2024학년도 수능완성출제분석서(수.완.출)
- 수학Ⅱ -

by. 17학번머스크(OrbiID)

"이걸 활용한 넌 잘 될거야"

- 대상

수학 2-3등급 이상

- 배경과 목표

'풀 것도 많은데, EBS를 다 풀어야해?' '선별해준것만 풀어도 되려나? 찝찝한데?'

그래서 왜 선별했는지 그리고 어떻게 출제될 수 있는지까지
선별하였습니다. 또한, 6월부터 수학 또한 심심찮게 ebs에서 출제된 요소들과 표현들이 자주나오다보니
수능특강에 비해서 난이도가 비교적 높은 수능완성에서 더더욱 좋은 POINT들을 연구하여 문제 몇 놈이
출제될 수 있다고 판단하였습니다.

- 활용방안

좌측에는 문제들이 오른쪽에는 출제분석이 적혀있습니다.
문제푸는 속도가 정말 빠르신 분들은 그냥 수능완성 사서 다 풀고 이 칼럼을 읽어주면 좋고,
할 것이 산더미이신 분들은 해당 1) 문제를 풀어버리고, 2) 한번 더 출제 분석을 정독
하시면 도움이 될 것 같습니다. !

- 이상 예상 질문들

Q. 선별의 기준은?

A. 어디서든 볼 수 있는 문제들과 본인이 2등급 이상이고 정상적인 루틴 (개념서,기출서,인강교재 등을 '적당히' 풀어오며살았음)
으로 살아왔다면, 지금 당장 급하게 풀지 않아도 되는 것들은 제외하였습니다.

Q. EBS 선별을 너(17머스크)가 왜 해?

A. 본인은 문제 판매 타율이 좋은 편이고, 유명한 강사분들 밑에서 조교로 일하였기에(비밀조항) 오르비에서 많은 고수들이 계시지만,
현 수험생들에게 도움이 될 만한 자료를 일단 만들어 보고 싶었고, EBS를 단순 선별 이상으로 활용할 수 있겠다고 판단하여
자료를 만들어본것이고 무료로 배포하고자하니, 양해바랍니당

Q. 기하는?

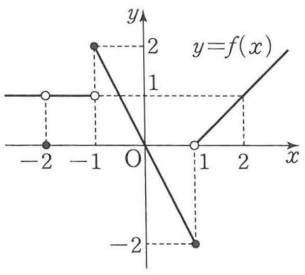
A. 안(못)해요

수능완성

수학Ⅱ. 1. 함수의 극한

[42page 2번]

1. [1]함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x \to 2-}f(x-1)$의 값은?

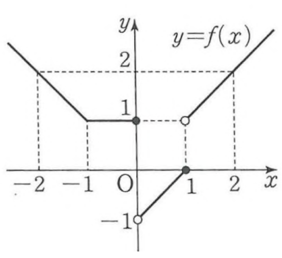
① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

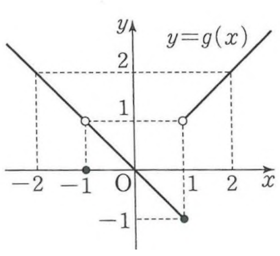
[42page 3번]

2. [2]두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$$\lim_{x \to 1-}f(x)+\lim_{x \to 1+}g(x)=f(k)+\lim_{x \to -1}g(x)$$

를 만족시키는 상수 k의 값은? (단, $-2 \le k \le 2$)





① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[44page 10번]

3. [3]일차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2,\ \lim_{x \to 1} \frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)} = 2$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[45page 14번]

4. [4]다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-ax^2}{x+1} = 4$

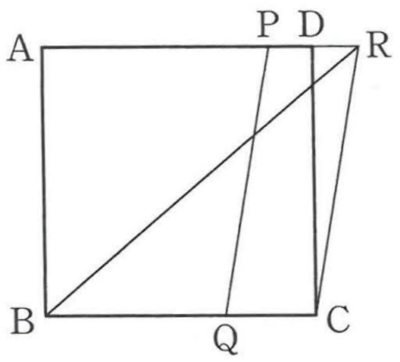
(나) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2} = 4$

$f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[46page 15번]

5. [5]그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 변 AD 위에 $\overline{\mathrm{PD}}=t\ (0<t<1)$인 점 P가 있다. 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하고 점 C를 지나고 직선 PQ와 평행한 직선이 직선 AD와 만나는 점을 R라 하자. $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}$의 값은?

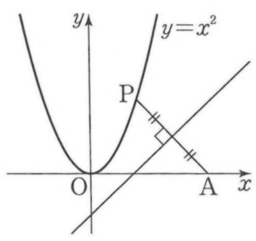


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

[46page 16번]

6. [6]그림과 같이 $t\neq 4$인 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$과 x축 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이 있다. 선분 PA의 수직이등분선의 x절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

[46page 19번]

7. [7]정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 2$일 때, $f(x)=\lvert x-1 \rvert$이다. (나) $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

양의 실수 t에 대하여 직선 $y=\dfrac{x}{t}$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim\limits_{t \to 4-} g(t)+g(6)+\lim\limits_{t \to 8+} g(t)$의 값을 구하시오.

[48page 22번]

8. [8]이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$가 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+a}{x^2-x} & (x<0) \\ x+b & (0 \leq x < 2) \\ f(x) & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x \geq 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 때, 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[48page 23번]

9. 9)이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<1) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (1 \le x \le 3) \\ \dfrac{1}{6} & (x>3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0,\ k)$라 할 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

[48page 24번]

10. 10)정의역이 $\{x|x \ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 3$일 때, $f(x)=(x-1)^2$이다.
(나) 3 이상의 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x-3)+3$이다.

$t \ne 1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=tx+1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=2$
ㄴ. $\lim_{t \to 1+} g(t)=\infty$
ㄷ. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 실수 a의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$일 때, $a_3=-14+6\sqrt{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[49page 26번]

11. 11)두 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x-|3x|+4$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & (x \neq -1,\ x \neq 2) \\ a & (x=-1) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a\times b$의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{7}{8}$ ③ 1

④ $\dfrac{9}{8}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

[52page 1번]

12. 12)다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=5$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율이 $\dfrac{1}{2}f'(2)$의 값과 같을 때, $f(4)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

[129page 12번]

13. [13]함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키고

$$f(x)=x-1\ \ (0 \le x < 2)$$

이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 0$

ㄴ. 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x+1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[144page 20번]

14. [14]실수 k에 대하여 두 함수 $f(x)=|x|+|x-2|$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+k$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$라 하자. $h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k \to a+} h(k)=9$일 때, 실수 a의 최솟값은 p이다. $h(p)$의 값을 구하시오.

[153page 12번]

15. [15]최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{x^3+x+1}{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to -1} \lvert g(x) \rvert = \infty$
(나) $\lim_{x \to 3} g(x) = \infty$

$f(5)$의 값은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

[163page 6번]

16. [16]두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \le -1) \\ -x & (-1 < x \le 1) \\ x+1 & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

수능완성

수학Ⅱ. 2. 다항함수의 미분

[53page 5번]

17. 17)함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<0) \\ 1-x^3 & (0 \le x < 1) \\ 3-3x & (x \ge 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)+1}{x}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[53page 6번]

18. 18)함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le k$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+10x$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)+f(k)$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[54page 9번]

19. [19]함수 $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$가

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{f\left(2+\frac{3}{x}\right)-21\right\}=f(2)$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[55page 10번]

20. [20]다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $f(4)=10$
(나) $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\leq 6$이다.

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

[55page 12번]

21. [21]좌표평면 위에 네 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t-x$의 아랫부분과 정사각형의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않도록 하는 양의 실수 m의 최솟값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

[56page 14번]

22. [22]자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[n, n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$가 있다. 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[56page 15번]

23. [23]실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=x^3+x^2+|x-a|+2$

의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[57page 17번]

24. [24]최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 작은 것부터 차례로 나열하면 등차수열을 이룬다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 -16일 때, $f(0)$의 값은?

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

[57page 18번]

25. 25)두 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$, $g(x)=2x+3$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 3이다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? (단, a, b는 상수이다.)

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

[58page 20번]

26. 26)최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+3$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. (나) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다. (다) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$f(2)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[58page 21번]

27. [27]함수 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접한다. (나) 함수 $\|f(x)\|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 2이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이다.
ㄷ. 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 5이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

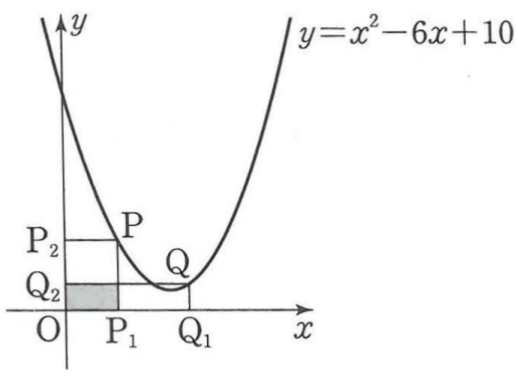
[59page 23번]

28. [28]곡선 $C: y=2x^4-3x^2-2x+4$ 위의 x좌표가 양수인 점에서 접하는 직선 중 기울기가 최소인 직선의 y절편이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

[60page 24번]

29. 29)그림과 같이 양수 t에 대하여 곡선 $y=x^2-6x+10$ 위의 x좌표가 t인 점을 P, x좌표가 $t+2$인 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P_1, P_2라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2라 하자. 원점 O에 대하여 두 사각형 PP_2OP_1, QQ_2OQ_1의 내부의 공통부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?



① $2+2\sqrt{2}$ ② $4+\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{2}$
④ $5+\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

[60page 25번]

30. 30)실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서 함수

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$$

의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않을 때 $g'(a-1)+g'(a+1)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[61page 29번]

31. [31]최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 3개이고, 극솟값은 모두 0이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[61page 30번]

32. [32]최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.
(나) x에 대한 방정식 $|f(x)|-mx=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 m의 값은 $\frac{9}{2}$뿐이다.

