테마☆리듬 모의고사
수학 영역 정답

1	④	2	⑤	3	②	4	⑤	5	①
6	⑤	7	①	8	④	9	③	10	③
11	③	12	②	13	④	14	②	15	①
16	8	17	36	18	12	19	11	20	47
21	504	22	25						

공통과목 해설

1. 지수법칙을 활용하여 계산하는 문제입니다.
$(\sqrt[4]{27}\times 3^{-\frac{1}{2}})^2 = (3^{\frac{3}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}})^2 = (3^{\frac{1}{4}})^2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2. 함수의 극한을 구하는 문제입니다.
$(x+1)f(x)=g(x)$라고 하면 $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=15$가 성립하며,
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}g(x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}=\dfrac{15}{3}=5$입니다.

3. 삼각함수에 대한 문제입니다.
$\pi<\theta<2\pi$인 각에서 $\tan\theta=-\dfrac{15}{8}<0$이므로 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이며,
이때 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이 성립합니다.
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{15}{8}$에서 $\sin\theta=-15k$, $\cos\theta=8k(k>0)$라고 하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=225k^2+64k^2=289k^2=1$에서 $k=\dfrac{1}{17}$이고,
$\sin\theta=-\dfrac{15}{17}$, $\cos\theta=\dfrac{8}{17}$에서 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{7}{17}$입니다.

4. 함수의 미분에 대한 문제입니다.
$g(x)=(3x-2)f(x)$를 미분하면
$g'(x)=(3x-2)'f(x)+(3x-2)f'(x)=3f(x)+(3x-2)f'(x)$이며, $x=2$를 대입하면
$g'(2)=3f(2)+4f'(2)=3\times 5+4\times(-2)=15-8=7$입니다.

5. 수열의 합에 대한 문제입니다.
$\sum\limits_{n=1}^{8}(a_n+2)=\sum\limits_{n=1}^{8}a_n+\sum\limits_{n=1}^{8}2=\sum\limits_{n=1}^{8}a_n+16=30$에서 $\sum\limits_{n=1}^{8}a_n=14$
$\sum\limits_{n=1}^{7}(n-a_n)=\sum\limits_{n=1}^{7}n-\sum\limits_{n=1}^{7}a_n=28-\sum\limits_{n=1}^{7}a_n=4$에서 $\sum\limits_{n=1}^{7}a_n=24$
$a_8=\sum\limits_{n=1}^{8}a_n-\sum\limits_{n=1}^{7}a_n=14-24=-10$

6. 로그의 성질에 대한 문제입니다.
$\log_b\sqrt{c}=\dfrac{1}{2}\log_b c=\dfrac{5}{4}$에서 $\log_b c=\dfrac{5}{2}$이며,
$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$에서 $\dfrac{8}{5}\times\dfrac{5}{2}\times\log_c a=1$, $\log_c a=\dfrac{1}{4}$입니다.

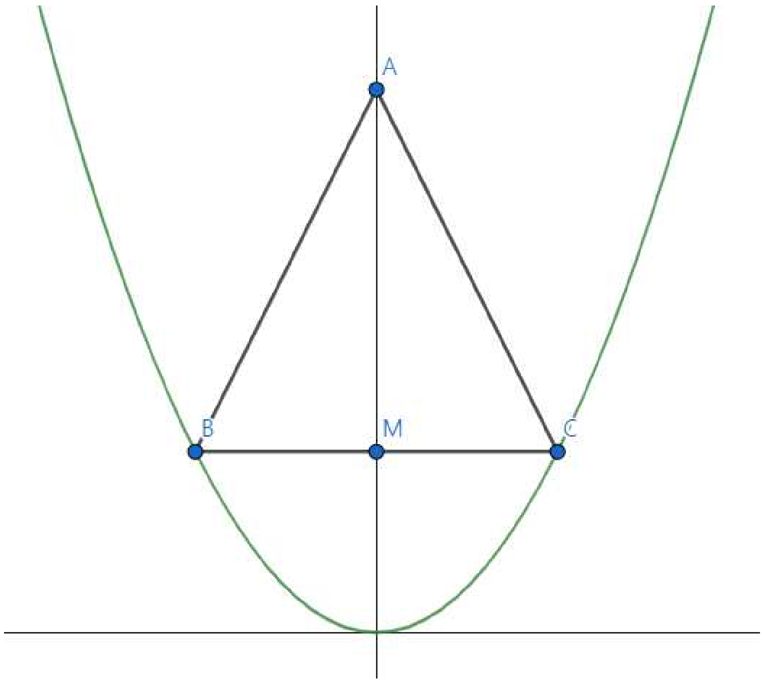
7. 함수의 그래프에 대한 문제입니다.
$f(x)=x^3-4x^2-3x+k$라고 하면
$f'(x)=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$으로, $f'(-\dfrac{1}{3})=f'(3)=0$입니다.
곡선 $y=f(x)$가 제4사분면을 지나지 않기 위해서는 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립해야 합니다.
$f(0)=k$이고, 극솟값은 $f(3)=-18+k$입니다. 부등식 $f(3)\geq 0$, $-18+k\geq 0$이 성립해야 하므로 $k\geq 18$이며, k의 최솟값은 18입니다.

