2024학년도 Promotion N1 모의평가 해설

<공통>

1	②	2	②	3	⑤	4	③	5	③
6	③	7	①	8	①	9	⑤	10	④
11	③	12	⑤	13	①	14	⑤	15	②
16	12	17	32	18	3	19	15	20	5
21	256	22	530	**Team promotion**					

<미적분>

23	③	24	④	25	⑤	26	②	27	③
28	⑤	29	60	30	25				

<공통영역 해설>

1. ②

$$4^{\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{1}{\sqrt{3}+1}}=4^{\frac{1}{2}}=2$$

2. ②

$f'(x)=n(n+1)x^n+1$

$f'(1)=n(n+1)+1=13$

$n^2+n-12=0,\ (n-3)(n+4)=0$

$n=3$ ($\because n=$자연수)

3. ⑤

$$\frac{1}{1-\tan\theta}+\frac{1}{1+\tan\theta}=\frac{2}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta)}=8$$

$$1-\tan^2\theta=\frac{1}{4},\ \tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{7},\ \cos\theta=-\frac{2}{7}\quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

4. ③

$\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=2$

$f(0)=-1$

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)+f(0)=0$

5. ③

$y=k$가 곡선 $y=x^2(x-6)^2-8$과 서로 다른 네 점에서 만나려면 k는 곡선의 극솟값과 극댓값 사이에 존재해야 한다.

$f(x)=x^2(x-6)^2-8$라 하면

$f'(x)=4x(x-3)(x-6)$이므로

$y=f(x)$는 $x=0$과 $x=6$에서 극솟값 -8을 가지고

$x=3$에서 극댓값 $f(3)=73$을 가진다.

따라서 가능한 k의 범위는 $-8<k<73$이다.

$a+b=(-8)+73=65$

6. ③

$a_1=2,\ a_2=8,\ a_3=14,\ a_4=20,\ a_5=10$

$a_6=16,\ a_7=8,\ a_8=14,\ \cdots$

$a_n=a_{n+5}$ (단, n은 2이상의 자연수)

$a_7=8$

7. ①

모든 실수 x에 대하여 로그 함수가 존재하려면

$k>0,\ k\neq1,\ (x^2-2kx+25)>0$을 만족시켜야 한다.

항상 $(x^2-2kx+25)>0$를 만족시키려면

$x^2-2kx+25=(x-k)^2+25-k^2$이므로

$25-k^2>0$이여야 한다.

모두 만족시키는 k의 범위는 $0<k<5$ (단, $k\neq1$)

$\therefore k=2,\ 3,\ 4$ 모든 k의 값의 합은 $2+3+4=9$

8. ①

실수 집합에서 $f(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to3}x^2-bx=\lim_{x\to3+}\frac{x^2-2x+a}{x-3}\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$\lim_{x\to3+}x-3=0$이므로 $\lim_{x\to3+}x^2-2x+a=0$

$9-6-a=0,\ \therefore a=-3$

구한 a를 다시 ①에 대입하면

$\lim_{x\to3}x^2-bx=\lim_{x\to3+}x+1=4$

$9-3b=4,\ \therefore b=\frac{5}{3}$

$a\times b=-5$

9. ⑤

$f(x)\le2^x,\ f(x)>0$을 만족시키는 x값의 범위가

$1\le x<2$이므로 $f(x)$는 $(1,2),\ (2,0)$을 지난다.

$\therefore f(x)=-2(x-2),\ f(0)=4$

10. ④

$g(x)=kx(x-4)\ (k>0)$

$A=\int_0^4 f(x)dx,\ B=\int_0^4 g(x)dx$

$A-2B=0$이므로 $\int_0^4 f(x)-2g(x)dx=0$이다.

$\int_0^4 f(x)-2g(x)dx$

$=\int_0^4(-x^3+x^2+12x-2kx^2-8kx)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(1-2k)x^3+(6-4k)x^2\right]_0^4$

$=-64+\frac{64(1-2k)}{3}+16(6-4k)=0$

$\therefore k=\frac{5}{2},\ g(x)=\frac{5}{2}x(x-4)$

$g(1)=\frac{5}{2}\times(-3)\times 1=-\frac{15}{2}$

[solve 2] 삼차함수 넓이 공식

$A=\frac{1}{12}4^3(4+6),\ B=\frac{1}{6}4^3k$

$\therefore k=\frac{5}{2}(\because A=2B)$

11. ③

$a_n=ar^{n-1}\ (r<0)$이라 하면

항상 $|a_n|<|a_{n+1}|$이므로

$\sum_{n=1}^{4}|a_n+a_{n+1}|=-a_1-a_2+a_2+a_3-a_3-a_4+a_4+a_5$

$=a_5-a_1=a_5-5\ \ \therefore a_1=5$

$\sum_{n=1}^{4}|a_n|=a_1-a_2+a_3-a_4=5-5r+5r^2-5r^3=5r^4-5$

$r^4+r^3-r^2+r-2=0,\ (r-1)(r+2)(r^2+1)=0$

$\therefore r=-2\ (\because r<0)$

$a_3=5\times(-2)^2=20$

12. ⑤

(나)조건을 보면 $x>0$일 때 항상 증가하기 때문에 극값을 가지지 않으며 $f(x)\geq 0$이다.