함수 $|f(x)|$의 극댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[62page 32번]

33. 33)두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-9x^2+12x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x & (x<0) \end{cases},$$

$$g(x)=mx+1$$

이 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

[62page 33번]

34. 34)최고차항의 계수가 1이고 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-f'(x)$$

라 하자. $f(0)=g(0)=0$이고, $x \leq k$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq 0$을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 0일 때, $f(3)$의 최댓값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[120page 20번]

35. [35]최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $|f(x)-2x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-2x}{x^2}=16$

(다) $f(1)>15$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

[121page 22번]

36. [36]최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\times f'(x) & (x<1) \\ -f(x)\times f'(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(다) $h(k)=2$이고 $\lim_{t \to k-} h(t) > \lim_{t \to k+} h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재한다.

$g(-1)=20$일 때, $g(0)\times g(3)$의 값을 구하시오.

[133page 22번]

37. [37]두 상수 a, b와 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<k) \\ -x^2+13x+b & (x\geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 실수 c에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 c의 값의 합이 8일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 d의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[145page 22번]

38. [38]다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\leq|xg(x)|$, $g(0)=-6$인 연속함수 $g(x)$가 존재한다.

[157page 22번] (미분)

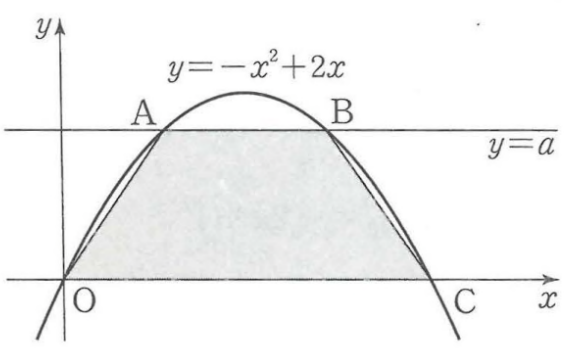
39. 39)최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x \geq 2) \\ \dfrac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2} & (x<2) \end{cases}$$

는 $x=2$에서 미분가능하다. $f(6)$의 값을 구하시오.

[168page 20번]

40. 40)곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=a$ $(0<a<1)$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=-x^2+2x$가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 C라 하자. 사각형 OCBA의 넓이의 최댓값을 S라 할 때, $27S$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)



[169page 22번]

41. [41)] $t>0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$$

의 최댓값을 $g(t)$, 최솟값을 $h(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$ $(a>0)$에서 미분가능하지 않다. $g(2a)+h(3a)=pa+q$일 때, 두 유리수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오.

수능완성

수학Ⅱ. 3. 다항함수의 적분

[66page 2번]

42. [42]함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int(5x-k)dx-\int(x+k)dx$$

이고 $f(1)=0$, $f'(1)=2$일 때, $f(2)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[67page 6번]

43. [43]$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$의 값은?

① $\frac{83}{6}$ ② 14 ③ $\frac{85}{6}$
④ $\frac{43}{3}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

[68page 10번]

44. [44]양의 상수 k와

$f(x)=(x^2-4)(x+a)$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않을 때, $\int_0^{2a} f'(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.)

[69page 13번]

45. [45]삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $4\int_{-1}^{1} f(x)dx+5\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[71page 21번]

46. 46)함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2-4)dt$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g'(x)=f(x)$, $g(2)=0$을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[72page 22번]

47. 47)최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f'(t)dt+(x+1)f(x)+1$$

이라 할 때, $g(1)=8$이다. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가질 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[73page 26번]

48. [48]양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 18일 때, $f(-1)$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[73page 27번]

49. [49]함수 $f(x)=x^3-2x^2+k$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[73page 29번]

50. [50]삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=3x^2-2x+a$
(나) $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-1}{x}=-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[74page 30번]

51. [51]실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 상수 a, b에 대하여
$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2+ax+b & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-3)=f(x+3)$이다.

$\int_{-33}^{-29}f(x)dx-\int_{57}^{60}f(x)dx$의 값은?

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[74page 31번]

52. [52]역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 a가 최솟값을 가질 때, $\int_{2}^{10} g(x)dx$의 값을 구하시오.

[75page 33번]

53. [53]수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t+k$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치는 0이고 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는 -5이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[75page 34번]

54. 54)시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때, $2k$의 값을 구하시오.

[117page 11번]

55. 55)다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

(가) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=3x^2+ax-\int_0^1 (2x-1)f(t)dt$이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[127page 6번]

56. [56)]수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2t^2+at+2$$

이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량이 $\frac{100}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

삭제

[128page 10번]

57. [57]삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

이다. $f(0)=5$, $g(1)=12$일 때, $\int_{0}^{2} g(x)dx$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[130page 14번] (적분)

58. [58]최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)-x=0$은 세 실근 0, 1, 2를 갖는다. 함수 $g(x)$가 $0 \le x \le 2$에서 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시킬 때, $\int_{0}^{2n} g(x)dx=72$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[132page 19번]

59. 59)다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)=x^2-2x+x\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[164page 10번]

60. 60)다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2\int_p^x f(t)dt-\int_p^x \{f'(t)\}^2 dt=2-3x$$

를 만족시킨다. $f'(1)=-2$일 때, $p+f(2)$의 값은? (단, p는 상수이다.)

① -1 ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

이하 해설

1) [정답] ②

[해설]
함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같으므로
$\lim_{x \to -1+} \{f(x)-2\}=0$
함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로
$\lim_{x \to 2-} f(x-1)=\lim_{x \to 1-} f(x)=-2$
따라서 $\lim_{x \to -1+} \{f(x)-2\}+\lim_{x \to 2-} f(x-1)=0+(-2)=-2$

2) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x \to 1-} f(x)=0,\ \lim_{x \to 1+} g(x)=1,\ \lim_{x \to -1} g(x)=1$
이므로 $0+1=f(k)+1$에서 $f(k)=0$
따라서 그림에서 $f(1)=0$이므로 $k=1$이다.

3) [정답] 4

[해설]
$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)이라 하면
$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0}(ax+b)=b=2$

$$\lim_{x \to 1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x \to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)}=\lim_{x \to 1}\frac{3(x+1)}{ax+2}$$
$$=\frac{3\lim_{x \to 1}(x+1)}{\lim_{x \to 1}(ax+2)}=\frac{3(1+1)}{a+2}=\frac{6}{a+2}=2$$

에서 $a+2=3$이므로 $a=1$
따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(2)=2+2=4$

4) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로 $f(x)-ax^2=4x+b$ (b는 상수)라 하자.
조건 (나)에서 $x \to -2$일 때, 극한값이 존재하고
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,
$\lim_{x \to -2} f(x)=\lim_{x \to -2}(ax^2+4x+b)=4a-8+b=0$
에서 $b=-4a+8$ …… ㉠

$$\lim_{x \to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x \to -2}\frac{ax^2+4x-4a+8}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(ax-2a+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}(ax-2a+4)=-4a+4=4$$

에서 $a=0$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$
따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(1)=4+8=12$

5) [정답] ⑤

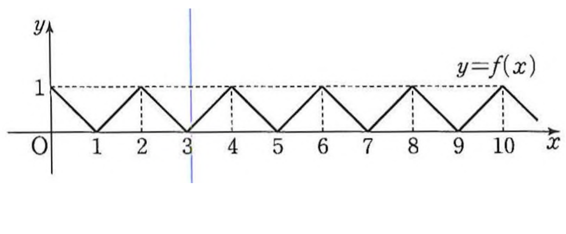
[해설]
사각형 PQCR가 평행사변형이므로
$\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{PR}}-\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{QC}}-\overline{\mathrm{PD}}=1-t$
즉, 직각삼각형 ABR에서
$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AR}}=3+(1-t)=4-t$
이므로
$\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$
따라서
$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{t\left(5+\sqrt{t^2-8t+25}\right)}{25-\left(t^2-8t+25\right)}$
$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{t\left(5+\sqrt{t^2-8t+25}\right)}{t(8-t)}=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{5+\sqrt{t^2-8t+25}}{8-t}$
$=\dfrac{5+5}{8}=\dfrac{5}{4}$

6) [정답] ②

[해설]
두 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$, $\mathrm{A}(4, 0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{t+4}{2}, \dfrac{t^2}{2}\right)$
직선 PA의 기울기는 $\dfrac{t^2}{t-4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{t-4}{t^2}$이다.
즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은
$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{t-4}{t^2}\left(x-\dfrac{t+4}{2}\right)$
이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로
$0-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\dfrac{t+4}{2}\right\}$
$f(t)-\dfrac{t+4}{2}=\dfrac{t^4}{2(t-4)}$
$f(t)=\dfrac{t^4}{2(t-4)}+\dfrac{t+4}{2}=\dfrac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$
따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{16}{t^4}}{2\left(1-\dfrac{4}{t}\right)}=\dfrac{1}{2}$

7) [정답] 18

[해설]
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{x}{t}$는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$인 직선이므로 $0<t<2$일 때, $g(t)=1$

자연수 n에 대하여 $t=2n$일 때, $g(t)=2n$

$2n<t<2n+2$일 때, $g(t)=2n+1$

즉, $2<t<4$일 때 $g(t)=3$이므로 $\lim_{t\to 4-}g(t)=3$

$8<t<10$일 때 $g(t)=9$이므로 $\lim_{t\to 8+}g(t)=9$

따라서 $\lim_{t\to 4-}g(t)+g(6)+\lim_{t\to 8+}g(t)=3+6+9=18$

8) [정답] ③

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$

이때 $\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=b$이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=b$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x+a}{x^2-x}=b$에서

$x\to 0-$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

그러므로 $a=0$이고

$b=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{x+1}{x-1}=-1$

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$

$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

즉, $f(2)=1$

한편, 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x\ge 2$에서 최솟값이 0이므로

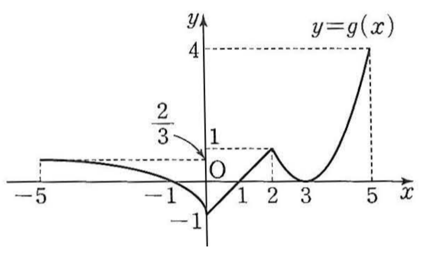
$f(x)=(x-k)^2$ (단, k는 2보다 큰 상수)로 놓을 수 있다. 이때 $f(2)=1$이므로

$(2-k)^2=1$

$k>2$이므로 $k=3$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1} & (x<0)\\ x-1 & (0\le x<2)\\ (x-3)^2 & (x\ge 2)\end{cases}$

이고 닫힌구간 $[-5,5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5,5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은 $4+(-1)=3$

9) [정답] 11

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1+} g(x) = g(1)$에서

$\frac{1}{2} = \frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$ …… ㉠

또 $\lim_{x\to 3-} g(x) = \lim_{x\to 3+} g(x) = g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)} = \frac{1}{6}$, $f(3)=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-2x = a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x) = ax^2 - 2(2a-1)x + 3a$

$= a\left(x - \frac{2a-1}{a}\right)^2 - \frac{a^2-4a+1}{a}$ …… ㉢

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1 \le x \le 3$에서 $f(x) \ne 0$이어야 한다.