8. 함수의 연속에 대한 문제입니다.
함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=a^2-3a$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=a-3$이며,
$a^2-3a=a-3$이어야 연속함수가 됩니다.
$a^2-4a+3=(a-1)(a-3)=0$에서 $a=1$인 경우, $a=3$인 경우를 살펴봅시다.
$a=1$인 경우 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+1 & (x<1)\\ 2x-4 & (x\geq 1)\end{cases}$이며,
$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$이고 $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족합니다.
$a=3$인 경우 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & (x<3)\\ 2x-6 & (x\geq 3)\end{cases}$이며,
$\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$이므로 $x=3$에서 미분가능하므로 조건을 만족하지 않습니다.
따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+1 & (x<1)\\ 2x-4 & (x\geq 1)\end{cases}$이며, $f(4)=4$입니다.

9. 귀납적으로 정의된 수열에 대한 문제입니다.
$a_{15}=a_{14}-1=7$에서 $a_{14}=8$이며, $a_{14}=\dfrac{14}{a_{13}}+1=8$에서 $a_{13}=2$이며, $a_{13}=a_{12}-1=2$에서 $a_{12}=3$이며, $a_{12}=\dfrac{14}{a_{11}}+1=3$에서 $a_{11}=7$입니다.
$a_{11}=a_{10}-1=7$에서 $a_{10}=8$이며, $a_{10}=\dfrac{14}{a_9}+1=8$에서 $a_9=2$이며, $a_9=a_8-1=2$에서 $a_8=3$이며, $a_8=\dfrac{14}{a_7}+1=3$에서 $a_7=7$입니다.
주어진 수열은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족하므로 $a_1=a_{13}=2$, $a_2=a_{14}=8$에서 $a_1+a_2=10$입니다.

10. 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제입니다.
$v(t)=3t^2+2t-5$에서 가속도는 $a(t)=6t+2$이며, 가속도가 14가 될 때는 $t=2$일 때입니다.
점 P가 $t=0$부터 $t=2$까지 움직인 거리는 $\int_0^2|v(t)|dt$로 구할 수 있으며, $v(t)=3t^2+2t-5=(t-1)(3t+5)$에서 $0\leq t<1$일 때 $|v(t)|=-v(t)$, $1\leq t\leq 2$일 때 $|v(t)|=v(t)$입니다.
즉, 점 P가 $t=0$부터 $t=2$까지 움직인 거리는
$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^1(-3t^2-2t+5)dt+\int_1^2(3t^2+2t-5)dt$
$\left[-t^3-t^2+5t\right]_0^1+\left[t^3+t^2-5t\right]_1^2=3+5=8$입니다.

11. 함수의 극한을 구하는 문제입니다.



그림에서 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 점 M은 y축 위에 있으며, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}\,\overline{\mathrm{BM}}$이 성립합니다.
이때 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AM}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\overline{\mathrm{CM}}$이 성립합니다.
$\overline{\mathrm{MC}}=f(t)$이고, $\overline{\mathrm{AM}}=2f(t)$이며, 점 M의 y좌표는 $\{f(t)\}^2$이므로 $t=\{f(t)\}^2+2f(t)$가 성립합니다.
$\{f(t)\}^2+2f(t)-t=0$에서 $f(t)=-1+\sqrt{1+t}\,(f(t)>0)$이며,
$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt{1+t}+1)}{t(\sqrt{1+t}+1)}$
$=\lim_{t\to0+}\frac{t}{t(\sqrt{1+t}+1)}=\frac{1}{2}$입니다.

12. 삼각함수의 그래프에 대한 문제입니다.
곡선 $y=f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B 역시 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이며, 점 A의 x좌표를 α라고 하면 점 B의 x좌표는 $\pi-\alpha$입니다.
우선 $k\sin\alpha=\tan\alpha$에서 $k\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha=\frac{1}{k}$가 성립합니다.
또한 $k\sin(\pi-\alpha)=8\tan(\pi-\alpha-\frac{\pi}{2})$, $k\sin\alpha=8\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$에서
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$이므로 $k\sin\alpha=8\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$가 성립합니다.
$k\sin^2\alpha=8\cos\alpha$에서 $k(1-\cos^2\alpha)=8\cos\alpha$이며, $\cos\alpha=\frac{1}{k}$를 대입하면 $k(1-\frac{1}{k^2})=\frac{8}{k}$, $k-\frac{1}{k}=\frac{8}{k}$, $k=\frac{9}{k}$에서 $k>1$이므로 $k=3$입니다.

