기 대칭

가) $x=0$ $\{f(0)\}^2+2f(0) = a+b \cdots ①$

$x=2$ $\{f(2)\}^2+2f(2) = a+b \cdots ②$

② - ① $\{f(2)-f(0)\}\{f(0)+f(2)+2\} = 0$

$\{f(2)\}^2 - \{f(0)\}^2 + 2f(2) - 2f(0) = 0$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)\} + 2\{f(2)-f(0)\} = 0$

$\begin{cases} f(2)+f(0)+2=0 \\ f(0)=f(2)+1 \end{cases}$, $2f(2)+3=0$,

$f(2) = -\frac{3}{2}$, $f(0) = -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} - 1 = a+b$ $\therefore a+b = -\frac{3}{4}$

$\{f(x)\}^2+2f(x)+1 = \{f(x)+1\}^2$

$= a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$f(x)+1 = \pm\sqrt{a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1}$

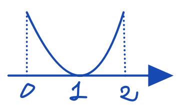
$f(0)+1 = \frac{1}{2} = \sqrt{a+b+1}$, $f(2)+1 = -\frac{1}{2} = -\sqrt{a+b+1}$

이제 let $g(x) = a\cos\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$ 유일성

$f(x)+1$은 연속함수이므로 $f(k)+1=0$ 인 $k\in(0,2)$

$g(2-x) = a\cos\pi(2-x)e^{\sin^2\pi(2-x)}+b+1 = g(x)$

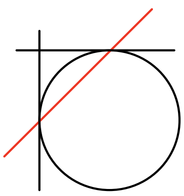
$g(0) = a+b+1 = g(2)$ 이고 $g(x)$는 $x=1$ 대칭 이므로 $g(1)=0$



$\therefore \begin{cases} -a+b+1=0 \\ a+b = -\frac{3}{4} \end{cases}$ $b = -\frac{7}{8}$, $a = \frac{1}{8}$

단 답 형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$) [4점]



$y=x+k$

$x^2-2x(x+k)+2(x+k)^2=15$

$x^2-\cancel{2x^2}-2kx+\cancel{2x^2}+4kx+2k^2=15$

$x^2+2kx+2k^2-15=0$

$\begin{cases} a+b=-2k \\ ab=2k^2-15 \end{cases}$

$2x-2y-2x\times y'+4y\times y'=0$

$y'=\dfrac{2(x-y)}{2(x-2y)}=\dfrac{x-y}{x-2y}=\dfrac{y-x}{2y-x}$

$\mathrm{A}(a,\ a+k)$
$\mathrm{B}(b,\ b+k)$ $\quad \dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$k^2=-ab-2ak-2bk-4k^2$

$=-2k^2+15-2k\times(-2k)-4k^2$

$k^2=15$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=ar^{n-1}$

$$b_n=\begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

$a_3\le -1$

가) 나) 에서 $r<0$ $\therefore -1<r<0$ 이고,

If $a>0$ 이면 $\{a_n\}$ a, ar, $ar^2>0$ 인데 $a_3\le -1$ 모순

$\therefore a<0$ 이고 $a_1<0$, $a_2=ar>0$, $a_3=ar^2$, $a_4=ar^3>0$ ...

나) 에서 $a_{2n}>0$ 이므로 $b_{2n}=a_{2n}=ar^{2n-1}$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\dfrac{ar}{1-r^2}=8$ ... ①

이 때, $a=\dfrac{8(1-r^2)}{r}<0$ 이므로

$\{a_{2n-1}\}$ $a=8\left(\frac{1}{r}-r\right)$, $a_3=8r^2\left(\frac{1}{r}-r\right)$

$a_5=8r^4\left(\frac{1}{r}-r\right)$, $a_7=8r^6\left(\frac{1}{r}-r\right)$ ...

이 때, $b_3=-1$ 이므로 $a_3\le -1$ 이고

$b_1=-1$ 이거나 $b_1=a_1=\dfrac{a_3}{r^2}\le -1$

Key p $b_1=-1$ 이고,

$b_1=-1$, $b_3=-1$, $b_5=-1$ 이라면 모순

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-1-1+\sum_{n=3}^{\infty} b_{2n-1}=-2+\sum_{n=3}^{\infty} a_{2n-1}$

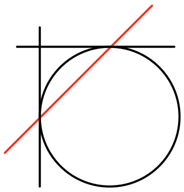
$=-2+\dfrac{ar^4}{1-r^2}=-3$ $\therefore \dfrac{ar^4}{1-r^2}=-1$ ... ②

$r^3=-\dfrac{1}{8}$ $\therefore r=-\dfrac{1}{2}$ $\quad a=8\left(-2+\frac{1}{2}\right)=-12$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\dfrac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

단 답 형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq0$, $b+2k\neq0$) [4점]



$y=x+k$

$x^2-2x(x+k)+2(x+k)^2=15$

$x^2-\cancel{2x^2}-2kx+\cancel{2x^2}+4kx+2k^2=15$

$x^2+2kx+2k^2-15=0$

$\begin{cases} a+b=-2k \\ ab=2k^2-15 \end{cases}$

$2x-2y-2x\times y'+4y\times y'=0$

$y'=\dfrac{2(x-y)}{2(x-2y)}=\dfrac{x-y}{x-2y}=\dfrac{y-x}{2y-x}$

$\mathrm{A}(a,\ a+k)$ $\quad \dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$\mathrm{B}(b,\ b+k)$

$k^2=-ab-2ak-2bk-4k^2$

$=-2k^2+15-2k\times(-2k)-4k^2$

$3k^2=15$, $k^2=5$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} -1 & (a_n\leq-1) \\ a_n & (a_n>-1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

key $a_3\leq-1$

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

가) 나) $\lim_{n\to\infty} b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} b_{2n}=0$

$\therefore$ $a_n=b_n$인 n이 존재 $\quad\therefore \lim a_n=0$

$|r|<1$

$b_3=-1$이므로 $a_3\leq-1$

가)에 의해 $-1<r\leq0$

나)

나)에서 $b_3=-1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=8$이므로

a_{2n} 부호 $a_{2n}>0$ $\quad \dfrac{ar}{1-r^2}=8$

가)에서 $b_3=-1$, $a_3\leq-1$이므로

$b_{2n-1}<0$ $\quad a_{2n-1}<0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-3$이므로 $b_{2n-1}=-1$인 항은 2개!

$\therefore -2+\dfrac{ar^4}{1-r^2}=-3$, $\quad \dfrac{ar^4}{1-r^2}=-1$

$\therefore r^3=-\dfrac{1}{8}$, $r=-\dfrac{1}{2}$ $\quad a=\dfrac{r^2-1}{r^4}=\dfrac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{16}}=4-16$

$\therefore \dfrac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『선택과목(기하)』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.