(ⅰ) $\frac{2a-1}{a} \le 1$인 경우

$2a-1 \le a$, $a \le 1$

즉, $0 < a \le 1$인 경우 $f(1) = 2 > 0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\frac{2a-1}{a} \ge 3$인 경우

$2a-1 \ge 3a$

$a \le -1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $1 < \frac{2a-1}{a} < 3$, 즉 $a > 1$인 경우

㉢에서 $-\frac{a^2-4a+1}{a} > 0$이어야 하므로

$a^2 - 4a + 1 < 0$, $2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$

즉, $1 < a < 2+\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$0 < a < 2+\sqrt{3}$이고, $k = f(0) = 3a$이므로

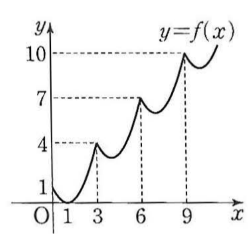
$0 < k < 6+3\sqrt{3}$

이때 $11 < 6+3\sqrt{3} < 12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 11이다.

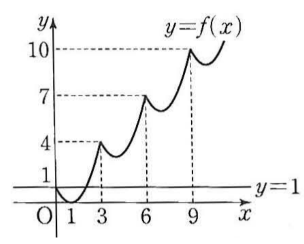
10) [정답] ③

[해설]

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

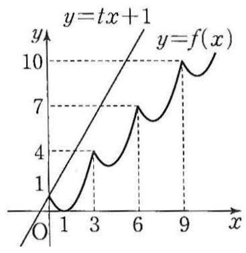


ㄱ. $t=0$일 때, 직선 $y=1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나므로 $g(0)=2$ (참)



ㄴ. $t>1$일 때, 직선 $y=tx+1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0,1)$에서만 만난다.

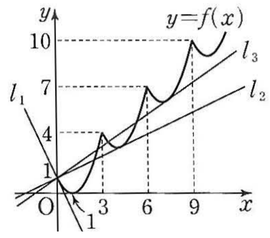
즉, $t>1$일 때, $g(t)=1$이므로 $\lim_{t\to 1+} g(t)=1$ (거짓)



ㄷ. 그림과 같이 점 $(0,1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접하는

직선을 l_1, $3<x<6$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고

점 $(0,1)$을 지나는 직선을 l_2, $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0,1)$을 지나는 직선을 l_3, $\cdots$이라 하고, 자연수 n에 대하여 직선 l_n의 기울기를 t_n이라 하자.



$(x-1)^2=tx+1$에서 $x^2-(t+2)x=0$이므로

$t=-2$일 때 직선 $y=-2x+1$은 점 $(0,1)$에서 곡선

$y=(x-1)^2$에 접한다.

즉, $t_1=-2$이고 $t\le -2$일 때 $g(t)=1$, $-2<t<t_2$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 불연속이고 $a_1=-2$이다.

또 $g(t_2)=3$이고 $t_2<t<t_3$일 때 $g(t)=4$이므로

함수 $g(t)$는 $t=t_2$에서 불연속이고 $a_2=t_2$이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$이 $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$, 즉 $x^2-(a_3+14)x+54=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a_3+14)^2-4\times 54=0$

$(a_3+14)^2=4\times 9\times 6$

$a_3>0$이므로 $a_3+14=6\sqrt{6}$

그러므로 $a_3=-14+6\sqrt{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11) [정답] ④

[해설]

(i) $x<0$일 때

$g(x)=x+3x+4=4x+4$이므로 $x\ne -1$일 때

$$h(x)=\frac{x^2-x-2}{4x+4}=\frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)}=\frac{x-2}{4}$$

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$$h(-1)=\lim_{x\to -1} h(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{4}=-\frac{3}{4}$$

이어야 한다.

즉, $a=-\frac{3}{4}$

(ii) $x\ge 0$일 때

$g(x)=x-3x+4=-2x+4$이므로 $x \neq 2$일 때

$h(x)=\dfrac{x^2-x-2}{-2x+4}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)}=-\dfrac{x+1}{2}$

그러므로 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(2)=\lim_{x \to 2} h(x)=\lim_{x \to 2}\left(-\dfrac{x+1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

이어야 한다.

즉, $b=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $a \times b=\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{8}$

12) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x \to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=5$에서 $x \to 2$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2}\{f(x)-1\}=f(2)-1=0$이므로 $f(2)=1$

이때 $\lim_{x \to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x \to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=5$

한편, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{f(4)-1}{2}$이므로

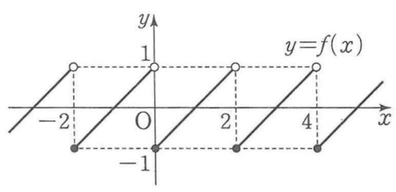
$\dfrac{f(4)-1}{2}=\dfrac{1}{2}f'(2)=\dfrac{5}{2}$

따라서 $f(4)=6$

13) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2 \leq x < 0$일 때, $f(x)=x+1$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-}(x+1)=1$

$2 \leq x < 4$일 때, $f(x)=x-3$이므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2+}(x-3)=-1$

그러므로 $\lim_{x \to 0-} f(x)+\lim_{x \to 2+} f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=2n$ (n은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$가 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

앞의 그림에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x \to 2n-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x \to 2n-}|f(x)|=1$

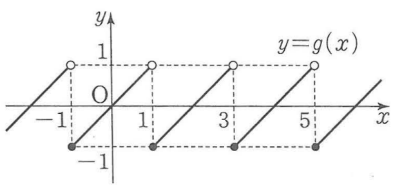
$\lim_{x \to 2n+} f(x) = -1$이므로 $\lim_{x \to 2n+} |f(x)| = 1$

$|f(2n)| = |-1| = 1$

즉, $\lim_{x \to 2n-} |f(x)| = \lim_{x \to 2n+} |f(x)| = |f(2n)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x = 2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x = 2n$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$은 $x = 2n-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$이 $x = n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. $g(x) = f(x+1)$이라 하면 $-1 \le x < 1$일 때 $g(x) = x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = g(x+2)$이므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



정수 n에 대하여

(ⅰ) $\lim_{x \to 2n-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to 2n+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n+} f(x)g(x) = (-1) \times 0 = 0$

$f(2n)f(2n+1) = f(2n)g(2n) = (-1) \times 0 = 0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$$\lim_{x \to 2n-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n+} f(x)f(x+1) = f(2n)f(2n+1)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = 2n$(n은 정수)에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x \to (2n-1)-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)-} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x \to (2n-1)+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)+} f(x)g(x) = 0 \times (-1) = 0$

$f(2n-1)f(2n) = f(2n-1)g(2n-1) = 0 \times (-1) = 0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$$\lim_{x \to (2n-1)-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)+} f(x)f(x+1) = f(2n-1)f(2n)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = 2n-1$ (n은 정수)에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = n$ (n은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14) [정답] 4

[해설]

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (x \le 0) \\ 2 & (0 < x \le 2) \\ 2x-2 & (x > 2) \end{cases}$$에서

(ⅰ) 직선 $y = 2x-2$와 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + k$가 접하는 경우 이차방정식 $2x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2 - 3x + k + 2 = 0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1 = (-3)^2 - 2(k+2) = 0$, $k = \frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3, 4)$이다.

직선 $y=-2x+2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$의 판 별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1, 4)$이다.

직선 $y=2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

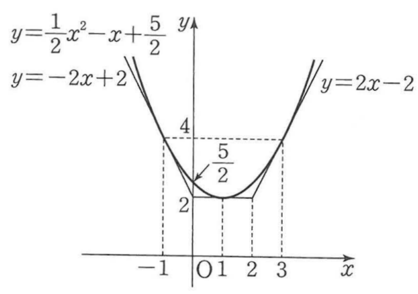
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(-1)^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

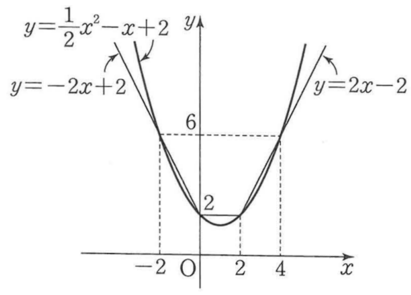
이고, 이때 접점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

따라서 $k=\frac{5}{2}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 세 점 $(3, 4)$, $(-1, 4)$, $(1, 2)$에서 접하므로

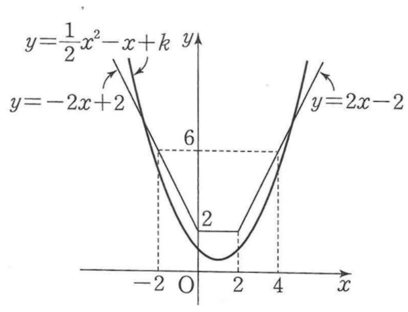
$h\left(\frac{5}{2}\right)=3$



(ⅱ) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(0, 2)$, $(2, 2)$를 지나면, 즉 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2, 6)$, $(4, 6)$에서도 만나므로 $h(2)=4$



(ⅲ) $k<2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<2) \\ 4 & (k=2) \\ 6 & \left(2<k<\frac{5}{2}\right) \\ 3 & \left(k=\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(k>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k\to a+}h(k)=9$에서

$\lim_{k \to a+} h(k) = 9 - h\left(\frac{5}{2}\right) = 9 - 3 = 6$

$2 \le a < \frac{5}{2}$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 $p = 2$

따라서 $h(2) = 4$

15) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x \to -1} |g(x)| = \lim_{x \to -1} \left| \frac{x^3 + x + 1}{f(x)} \right|$

$\lim_{x \to -1} (x^3 + x + 1) = -1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$\lim_{x \to -1} |f(x)| = 0$

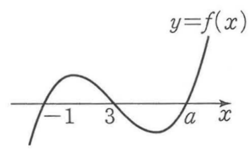
즉, 함수 $f(x)$는 $x + 1$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 + x + 1}{f(x)}$

$\lim_{x \to 3} (x^3 + x + 1) = 31$이므로 $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$이고 함수 $f(x)$는 $x - 3$을 인수로 갖는다.