13. 등차수열에 대한 문제입니다.
$a_1=8$, $a_k=56$인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_k-a_1=48=(k-1)d$가 성립합니다.
또한 $\sum_{n=1}^{k}a_n=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=32k$입니다.
$150<32k<240$에서 자연수 k로 가능한 것은 5, 6, 7이며, 이들 중 $48=(k-1)d$에서 d가 자연수가 되게 하는 k의 값은 5, 7입니다.
$k=5$인 경우 공차는 12이며, 이때 $a_n=12n-4$에서 $a_6=68$입니다.
$k=7$인 경우 공차는 8이며, 이때 $a_n=8n$에서 $a_6=48$입니다.
따라서 모든 a_6의 값의 합은 116입니다.

14. 정적분으로 정의된 함수와 미분가능성을 활용한 문제입니다.
(나)에 의하여 $f(2)=0$이 성립하며, 함수 $|f(x)|$는 연속함수이므로 $\lim_{x\to2-}|f(x)|=-2+\int_0^2 g(t)dt=0$, $\int_0^2 g(t)dt=2$가 성립합니다.
$g(x)=-3x^2+ax+b$라고 하면
$\int_0^2 g(t)dt=\left[-t^3+\frac{at^2}{2}+bt\right]_0^2=-8+2a+2b=2$에서 $a+b=5$입니다.
$x<2$에서는
$f(x)=2-x^2+\int_0^x g(t)dt$ 또는 $f(x)=-2+x^2-\int_0^x g(t)dt$가 성립하며, $x\geq2$에서는
$f(x)=4x-8-\int_2^x g(t)dt$ 또는 $f(x)=-4x+8+\int_2^x g(t)dt$가 성립합니다.
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능해야 하므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값이 존재해야 하며, $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은
$\lim_{x\to2-}\frac{2-x^2+\int_0^x g(t)dt}{x-2}$ 또는 $\lim_{x\to2-}\frac{-2+x^2-\int_0^x g(t)dt}{x-2}$입니다.
$\int_0^2 g(t)dt=2$이므로
$\lim_{x\to2-}\frac{2-x^2+\int_0^x g(t)dt}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x^2-4)+\int_2^x g(t)-\int_2^0 g(t)dt}{x-2}$
$\lim_{x\to2-}\{-(x+2)+g(x)\}=-4+g(2)$이며, 마찬가지로
$\lim_{x\to2-}\frac{-2+x^2-\int_0^x g(t)dt}{x-2}=4-g(2)$입니다.

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은 $\lim_{x\to2+}\frac{4x-8-\int_2^x g(t)dt}{x-2}$ 또는 $\lim_{x\to2+}\frac{-4x+8+\int_2^x g(t)dt}{x-2}$입니다.
$\lim_{x\to2+}\frac{4x-8-\int_2^x g(t)dt}{x-2}=\lim_{x\to2}\{4-g(x)\}=4-g(2)$이며, 마찬가지로 $\lim_{x\to2+}\frac{-4x+8+\int_2^x g(t)dt}{x-2}=g(2)-4$입니다.
$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 성립해야 하며, 만약 $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-4+g(2)$이고 $\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4-g(2)$인 경우에는 $g(2)=4$여야 하지만 이는 문항의 조건에 맞지 않고, $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4-g(2)$이고 $\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=g(2)-4$인

경우 역시 마찬가지입니다.

즉, $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4-g(2)$ 또는

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=g(2)-4$입니다.

$x<2$에서 $|f(x)|=2-x^2+\int_0^x g(t)dt$이며,

$\int_0^x g(t)dt=-x^3+\frac{a}{2}x^2+bx$에서

$|f(x)|=-x^3+(\frac{a}{2}-1)x^2+bx-2$이고, $a+b=5$이므로

$|f(x)|=-x^3+(\frac{a}{2}-1)x^2+(5-a)x-2$

$=-(x-2)\left\{x^2+(3-\frac{a}{2})x+1\right\}$입니다.

$x\ge2$에서 $|f(x)|=4x-8-\int_2^x g(t)dt$이며,

$\int_2^x g(t)dt=-x^3+\frac{a}{2}x^2+(5-a)x-2$이므로

$|f(x)|=4x-8+x^3-\frac{a}{2}x^2+(a-5)x+2$

$=x^3-\frac{a}{2}x^2+(a-1)x-6=(x-2)\left\{x^2+(2-\frac{a}{2})x+3\right\}$입니다.

그리고 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\ge0$이어야 하므로 다음 두 부등식을 만족시켜야 합니다.

$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $-(x-2)\left\{x^2+(3-\frac{a}{2})x+1\right\}\ge0$

$x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)\left\{x^2+(2-\frac{a}{2})x+3\right\}\ge0$

이때, 주어진 구간에 있는 임의의 실수 x에 대하여 다음과 같은 부등식이 성립해야 합니다.

(1) $x<2$에서 $x^2+(3-\frac{a}{2})x+1\ge0$

(2) $x\ge2$에서 $x^2+(2-\frac{a}{2})x+3\ge0$

우선 (1)이 성립하는 경우, 이차방정식 $x^2+(3-\frac{a}{2})x+1=0$이 중근이나 허근을 갖거나, $x\ge2$에 두 실근이 모두 존재합니다.

중근이나 허근을 갖는 경우 $(3-\frac{a}{2})^2-4\le0$에서 $2\le a\le10$이며, 이차방정식 $x^2+(3-\frac{a}{2})x+1=0$의 두 근의 곱은 1이기 때문에 두 실근이 모두 2보다 크거나 같은 경우는 존재하지 않습니다.

즉, (1)에서 $2\le a\le10$입니다.

(2)가 성립하는 경우, 이차방정식 $x^2+(2-\frac{a}{2})x+3=0$이 중근이나 허근을 갖거나, $x<2$에 두 실근이 모두 존재합니다.

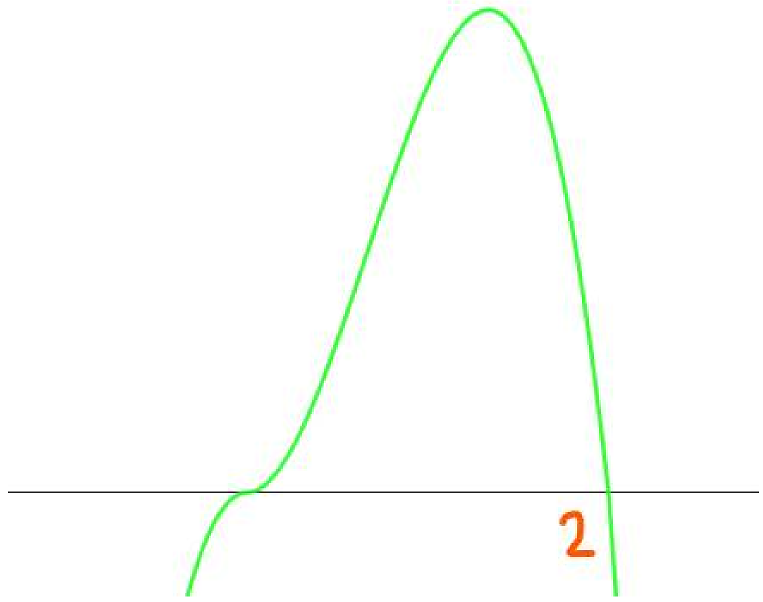
중근이나 허근을 갖는 경우 $(2-\frac{a}{2})^2-12\le0$에서

$-4\sqrt{3}+4\le a\le4\sqrt{3}+4$이며, (1)에서 구한 부등식의 범위인 $2\le a\le10$은 이 범위에 전부 들어옵니다.

$(-4\sqrt{3}+4=-2.928...<2,\ 4\sqrt{3}+4=10.928...>10)$

즉, $2\le a\le10$입니다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면서 최솟값을 가지려면 이차방정식 $x^2+(3-\frac{a}{2})x+1=0$이 중근을 가지면서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 합니다.



$x^2+(3-\frac{a}{2})x+1=0$이 중근을 가지는 경우, $a=2$인 경우와 $a=10$인 경우가 있습니다.

$a=2$인 경우 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$을 중근으로 가지며, $-1\le x<2$에서 $f(x)=-(x-2)(x+1)^2$입니다.

$f'(x)=-(x+1)^2-2(x-2)(x+1)=-3(x+1)(x-1)=0$에서 $x=1$일 때 최댓값 4를 가지므로 최댓값이 정수이므로 조건을 만족합니다.

$a=10$인 경우, $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$에서 $x=1$을 중근으로 가지며, $1\le x<2$에서 $f(x)=-(x-1)^2(x-2)$입니다.

$f'(x)=-(x-1)^2-2(x-1)(x-2)=-(x-1)(3x-5)$에서

$x=\frac{5}{3}$일 때 최댓값 $\frac{4}{27}$를 가지므로 정수가 아니므로 조건에 맞지 않습니다.

즉, $a=2$이며, $g(x)=-3x^2+2x+3$,

$f(x)=\begin{cases}(x-2)(x+1)^2 & (x<-1)\\ -(x-2)(x+1)^2 & (-1\le x<2)\\ -x^3+x^2-x+6 & (x\ge2)\end{cases}$ 입니다.

함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=0$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=9$이므로 미분가능성을 만족합니다.

함수 $f(x)$의 최댓값은 4이고, $f(3)=-27+9-3+6=-15$이므로 $M-f(3)=19$입니다.