$f(x) = (x + 1)(x - 3)(x - a)$ (a는 상수)라 하자.

$a > 3$이면 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x \to 3+$일 때 $f(x) \to 0-$이므로

$\lim_{x \to 3+} g(x) = -\infty$이고

$x \to 3-$일 때 $f(x) \to 0+$이므로 $\lim_{x \to 3-} g(x) = \infty$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $a < 3$인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a = 3$이면 $f(x) = (x + 1)(x - 3)^2$, $g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x + 1)(x - 3)^2}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $f(5) = 6 \times 4 = 24$

16) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x = -1$과 $x = 1$에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x = -1$과 $x = 1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x = -1$에서 연속이려면

$\lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1+} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = (1 - a + b) \times (-2 - 1) = -3(1 - a + b)$

$\lim_{x \to -1+} f(x)g(x) = (1 - a + b) \times 1 = 1 - a + b$

$f(-1)g(-1) = (1 - a + b) \times (-2 - 1) = -3(1 - a + b)$

이므로 $-3(1 - a + b) = 1 - a + b$

$a - b = 1$ …… ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x = 1$에서 연속이려면

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=(1+a+b)\times 2=2(1+a+b)$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

이므로 $-(1+a+b)=2(1+a+b)$

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$이므로 $f(x)=x^2-1$

따라서 $f(2)=4-1=3$

17) [정답] ①

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x^2-1)+1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{x}$

$=\lim_{x\to 0-} x=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2-1)=-1$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(1-x^3)=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)\neq\lim_{x\to 0+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1-}|1-x^3|=0$

$\lim_{x\to 1+}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|3-3x|=0$

$|f(1)|=0$

에서 $\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|f(x)|=|f(1)|$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

그런데

$\lim_{x\to 1-}\frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{|1-x^3|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{1-x^3}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}(-x^2-x-1)=-3$

$\lim_{x\to 1+}\frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{|3-3x|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{3(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} 3=3$

에서 $\lim_{x\to 1-}\frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}\neq\lim_{x\to 1+}\frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

18) [정답] ④

[해설]

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x\le k$에서의 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동하거나 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ) $\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k-} (x^3 - 6x^2 + 10x) = k^3 - 6k^2 + 10k$

$\lim_{x \to k+} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+k) = \lim_{x \to 0+} \{f(x) + f(k)\}$

$= f(0) + f(k) = k^3 - 6k^2 + 10k$

$f(k) = k^3 - 6k^2 + 10k$

에서 $\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k+} f(x) = f(k)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = k$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{h \to 0-} \frac{f(k+h) - f(k)}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} \frac{(k+h)^3 - 6(k+h)^2 + 10(k+h) - k^3 + 6k^2 - 10k}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} \frac{3k^2h + 3kh^2 + h^3 - 12kh - 6h^2 + 10h}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} (3k^2 + 3kh + h^2 - 12k - 6h + 10)$

$= 3k^2 - 12k + 10$

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(k) + f(h) - f(k)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{h^3 - 6h^2 + 10h}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} (h^2 - 6h + 10) = 10$

이므로 함수 $f(x)$가 $x = k$에서 미분가능하려면

$3k^2 - 12k + 10 = 10$이어야 한다.

즉, $3k(k-4) = 0$

따라서 $k > 0$이므로 $k = 4$

19) [정답] ②

[해설]

$\frac{1}{x} = t$라 하면 $x \to \infty$일 때, $t \to 0+$이므로

$\lim_{x \to \infty} x\left\{f\left(2 + \frac{3}{x}\right) - 21\right\} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = f(2)$ …… ㉠

㉠에서 $t \to 0+$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t \to 0+} \{f(2+3t) - 21\} = f(2) - 21 = 0$이므로 $f(2) = 21$

이때 $\lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = 3\lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - f(2)}{3t} = 3f'(2)$

이므로 $3f'(2) = f(2) = 21$에서 $f'(2) = 7$

한편, $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$에서

$f(2) = 16 + 4a - 10 + b = 21$이므로

$4a + b = 15$ …… ㉡

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 5$에서

$f'(2) = 24 + 4a - 5 = 7$이므로 $4a = -12$, $a = -3$

$a = -3$을 ㉡에 대입하면

$-12 + b = 15$, $b = 27$

따라서 $a + b = (-3) + 27 = 24$

20) [정답] ④

[해설]
다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$인

c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(4)=10$이므로 $f'(c)=\frac{10-f(2)}{2}$이고, 조건 (나)에 의하여 $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le 6$이므로

$|f'(c)|=\left|\frac{10-f(2)}{2}\right|\le 6$

$|10-f(2)|\le 12$, $-12\le 10-f(2)\le 12$, $-2\le f(2)\le 22$

따라서 $M=22$, $m=-2$이므로

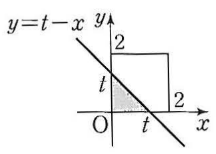
$M-m=22-(-2)=24$

21) [정답] 20

[해설]
(i) $t\le 0$일 때, $f(t)=0$

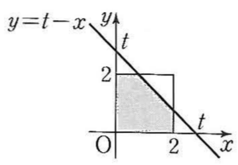
(ii) $0<t\le 2$일 때,

$f(t)=\frac{1}{2}t^2$



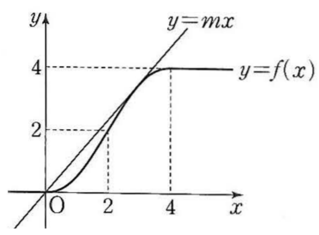
(iii) $2<t<4$일 때,

$f(t)=4-\frac{1}{2}(4-t)^2$



(iv) $t\ge 4$일 때, $f(t)=4$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$가 $2<x<4$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 기울기 m의 값을 구해 보자.

$2<x<4$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$이므로

접점의 x좌표를 s라 하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=ms$ …… ㉠

$f'(x)=-x+4$이므로

$-s+4=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=-s^2+4s$, $s^2=8$

$2 < s < 4$이므로 $s = 2\sqrt{2}$이고 $m = 4 - 2\sqrt{2}$
즉, 함수 $|f(x) - mx|$가 $x = 0$에서만 미분가능하지 않으려면 $m < 0$ 또는 $m \geq 4 - 2\sqrt{2}$
이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값은 $4 - 2\sqrt{2}$이다.
따라서 $a = 4,\ b = -2$이므로
$a^2 + b^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$

22) [정답] 51

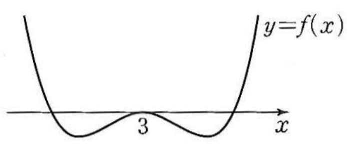
[해설]
닫힌구간 $[n, n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다.
즉, 구간 $[n, n+2]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$이어야 한다. 이때 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5$에서
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ &= 3(x^2 - 6x + 8) \\ &= 3(x-2)(x-4) \end{aligned}$$
이므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f'(x) \geq 0$, 구간 $[2, 4]$에서 $f'(x) \leq 0$, 구간 $[4, \infty)$에서 $f'(x) \geq 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은
2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
이므로 구하는 합은 51이다.

23) [정답] ②

[해설]
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \neq a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
이때
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - a + 2 & (x \geq a) \\ x^3 + x^2 - x + a + 2 & (x < a) \end{cases}$$
에서
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & (x > a) \\ 3x^2 + 2x - 1 & (x < a) \end{cases}$$
$x > a$일 때,
$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$이고 이차방정식 $3x^2 + 2x + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4} = 1^2 - 3 \times 1 = -2 < 0$$
이므로 실수 a의 값에 관계없이 $x > a$인 모든 실수 x에 대하여
$f'(x) > 0$이다.
$x < a$일 때,
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$
이므로 $x < a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이려면 $a \leq -1$이어야 한다.
따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

24) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 $3+a$라 하면 다른 한 실근은 $3-a$이므로

$f(x)=(x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2$ (단, a는 양의 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=\{(x-3)^2-a^2\}(x-3)^2=(x^2-6x+9-a^2)(x^2-6x+9)$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x-6)(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9-a^2)(2x-6) \\ &=2(x-3)\{2(x^2-6x+9)-a^2\} \\ &=2(x-3)\{2(x-3)^2-a^2\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=3\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$이므로

함수 $f(x)$는 $x=3\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -16이므로

$f(x)=(x-3)^4-a^2(x-3)^2$에서

$$f\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16,$$

$$\begin{aligned} f\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)&=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4} \\ &=-16 \end{aligned}$$