15. 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용한 문제입니다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 역함수 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭입니다.

두 함수는 증가함수이므로 두 곡선의 교점 역시 직선 $y=x$ 위에 있으며, 한 교점의 좌표를 (α,α)라고 하면 다른 한 교점의 좌표를 $(\alpha+8,\alpha+8)$로 놓을 수 있습니다.

$f(x)=a\times3^{\frac{x}{4}}-b$에 대입하면

$\alpha=a\times3^{\frac{\alpha}{4}}-b$, $\alpha+8=a\times3^{\frac{\alpha+8}{4}}-b$에서

$8=a\times(3^{\frac{\alpha+8}{4}}-3^{\frac{\alpha}{4}})=8a\times3^{\frac{\alpha}{4}}$, $a\times3^{\frac{\alpha}{4}}=1$이며, 이때 $a=3^{-\frac{\alpha}{4}}$, $b=1-\alpha$가 성립합니다.

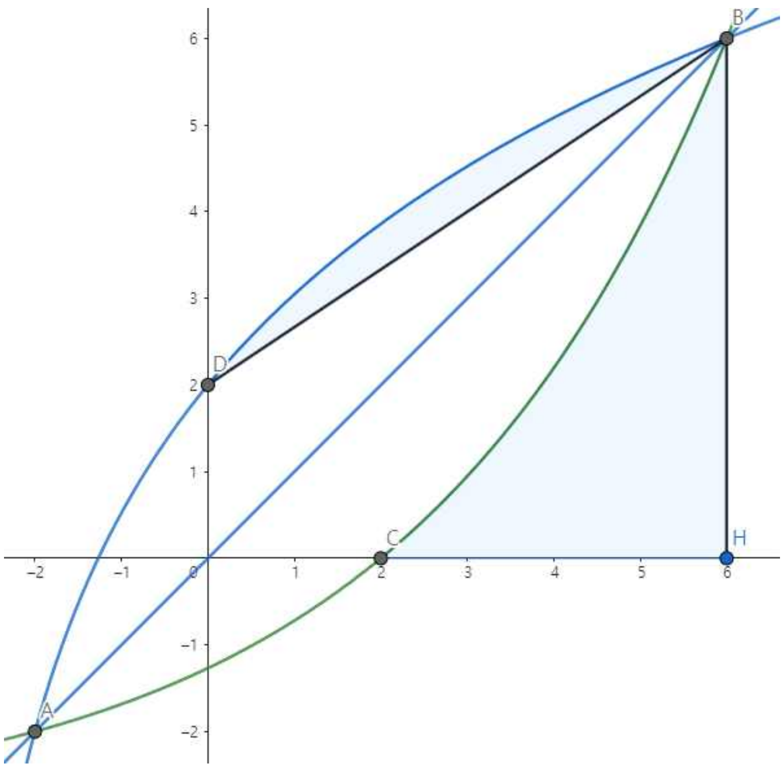
$\alpha=1-b$라고 하면 $a=3^{\frac{b-1}{4}}$이며, 이때 $f(x)=3^{\frac{x+b-1}{4}}-b$,

$g(x)=4\log_3(\frac{x+b}{3^{\frac{b-1}{4}}})=4\log_3(x+b)-b+1$입니다.

$f(6)=3^{\frac{5+b}{4}}-b$, $g(27-b)=13-b$에서

$f(6)-g(27-b)=3^{\frac{5+b}{4}}-13=-4$, $3^{\frac{5+b}{4}}=9$, $b=3$이고

$a=\sqrt{3}$입니다. 즉, $f(x)=3^{\frac{x+2}{4}}-3$, $g(x)=4\log_3(x+3)-2$입니다.