즉, $a^4=64$에서 $a^2=8$이므로

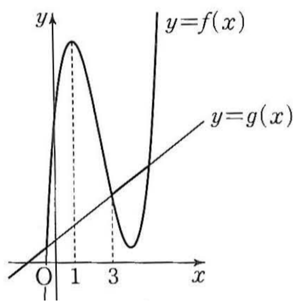
$f(x)=(x-3)^4-8(x-3)^2$

따라서 $f(0)=3^4-8\times3^2=81-72=9$

25) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f'(1)=0$이어야 하므로

$6+2a+b=0$ …… ㉠

$f(3)=g(3)$이어야 하므로

$54+9a+3b+18=9$에서

$3a+b=-21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $b=24$이므로

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 $f(1)+f(4)=29+2=31$

26) [정답] ①

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가

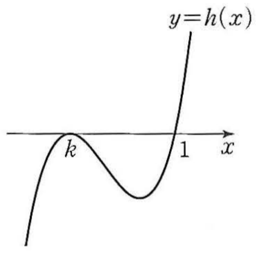
1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

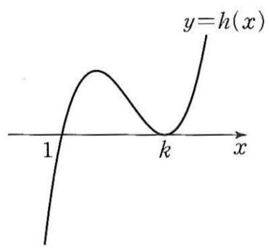
또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$이므로

$h(x)=(x-1)(x-k)^2$ (단, k는 1이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

$h'(x)=(x-k)^2+2(x-1)(x-k)$

$\quad=(x-k)(3x-k-2)$

이고 $h'(x)=0$에서

$x=k$ 또는 $x=\dfrac{k+2}{3}$이므로 $\dfrac{k+2}{3}=0$

$k=-2$

따라서 $h(x)=(x-1)(x+2)^2$이고

$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$

이므로

$f(2)=1\times16+5=21$

27) [정답] ③

[해설]

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad=12x(x^2-x-2)$

$\quad=12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면

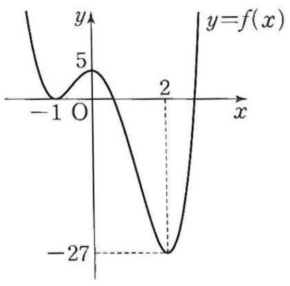
$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$

이어야 한다.

(ⅰ) $f(-1)=0$인 경우

$f(-1)=k-5=0$에서 $k=5$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



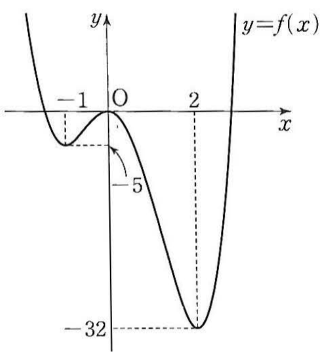
[그림 1]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅱ) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=k=0$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



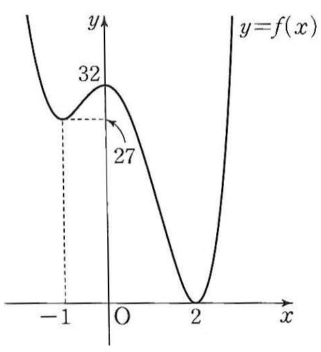
[그림 2]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅲ) $f(2)=0$인 경우

$f(2)=k-32=0$에서 $k=32$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(참)

ㄴ. (ⅰ)에서 $k=5$인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이 아니다.

(거짓)

ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는

모든 k의 값은 $k=5$ 또는 $k=0$이므로 그 합은 5이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28) [정답] ③

[해설]

$y=2x^4-3x^2-2x+4$에서 $y'=8x^3-6x-2$이므로 x좌표가 양수인 점에서 곡선 C에 접하는 접선의 접점의 x좌표를 t, 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=8t^3-6t-2\ (t>0)$

이때 $f'(t)=24t^2-6=0$에서 $t=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-2)	$\searrow$	-4	$\nearrow$

그러므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{19}{8}\right)$이고 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{19}{8}=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y=-4x+\frac{35}{8}$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $\frac{35}{8}$이므로

$p+q=8+35=43$

29) [정답] ②

[해설]

$g(x)=x^2-6x+10$이라 하자.

$g(t)=g(t+2)$에서

$t^2-6t+10=(t+2)^2-6(t+2)+10$

$4t=8,\ t=2$

(ⅰ) $0<t<2$일 때,

$g(t)>g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t+2)=t\{(t+2)^2-6(t+2)+10\}=t^3-2t^2+2t$

이때 $f'(t)=3t^2-4t+2$이고 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-6=-2<0$

이므로 $f'(t)>0$이다.

즉, $0<t<2$에서 함수 $f(t)$는 증가한다.

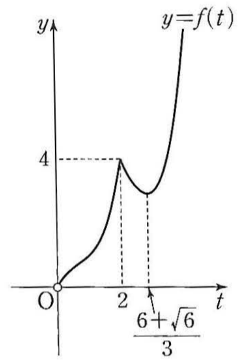
(ⅱ) $t>2$일 때,

$g(t)\le g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t)=t^3-6t^2+10t$

이때 $f'(t)=3t^2-12t+10$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$이며, $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$에서 극소이다.

$f(2)=4$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



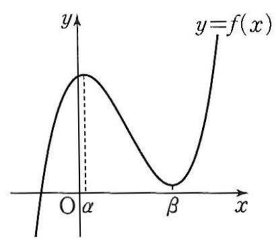
이때 $f(2)=4$이고 $t>2$에서 $f(t)=4$이면
$t^3-6t^2+10t=4$에서
$t^3-6t^2+10t-4=0$
$(t-2)(t^2-4t+2)=0$
$t>2$이므로 $t=2+\sqrt{2}$
그러므로 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는
$2 \le a \le 2+\sqrt{2}$
따라서 $M=2+\sqrt{2}$, $m=2$이므로
$M+m=4+\sqrt{2}$

30) [정답] ②

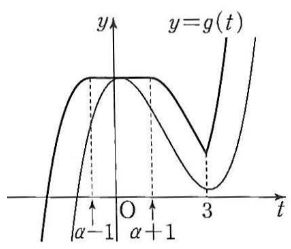
[해설]
$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$에서
$f'(x)=3x^2-10x+2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$
이때 $\alpha=\dfrac{5-\sqrt{19}}{3}$, $\beta=\dfrac{5+\sqrt{19}}{3}$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



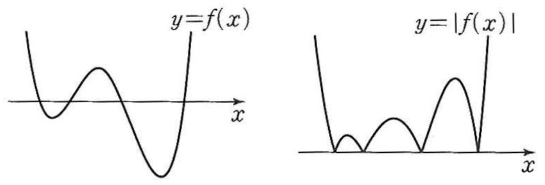
$k<\beta$, $k+2>\beta$일 때, $f(k)=f(k+2)$이면
$k^3-5k^2+2k+13=(k+2)^3-5(k+2)^2+2(k+2)+13$
$6k^2-8k-8=0$
$2(3k+2)(k-2)=0$
$\beta-2<k<\beta$이므로 $k=2$
(ⅰ) $t+1\le\alpha$, 즉 $t\le\alpha-1$일 때,
$g(t)=f(t+1)$
(ⅱ) $t-1\le\alpha\le t+1$, 즉 $\alpha-1\le t\le\alpha+1$일 때,
$g(t)=f(\alpha)$
(ⅲ) $\alpha\le t-1\le 2$, 즉 $\alpha+1\le t\le 3$일 때,
$g(t)=f(t-1)$
(ⅳ) $t-1\ge 2$, 즉 $t\ge 3$일 때,
$g(t)=f(t+1)$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



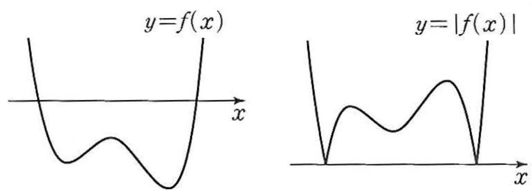
즉, 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않으므로 $a=3t=2$일 때, $g(t)=f(t-1)$이므로
$g'(a-1)=g'(2)=f'(1)=3-10+2=-5$
$t=4$일 때, $g(t)=f(t+1)$이므로
$g'(a+1)=g'(4)=f'(5)=3\times5^2-10\times5+2=27$
따라서 $g'(a-1)+g'(a+1)=-5+27=22$

31) [정답] ⑤

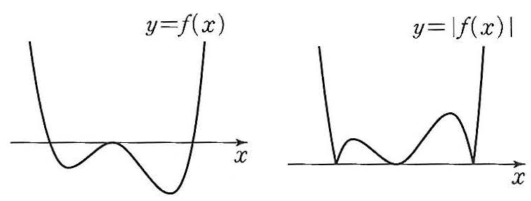
[해설]
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
이때 함수 $f(x)$의 극솟값 중 양수인 것이 있으면
이 값이 함수 $|f(x)|$의 극솟값이기도 하므로
함수 $|f(x)|$의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 음수인 경우
㉠ 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



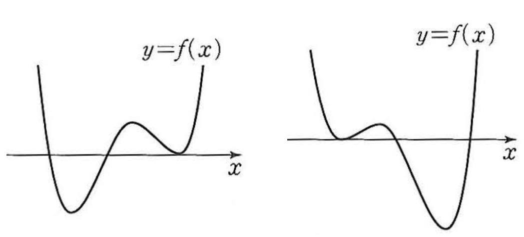
㉡ 함수 $f(x)$의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



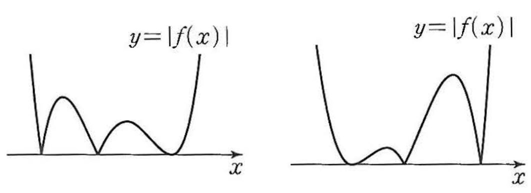
㉢ 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.



(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.

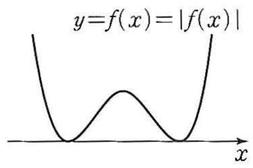


두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 0인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 2개이므로 조건을

만족시키지 않는다.



ㄱ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다. (참)

ㄴ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)

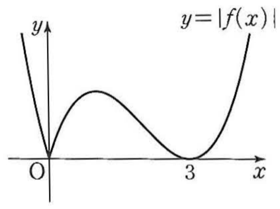
ㄷ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

32) [정답] ③

[해설]
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(x)=ax(x-3)^2$ 또는 $f(x)=ax^2(x-3)$으로 놓을 수 있다.
이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값이 $\frac{9}{2}$뿐이어야 한다.

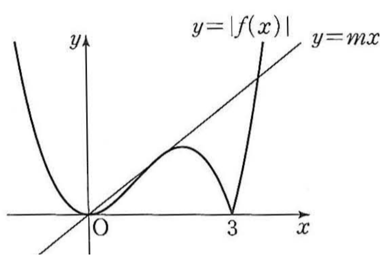
(ⅰ) $f(x)=ax(x-3)^2$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$f(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$에서
$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$이고 $f'(0)=9a$이므로
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=9a$일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0<m<9a$일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(x)=ax^2(x-3)$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y=mx$가 제1사분면에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 m의 값을 m_1이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=m_1$일 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m>m_1$일 때 서로 다른 두 점에서, $0<m<m_1$일 때 서로 다른 네 점에서, $m\le 0$일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1=\frac{9}{2}$이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있고, 직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접해야 한다.

$y=-ax^2(x-3)=-ax^3+3ax^2$에서

$y'=-3ax^2+6ax$이므로 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$-at^3+3at^2=\frac{9}{2}t$ …… ㉠

$-3at^2+6at=\frac{9}{2}$ …… ㉡

이어야 한다. $t>0$이므로 ㉠에서

$-at^2+3at=\frac{9}{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-3at^2+6at=-at^2+3at$

$2at^2-3at=0$, $at(2t-3)=0$

$a\neq 0$, $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$-\frac{9}{4}a+\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}$

$\frac{9}{4}a=\frac{9}{2}$, $a=2$

그러므로 $f(x)=2x^2(x-3)$이고

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 극대이므로

구하는 극댓값은 $|f(2)|=|2\times 4\times(-1)|=8$

33) [정답] ④

[해설]

$y=2x^3-9x^2+12x+1$에서

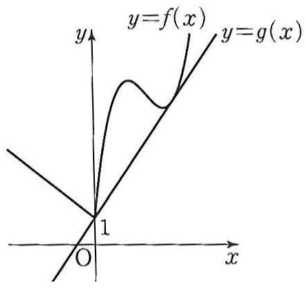
$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$x\geq 0$에서 함수 $y=2x^3-9x^2+12x+1$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	↗	6	↘	5	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 제1사분면에서

곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 m의 값을 구해 보자.

접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1$ …… ㉠

$f'(t)=m$이므로

$6t^2-18t+12=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$

$4t^3-9t^2=0$

$t^2(4t-9)=0$

$t>0$이므로 $t=\frac{9}{4}$

이때 ㉡에서

$m=6\times\frac{81}{16}-18\times\frac{9}{4}+12=\frac{15}{8}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값은 $\frac{15}{8}$이고,

최솟값은 직선 $y=1-x$의 기울기와 같은 -1이므로

구하는 합은

$\frac{15}{8}+(-1)=\frac{7}{8}$

34) [정답] ④

[해설]

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$이다.

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$

$\quad=x^3+(a-3)x^2-2ax$

$\quad=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$

이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8>0$

이므로 이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$은 서로 다른

두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β라 하자.

만약 $\alpha\beta=0$이면 $a=0$이고 이차방정식 $x^2-3x=0$의

두 실근은 0, 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha\beta\neq0$이고 조건을 만족시키려면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다. 즉, $-a+3>0$, $-2a>0$이어야 하므로 $a<0$이다.

이때 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a\leq-1$이어야 한다. 따라서 $f(3)=27+9a\leq18$이므로

구하는 $f(3)$의 최댓값은 18이다.

35) [정답] 15

[해설]

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha<\beta$)라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2}=16$ …… ㉠

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x \to 0}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\alpha^2\beta^2=0$에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2}=\lim_{x \to 0}(x-\beta)^2=\beta^2=16$$

$\beta>0$이므로 $\beta=4$이고 $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

이때 $f(1)=11<15$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\beta=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2}=\lim_{x \to 0}(x-\alpha)^2=\alpha^2=16$$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-4$이고 $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때 $f(1)=27>15$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

$\quad=x^4+8x^3+16x^2+2x$

$f'(x)=4x^3+24x^2+32x+2$

$f'(x)=2$에서

$4x^3+24x^2+32x+2=2$

$4x(x+4)(x+2)=0$

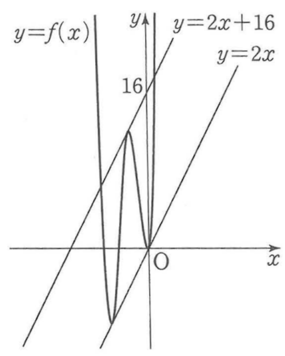
$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(-2)=12$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 12)$에서의 접선의 방정식은 $y-12=2(x+2)$, 즉 $y=2x+16$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<16$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 15이고, 그 개수는 15이다.



36) [정답] 320

[해설]

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

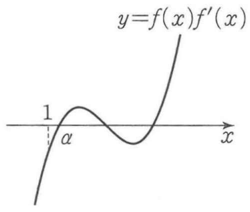
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$이므로

$f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

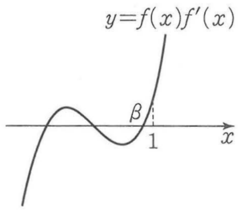
이때 $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$이다.

(i) $\alpha>1$ 또는 $\beta<1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

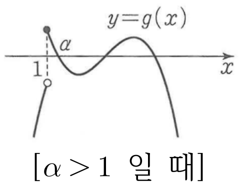


[$\alpha>1$ 일 때]

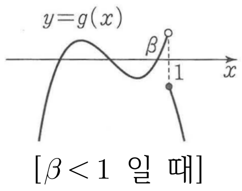


[$\beta<1$ 일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha>1$ 일 때]

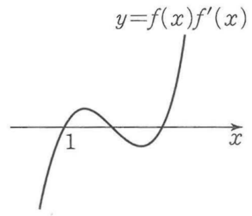


[$\beta<1$ 일 때]

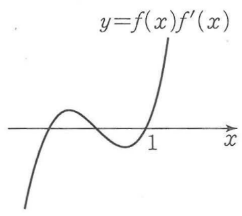
이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$일 때

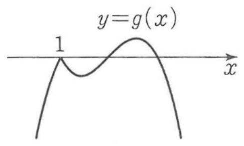
함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



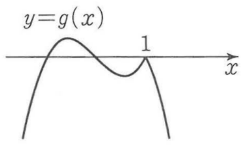
[$\alpha=1$ 일 때]



[$\beta=1$ 일 때]



[$\alpha=1$ 일 때]

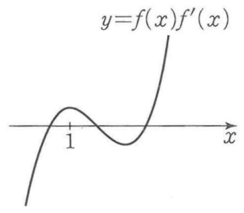


[$\beta=1$ 일 때]

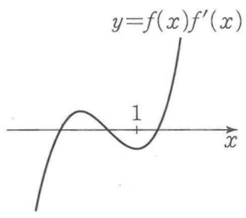
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$이고 $\lim_{t\to k-} h(t) > \lim_{t\to k+} h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta$일 때

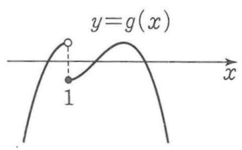
함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



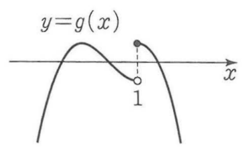
$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$



$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$



$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

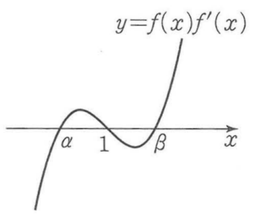


$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$일 때 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

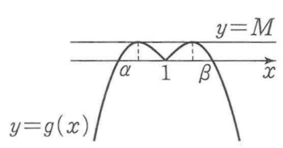


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$이므로 $i(-x)=-i(x)$이다.

즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$이고 $\lim_{t \to -k} h(t) > \lim_{t \to k+} h(t)$를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로 $f(x)=x^2-2x+a$

(a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$이므로

$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서 $a=-8$이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x-1)(x^2-2x-8) \\ &= 2(x+2)(x-1)(x-4) \end{aligned}$$

한편, $x \geq 1$일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$$g(x)=\begin{cases} 2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1) \\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서

$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)=16$,

$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)=20$

이므로

$$\begin{aligned} g(0)\times g(3) &= 16\times20 \\ &= 320 \end{aligned}$$

37) [정답] 109

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k)=\lim_{x \to k-} f(x)=\lim_{x \to k+} f(x)$이어야 하므로

$f(k)=k^3-3k+a=-k^2+13k+b$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} &= \lim_{x \to k-} \frac{(x^3-3x+a)-(k^3-3k+a)}{x-k} \\ &= \lim_{x \to k-} \frac{(x-k)(x^2+kx+k^2-3)}{x-k} \\ &= \lim_{x \to k-} (x^2+kx+k^2-3)=3k^2-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to k+} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} &= \lim_{x \to k+} \frac{(-x^2+13x+b)-(-k^2+13k+b)}{x-k} \\ &= \lim_{x \to k+} \frac{-(x-k)(x+k-13)}{x-k} \\ &= \lim_{x \to k+} (-x-k+13)=-2k+13 \end{aligned}$$

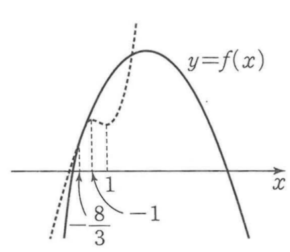
이고, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$3k^2-3=-2k+13$, $3k^2+2k-16=0$, $(3k+8)(k-2)=0$

$k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=2$

이때 함수 $y=x^3-3x+a$에서 $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 함수 $y=x^3-3x+a$는 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는데, $k=-\frac{8}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.