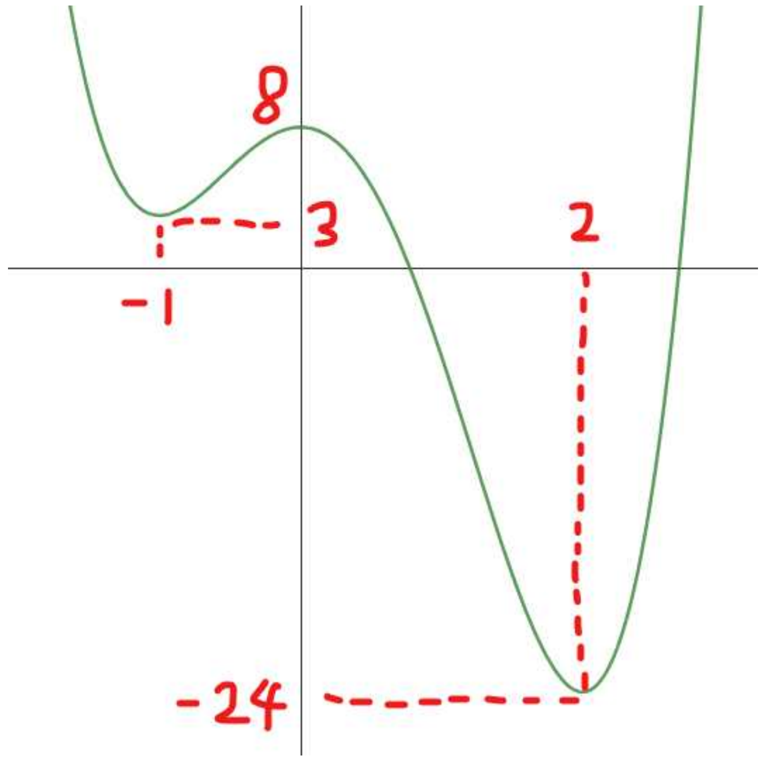
곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 좌표는 (2, 0)이며, 두 점 A, B의 좌표는 각각 (-2, -2), (6, 6)입니다.
곡선 $y=g(x)$와 y축이 만나는 점을 D라고 하면 두 점 C, D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이며, 그림에서 선분 BC와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 선분 BD와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같습니다.
따라서 S_1+S_2는 삼각형 BCH의 넓이와 같으며, 삼각형 BCH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$입니다.

16. 등비수열에 대한 문제입니다.
등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 4이므로 $a_3=\frac{1}{2}\times 4^2=8$입니다.

17. 부정적분에 대한 문제입니다.
$f'(x)=3x^2+4x+6$에서 $f(x)=x^3+2x^2+6x+8\,(f(0)=8)$이며, $f(2)=8+8+12+8=36$입니다.

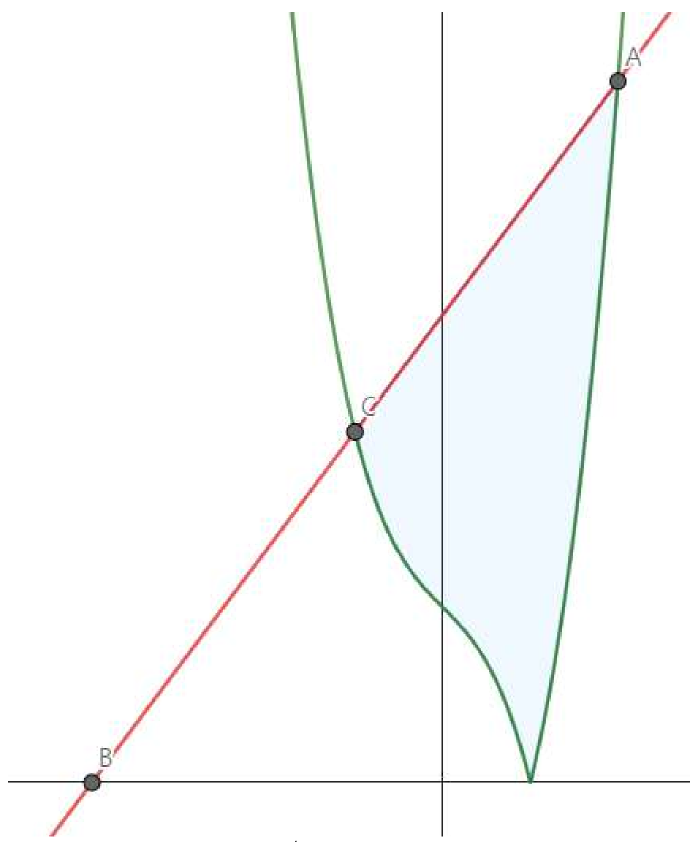
18. 지수에 미지수가 포함된 부등식을 푸는 문제입니다.
$(\frac{1}{2})^{f(x)}\ge(\frac{1}{2})^{g(x)}$에서 밑이 0과 1 사이의 값이므로 부등호의 방향을 바꿔서 $f(x)\le g(x)$가 성립해야 합니다.
$(x-2)^2\le 4x-11$, $x^2-4x+4\le 4x-11$, $x^2-8x+15\le 0$, $(x-3)(x-5)\le 0$에서 $3\le x\le 5$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 3, 4, 5로 모두 더하면 12입니다.

19. 도함수를 방정식에 활용하는 문제입니다.
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+8$이라고 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$이며,
$f'(-1)=f'(0)=f'(2)=0$입니다.
이때, 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같습니다.



방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값은 3, 8로 모두 더한 값은 11입니다.