[그림 1]

즉, $k=2$이므로

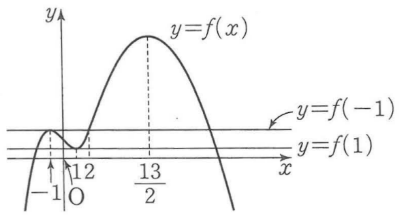
$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<2) \\ -x^2+13x+b & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $2+a=22+b$

$a-b=20$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $f(-1)=f(2)<f\left(\frac{13}{2}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

[그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c=f(-1)$ 또는 $c=f(1)$인 경우이다.



[그림 2]

$f(-1)=2+a,\ f(1)=-2+a$이므로

$(2+a)+(-2+a)=8$에서 $a=4$

㉠에서 $b=a-20=-16$

즉, $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+4 & (x<2) \\ -x^2+13x-16 & (x\geq 2)\end{cases}$

이고, 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는

$d=f\left(\frac{13}{2}\right)$인 경우이므로 구하는 실수 d의 값은

$d=f\left(\frac{13}{2}\right)=-\left(\frac{13}{2}\right)^2+13\times\frac{13}{2}-16=\frac{105}{4}$

따라서 $p=4,\ q=105$이므로 $p+q=4+105=109$

38) [정답] 45

[해설]

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=0$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\leq|xg(x)|$인 연속함수 $g(x)$가 존재하므로 $0\leq|f(0)|\leq|0\times g(0)|=0$에서 $f(0)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$6=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}x(x^2+ax+b)=2(4+2a+b)$$

에서 $2a+b=-1$

$b=-1-2a$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한 $x\neq 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq|g(x)|$에서 $-|g(x)|\leq\frac{f(x)}{x}\leq|g(x)|$함수의 극한의 대소관계에 의하여

$$-\lim_{x\to 0}|g(x)|\leq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\leq\lim_{x\to 0}|g(x)|$$

이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$$-|g(0)|\leq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq|g(0)|$$

$-6\leq f'(0)\leq 6$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$에서

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x^2-2x)(2x+a)$이므로

$f'(0)=-2b$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-6\leq-2b\leq 6,\ -3\leq b\leq 3$

㉠에서 $-3\leq-2a-1\leq 3,\ -2\leq a\leq 1$

$f(3)=3(9+3a+b)=3(9+3a-1-2a)=3(a+8)$
따라서 $f(3)=3(a+8)$은
$a=-2$일 때 최소이고 최솟값은 $3\times6=18$,
$a=1$일 때 최대이고 최댓값은 $3\times9=27$이므로 구하는 합은
$18+27=45$

39) [정답] 52

[해설]
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
(i) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$$

$g(2)=2\times f(2)$ …… ㉠

$x\to2-$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$
이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2-}\{f'(x+2)-f'(x-2)\}=0$이고 $f'(x)$가 연속이므로
$f'(4)=f'(0)$
$3\times4^2+2\times a\times4+b=b$에서
$a=-6$
또한 $f'(x)=3x^2-12x+b$에서
$f'(x+2)-f'(x-2)$
$=3(x+2)^2-12(x+2)+b-3(x-2)^2+12(x-2)-b$
$=3x^2+12x+12-12x-24-3x^2+12x-12+12x-24$
$=24(x-2)$
이므로

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{24(x-2)}{x-2}=24$$

$f(x)=x^3-6x^2+bx+c$에서 $f(2)=2b+c-16$
㉠에 의하여 $2(2b+c-16)=24$
$2b+c=28$ …… ㉡

(ii) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x<2$일 때, $g(x)=24$이고 $g'(x)=0$

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$x\ge2$일 때, $g(x)=xf(x)$이고

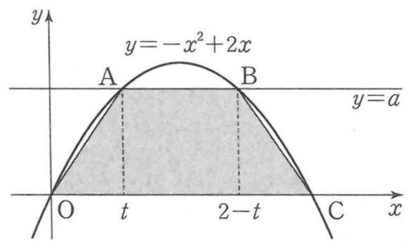
$$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}f(x)+2\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f(2)+2f'(2) \qquad \cdots\cdots ㉣$$

이때 $f'(2)=12-24+b=b-12$이고 ㉡에서 $f(2)=12$이므로
$f(2)+2f'(2)=12+2(b-12)=2b-12$
$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 ㉢=㉣
$2b-12=0$에서 $b=6$
$b=6$을 ㉡에 대입하면
$12+c=28$에서 $c=16$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-6x^2+6x+16$이므로 $f(6)=6^3-6\times6^2+6\times6+16=52$

40) [정답] 32

[해설]



점 C의 좌표는 $(2, 0)$이고, 곡선 $y=-x^2+2x$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

점 A의 x좌표를 t $(0<t<1)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $2-t$이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times(-t^2+2t)=t(t-2)^2=t(t^2-4t+4)f'(t)=(t-2)^2+2t(t-2)=(t-2)(3t-2)0<t<1$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

이때 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$S=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$

따라서 $27S=32$

41) [정답] 426

[해설]

$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$

$=3x^2+6x-3(t+1)(t-1)$

$=3\{x-(t-1)\}\{x+(t+1)\}$

$f'(x)=0$에서 $x=t-1$ 또는 $x=-t-1$

$t>0$이므로 $-t-1<-1<t-1$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+2t^3-3t^2+1$

$=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t-1)^2(t+1)+(t-1)^2(2t+1)$

$=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}=0$

$f(-1)=-1+3+3(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

$=2t^3$

$f(2)=8+12-6(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

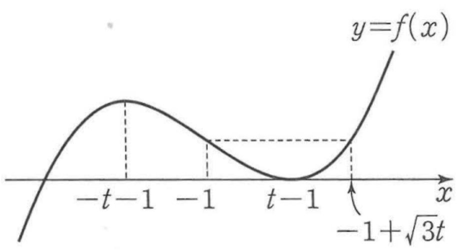
$=2t^3-9t^2+27$

$f(x)=f(-1)$에서

$f(x)-2t^3=(x+1)(x^2+2x+1-3t^2)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}t$

에서 $f(-1)=f(-1+\sqrt{3}t)=2t^3$



이때 $-1+\sqrt{3}t \geq 2$, 즉 $t \geq \sqrt{3}$이면 $g(t)=f(-1)=2t^3$

$0<t<\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

한편, $t-1 \geq 2$, 즉 $t \geq 3$이면 $h(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

$0<t<3$이면 $h(t)=f(t-1)=0$

그러므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 2t^3-9t^2+27 & (0<t<\sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<3) \\ 2t^3-9t^2+27 & (t \geq 3) \end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않으므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$g(2a)=g(2\sqrt{3})=2\times(2\sqrt{3})^3$

$\quad =48\sqrt{3}$

$h(3a)=h(3\sqrt{3})=2(3\sqrt{3})^3-9(3\sqrt{3})^2+27$

$\quad =162\sqrt{3}-216$

따라서

$g(2a)+h(3a)=48\sqrt{3}+(162\sqrt{3}-216)$

$\quad =210\sqrt{3}-216$

즉, $p=210$, $q=-216$이므로

$p-q=210-(-216)=426$

42) [정답] ③

[해설]

$f(x)=\int(5x-k)dx-\int(x+k)dx$

$\quad =\int\{(5x-k)-(x+k)\}dx$

$\quad =\int(4x-2k)dx=2x^2-2kx+C$ (C는 적분상수)

에서 $f'(x)=4x-2k$

$f'(1)=2$에서 $4-2k=2$이므로 $k=1$

$f(1)=0$에서 $2-2k+C=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x^2-2x$이므로

$f(2)=8-4=4$

43) [정답] ①

[해설]

$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$

$=\int_0^1(x^2+x|1-x|)dx+\int_1^3(x^2+x|1-x|)dx$

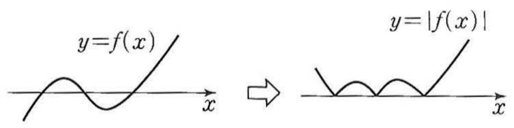
$=\int_0^1\{x^2+x(1-x)\}dx+\int_1^3\{x^2-x(1-x)\}dx$

$=\int_0^1 xdx+\int_1^3(2x^2-x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

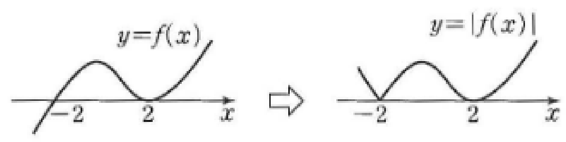
$=\frac{1}{2}+\frac{40}{3}=\frac{83}{6}$

44) [정답] 80

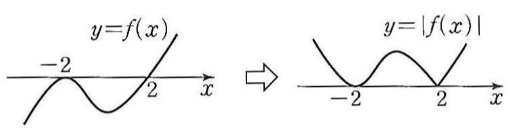
[해설]
실수 a의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.
(ⅰ) $a\neq-2$이고 $a\neq2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 세 개의 x의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a=-2$일 때



$f(x)=(x-2)^2(x+2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 음수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $a=2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 양수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

$$\int_0^{2a}f'(x)dx=\int_0^4 f'(x)dx=\Big[(x-2)(x+2)^2\Big]_0^4$$
$$=72-(-8)=80$$

45) [정답] ①

[해설]

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=2\int_0^1(x^4+bx^2)dx=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$$

이므로 조건 (가)에서

$$4\int_{-1}^{1}f(x)dx+5\int_{-1}^{1}xf(x)dx=4\times\frac{2}{3}a+5\times\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b\right)=0$$

$4a+5b+3=0$ …… ㉠
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에서
$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$
따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x$이므로
$f(3)=27-18+3=12$

46) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\int_0^x (3t^2-4)dt=\left[t^3-4t\right]_0^x$

$=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$

이때 $g'(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이고, 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$g(x)=\int (x^3-4x)dx=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C$($C$는 적분상수)에서 $g(2)=0$이므로 $C=4$

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(0)=4$

47) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$g(0)=\int_0^0 f'(t)dt+(0+1)f(0)+1=f(0)+1=3$

즉, $f(0)=2$이므로 $c=2$

$g'(x)=f'(x)+f(x)+(x+1)f'(x)$에서

$g'(0)=f'(0)+f(0)+(0+1)f'(0)=2f'(0)+2=0$

이므로 $f'(0)=-1$

즉, $b=-1$

주어진 조건에서 $g(1)=8$이고 $f(x)=x^3+ax^2-x+2$이므로

$g(1)=\int_0^1 f'(t)dt+(1+1)f(1)+1$

$=\left[f(t)\right]_0^1+2f(1)+1$

$=f(1)-f(0)+2f(1)+1$

$=3f(1)-1$

$=3(1+a-1+2)-1$

$=3a+5=8$

에서 $a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(-1)=-1+1+1+2=3$

48) [정답] ③

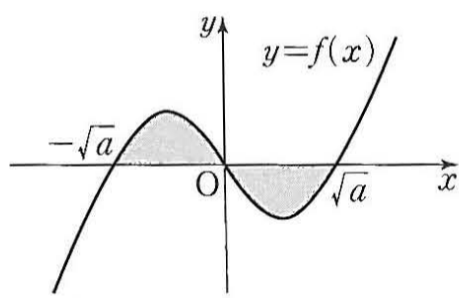
[해설]

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-ax=0$에서 a가 양수이므로

$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}|x^3-ax|dx=2\int_{-\sqrt{a}}^{0}(x^3-ax)dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a}}^{0}$$

$$=2\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 $f(-1)=5$

49) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $x=0$에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0,\ k)$에서의 접선의 방정식은 $y=k$이다.

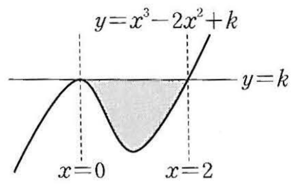
곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$이므로

$x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2|k-(x^3-2x^2+k)|dx$$

$$=\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

50) [정답] 40

[해설]

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$

이므로 $a=-1$

즉, $f'(x)=3x^2-2x-1$에서

$f(x)=x^3-x^2-x+C$(C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

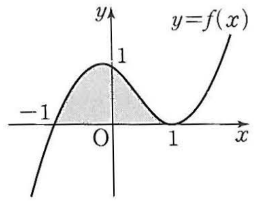
$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx$$

$=2\int_0^1(-x^2+1)dx+0$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{4}{3}=40$



51) [정답] ④

[해설]
조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$
에서 $b=3$
조건 (나)에서 $x=0$일 때, $f(-3)=f(3)$이고
$f(-3)=\lim_{x\to -3+}f(x)=0$이므로
$0=9+3a+b$
$b=3$이므로 $a=-4$
따라서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2-4x+3 & (0\le x\le 3)\end{cases}$이고
$f(x-3)=f(x+3)$에서 $f(x)=f(x+6)$
즉, $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로
$\int_{-33}^{-29}f(x)dx=\int_{-3}^{1}f(x)dx$
$\int_{57}^{60}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx$
따라서
$\int_{-33}^{-29}f(x)dx-\int_{57}^{60}f(x)dx=\int_{-3}^{1}f(x)dx-\int_{-3}^{0}f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx$

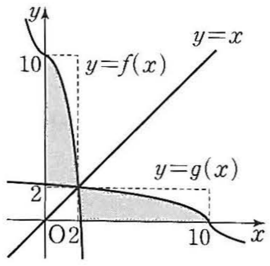
$=\int_0^1(x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$

52) [정답] 12

[해설]
함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 도함수는
$f'(x)=-3x^2+2ax-3a$
이때 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$
$0\le a\le 9$
따라서 a의 최솟값은 0이므로 $f(x)=-x^3+10$이고, 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\int_2^{10} g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - 2\times 2 = \int_0^2 (-x^3+10)dx - 4$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 10x\right]_0^2 - 4 = 16 - 4 = 12$$

53) [정답] ⑤

[해설]

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$0 + \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t + k)dt = \left[t^3 - 2t^2 + kt\right]_0^1$$

$$= k - 1 = -5$$

에서 $k = -4$

즉, $v(t) = 3t^2 - 4t - 4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t) = 0$이므로

$3t^2 - 4t - 4 = 0$에서 $(3t+2)(t-2) = 0$

$t > 0$이므로 $t = 2$

$0 < t < 2$일 때 $v(t) < 0$이고 $t > 2$일 때 $v(t) > 0$이므로

시각 $t=2$일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt = \int_0^2 |3t^2 - 4t - 4|dt = \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4)dt$$

$$= \left[-t^3 + 2t^2 + 4t\right]_0^2 = 8$$

54) [정답] 63

[해설]

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때의 시각을 $t=a$ $(a>0)$이라 하면

$$0 + \int_0^a v_1 dt = 0 + \int_0^a v_2 dt$$

$$\int_0^a (3t^2 + t)dt = \int_0^a (2t^2 + 3t)dt$$

$$\left[t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^a = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_0^a$$

$$a^3 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = \frac{1}{3}a^2(a-3) = 0$$

$a > 0$이므로 $a = 3$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치 (또는 점 Q의 위치) $x=k$에서

$k=3^3+\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{63}{2}$이므로

$2k=2\times\frac{63}{2}=63$

55) [정답] ②

[해설]

$f(x)=3x^2+ax-(2x-1)\int_0^1 f(t)dt$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$에서 $a=2$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+2x-(2x-1)k$

$f(x)=3x^2+2(1-k)x+k$이고

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}dx=k$

이때

$$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}dx=\left[x^3+(1-k)x^2+kx\right]_0^1$$
$$=1+(1-k)+k=2$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f(2)=3\times 4-2\times 2+2=10$

56) [정답] ③

[해설]

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3(2t^2+at+2)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2t\right]_1^3$$
$$=\left(18+\frac{9}{2}a+6\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{2}+2\right)=4a+\frac{64}{3}$$

이므로 $4a+\frac{64}{3}=\frac{100}{3}$에서 $4a=12$

따라서 $a=3$

57) [정답] ④

[해설]

$f(0)=5$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$ (a, b, c는 상수이고 $a\neq 0$)이라 하면

$$g(x)=\int_{-x}^{x}f(t)dt=\int_{-x}^{x}(at^3+bt^2+ct+5)dt$$
$$=2\int_0^x(bt^2+5)dt=2\left[\frac{b}{3}t^3+5t\right]_0^x=\frac{2b}{3}x^3+10x$$

$g(1)=12$이므로

$\frac{2b}{3}+10=12$, $b=3$

따라서 $g(x)=2x^3+10x$이므로

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2(2x^3+10x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+5x^2\right]_0^2=8+20=28$$

58) [정답] ①

[해설]

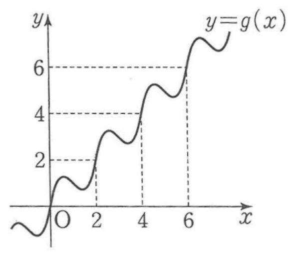
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x)-x=0$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x)-x=ax(x-1)(x-2)(a>0)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=ax(x-1)(x-2)+x$이고, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

한편, 함수 $g(x)$는 $0\le x\le 2$일 때 $g(x)=f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시키므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^2\{ax(x-1)(x-2)+x\}dx\\&=\int_0^2\{ax^3-3ax^2+(2a+1)x\}dx\\&=\left[\frac{a}{4}x^4-ax^3+\frac{2a+1}{2}x^2\right]_0^2\\&=4a-8a+4a+2=2\end{aligned}$$

이고, 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned}\int_{2k-2}^{2k}g(x)dx&=2\times(2k-2)+\int_0^2 g(x)dx=(4k-4)+\int_0^2 f(x)dx\\&=(4k-4)+2=4k-2\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2n}g(x)dx&=\int_0^2 g(x)dx+\int_2^4 g(x)dx+\cdots+\int_{2n-2}^{2n}g(x)dx\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=2n^2\end{aligned}$$

따라서 $2n^2=72$에서 $n^2=36$ n은 자연수이므로 $n=6$

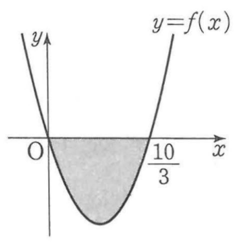
59) 59) [정답] 581

[해설]

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2+(k-2)x$이고

$$\int_0^1\{t^2+(k-2)t\}dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{k-2}{2}=\frac{k}{2}-\frac{2}{3}$$

이므로 $\frac{k}{2}-\frac{2}{3}=k$에서 $k=-\frac{4}{3}$



즉, $f(x)=x^2-\frac{10}{3}x$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{10}{3}}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{10}{3}}\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{10}{3}}\left(-x^2+\frac{10}{3}x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}}=-\frac{1000}{81}+\frac{500}{27}=\frac{500}{81}$$

즉, $p=81$, $q=500$이므로 $p+q=81+500=581$

60) [정답] ⑤

[해설]

$2\int_p^x f(t)dt-\int_p^x\{f'(t)\}^2dt=2-3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=p$를 대입하면

$0=2-3p$, $p=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f'(x)\}^2=-3$ …… ㉡

$f'(1)=-2$에서 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$f(x)$의 차수를 n $(n\geq 1)$이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$, $\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)$이다.

㉡의 양변의 차수를 비교하면 $n=2(n-1)$에서 $n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a, b, c$는 상수, $a\neq 0)$이라 하면

$f'(x)=2ax+b$ …… ㉢

이므로 ㉡에서 $2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=-3$

$(2a-4a^2)x^2+(2b-4ab)x+2c-b^2=-3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-4a^2=0$, $2b-4ab=0$, $2c-b^2=-3$ …… ㉣

에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(1)=-2$이므로 ㉢에서

$f'(1)=2a+b=1+b=-2$

$b=-3$

㉣에서 $2c-(-3)^2=-3$

$c=3$

이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$이고 $f(2)=2-6+3=-1$

따라서 $p+f(2)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$