20. 적분으로 넓이를 구하는 문제입니다.
점 A의 좌표는 $(2, 7+a)$입니다(원래는 $(2, |7+a|)$여야 하지만, a가 양수이므로 $|7+a|=7+a$).
이 점을 지나면서 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선은 $y=\frac{4}{3}(x-2)+7+a$이며, 이 직선과 x축과의 교점 B의 좌표는 $(2-\frac{3}{4}(7+a), 0)$입니다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로 $\sqrt{\left\{\frac{3}{4}(7+a)\right\}^2+(7+a)^2}=10$에서
$\frac{9}{16}(7+a)^2+(7+a)^2=100$, $\frac{25}{16}(7+a)^2=100$, $(7+a)^2=64$에서 $a=1$이고, $f(x)=|x^3+x-2|$입니다. $f(x)$는 $x<1$인 경우 $f(x)=-x^3-x+2$, $x\ge 1$인 경우 $f(x)=x^3+x-2$입니다.



직선 AB, 즉 직선 $y=\frac{4}{3}(x-2)+8$은 곡선 $y=f(x)$와 점 A에서 만나고, 다른 한 점 C에서도 만납니다. 점 C의 x좌표는 1보다 작

습니다(방정식 $x^3+x-2=\frac{4}{3}(x-2)+8$의 근은 $x=2$뿐임).

이때 방정식 $-x^3-x+2=\frac{4}{3}(x-2)+8$을 풀면

$-3x^3-3x+6=4x-8+24$, $3x^3+7x+10=0$,

$(x+1)(3x^2-3x+10)=0$에서 $3x^2+3x+10>0$이므로 $x=-1$이며, 점 C의 좌표는 (-1, 4)입니다.

이때 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{2}\left\{\frac{4}{3}(x-2)+8-|x^3+x-2|\right\}dx$와 같습니다.

$\int_{-1}^{2}(\frac{4x+16}{3}-|x^3+x-2|)dx=$

$\int_{-1}^{1}(\frac{4x+16}{3}+x^3+x-2)dx+\int_{1}^{2}(\frac{4x+16}{3}-x^3-x+2)dx=$

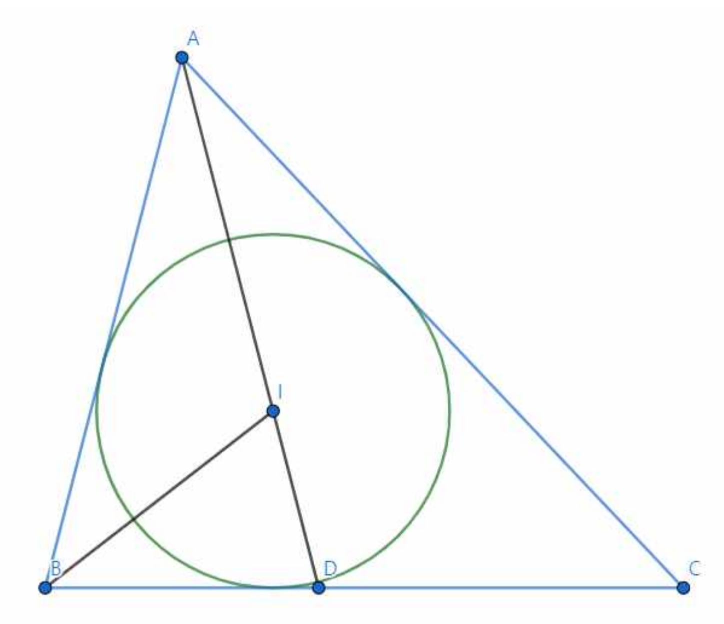
$\int_{-1}^{1}(x^3+\frac{7}{3}x+\frac{10}{3})dx+\int_{1}^{2}(-x^3+\frac{x}{3}+\frac{22}{3})dx$에서

$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{7}{6}x^2+\frac{10}{3}x\right]_{-1}^{1}=\frac{20}{3}$,

$\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{6}+\frac{22}{3}x\right]_{1}^{2}=-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}+\frac{22}{3}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{20}{3}-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}+\frac{22}{3}=14-\frac{13}{4}=\frac{43}{4}$이며, $p+q=47$입니다.

21. 코사인법칙을 활용한 문제입니다.



주어진 그림에서 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$가 성립합니다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CD}}$가 성립하며, $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:4$입니다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$라고 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{BD}}^2=6^2+6^2-2\times6\times6\times\cos\theta=72-72\cos\theta$이며, 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DC}}^2=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos\theta=100-96\cos\theta$입니다.

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:4$에서 $\overline{\mathrm{BD}}^2:\overline{\mathrm{DC}}^2=9:16$이며, 이때

$(72-72\cos\theta):(100-96\cos\theta)=9:16$입니다.

$100-96\cos\theta=\frac{16}{9}(72-72\cos\theta)=128-128\cos\theta$, $32\cos\theta=28$

에서 $\cos\theta=\frac{7}{8}$이므로 ㄱ의 $\cos(\angle\mathrm{BAD})=\frac{7}{8}$은 옳은 선지이며, $A=7$입니다.

$\overline{\mathrm{BD}}^2=72-72\cos\theta$에 $\cos\theta=\frac{7}{8}$을 대입하면 $\overline{\mathrm{BD}}^2=9$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$이며, 그림에서 $\angle\mathrm{ABI}=\angle\mathrm{DBI}$이므로 $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AI}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DI}}$가 성립합니다.

$\overline{\mathrm{BD}}=3$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=6$에서 $\overline{\mathrm{AI}}=4$, $\overline{\mathrm{DI}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{AI}}=2\overline{\mathrm{DI}}$입니다. 즉, ㄴ은 옳은 선지이며, $B=8$입니다.

삼각형 AIB에서 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AI}}=4$, $\cos(\angle\mathrm{BAI})=\frac{7}{8}$이며, 코사인법칙을 적용하면 $\overline{\mathrm{BI}}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\frac{7}{8}=10$, $\overline{\mathrm{BI}}=\sqrt{10}$이므로 ㄷ은 옳은 선지이며, $C=9$입니다.

따라서 $A\times B\times C=7\times8\times9=504$입니다.

22. 함수의 극대, 극소를 활용하여 추론하는 문제입니다.

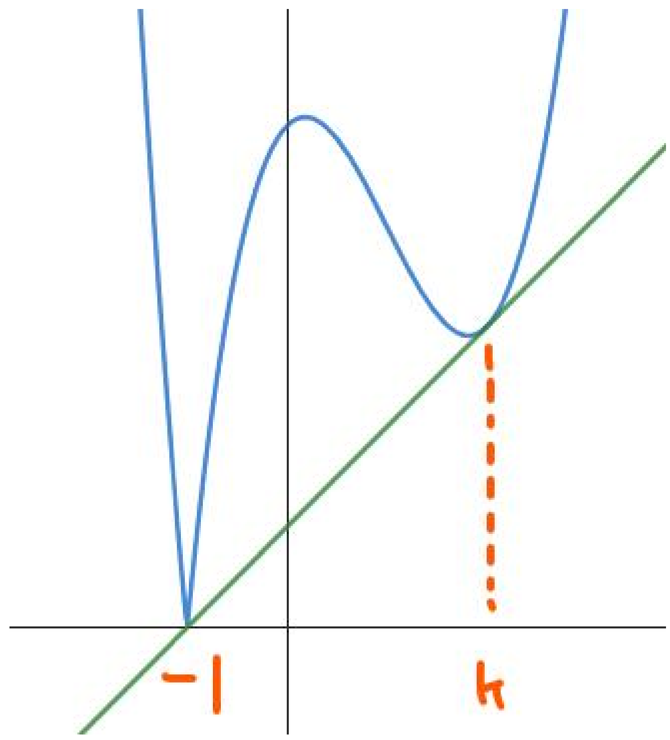
$g(x)=|f(x)|-x$에 대하여 $g(-1)=|f(-1)|+1=1$에서 $f(-1)=0$입니다.

방정식 $g(x)=1$, 즉 $|f(x)|=x+1$의 두 근이 -1, k이므로 직선 $y=x+1$은 곡선 $y=|f(x)|$와 서로 다른 두 점에서 만납니다.

만약 $x=-1$에서 직선 $y=x+1$와 곡선 $y=|f(x)|$가 서로 접한다면 $\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|-|f(-1)|}{x-(-1)}=1$이어야 하는데, 이를 만족하는 삼차함수 $f(x)$는 존재하지 않습니다.

즉, $x=-1$에서 직선 $y=x+1$와 곡선 $y=|f(x)|$는 서로 접하지 않습니다.

함수 $g(x)=|f(x)|-x$의 최솟값이 1이 되기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $|f(x)|\geq x+1$이 성립해야 합니다.



조건을 만족하는 경우는 그림과 같이 $x=k$에서 곡선 $y=|f(x)|$가 직선 $y=x+1$에 접할 때입니다.

즉, $x\geq-1$에서 $f(x)-(x+1)=(x+1)(x-k)^2$로 놓을 수 있으며, $f(x)=(x+1)(x-k)^2+x+1$입니다.

함수 $g(x)=|f(x)|-x$는 $x<-1$에서는 극값을 갖지 않고, $x=-1$과 $x=k$에서 극솟값을 갖습니다. $x\geq-1$에서 $g(x)=f(x)-x=(x+1)(x-k)^2+1$이며,

$g'(x)=(x-k)^2+2(x+1)(x-k)=(x-k)(3x-k+2)$에서

$x=\frac{k-2}{3}$일 때 극댓값을 갖습니다.

$g(\frac{k-2}{3})=\frac{k+1}{3}\times(\frac{-2-2k}{3})^2+1=5$에서 $\frac{4(k+1)^3}{27}=4$, $k=2$입니다.

따라서 $f(x)=(x+1)(x-2)^2+x+1$로 $f(k+2)=f(4)=25$입니다.