$x<0$일 때 항상 $f(x)\leq 0$이다.

따라서 사잇값 정리에 의해 $f(0)=0$이다.

$f(x)=x(x^2+ax+b),\ b=a+3$ ($\because$ (가)조건)

$f'(x)=3x^2+2ax+a+3$

$a^2-3(a+3)>0$ ($\because$ $f(x)$는 극값을 가짐)

$\therefore\ a>\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ or $a<\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$

$g(x)=x^2+ax+a+3$라 하면

$g(x)$는 $x<0$에서 중근을 가지거나 근을 가지지 않아야 한다.

$a^2-4(a+3)\leq 0,\ -2\leq a\leq 6$

가능한 a의 범위는 $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}<a\leq 6$이다.

$23+9\sqrt{5}<f(2)=6a+14\leq 50,\ f(2)$의 최댓값은 50

[직관적 해석]

그래프를 그려보면 최솟값은 언제인지 모르겠으나 $f(0)=0,\ f(-1)=-4,\ f(x_1)\leq 0$을 보니 x축에 접할 때가 최댓값이겠구나 싶은 생각이 든다.

확인을 위해 그래프를 그리면 접할 때가 $f(2)$의 최댓값임을 직관적으로 확인할 수 있다.

13. ①

$|f(x)-2g(x)|\leq g(x)$를 정리하면

ⅰ) $f(x)\geq 2g(x)$

$f(x)\leq 3g(x)$이므로 가능한 $f(x)$의 범위는

$2g(x)\leq f(x)\leq 3g(x)$이다.

$g(x)$의 치역을 고려하면 $f(x)$의 범위는

$2\leq f(x)\leq 3$ or $6\leq f(x)\leq 9$가 된다.

ⅱ) $f(x)<2g(x)$

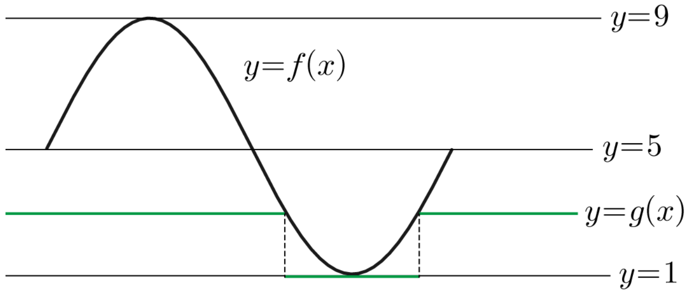
$f(x)\geq g(x)$이므로 $g(x)\leq f(x)<2g(x)$

따라서 가능한 $f(x)$의 범위는

$1\leq f(x)<2$ or $3\leq f(x)<6$이다.

$1\leq f(x)\leq 9$이므로 $b=5$이다.

ⅰ과 ⅱ를 만족시키는 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는



와 같이 그려진다.

$f(7)\leq g(7)$을 만족시키는 a의 최댓값은 주기가 가장 길어지는 값이다.

$\therefore f(7)=4\sin\left(\frac{7\pi}{a}\right)+5=3$

$a=\frac{42}{7+2n}$ or $a=\frac{42}{11+2n}\ \ (n\geq 0)$

a의 최댓값은 $n=0$일 때인 6이다.

ab의 최댓값 $=6\times 5=30$

14. ⑤

$f(0)=f(2)$에서 인수정리에 의해

이차함수 $f(x)$는 $f(x)=mx(x-2)+n$ $(m\neq 0)$이다.

(ㄱ) $x>0$에서 $g(x)$는 미분가능하고 $g'(x)=2-f(x)$이다.

$x<0$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고 $g'(x)=f(x)$이다.

$x=0$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하려면 $2-f(0)=f(0)$

$\therefore f(0)=1$ **(참)**

(ㄴ) $g'(1)=f(1)=-m+n=0$에서 $n=m$이고

$f(x)=m(x-1)^2$이다.

ⅰ) $x>0$에서 $f(x)=m(x-1)^2$이므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

ⅱ) $x=0$에서 $2-f(0)$과 $f(0)$의 부호가 다르거나 둘 중 하나가 0이면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

즉, $\{2-f(0)\}\times f(0)\leq 0$에서 $f(0)\geq 2$ or $f(0)\leq 0$

$m\geq 2$ or $m\leq 0$이고 $m\neq 0$이므로 $m\geq 2$ or $m<0$에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

ⅲ) $x<0$에서 $2-f(0)=2-m(x-1)^2=0$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.

$m>0$일 때, $m<2$이면 $m(x-1)^2=2$ 인 음수 x가 존재한다.

$m<0$일 때, $m(x-1)^2<0<2$이므로 $m(x-1)^2=2$는 모순이다. 따라서 $0<m<2$에서 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.

ⅰ, ⅱ, ⅲ에서, $m\neq 0$인 모든 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$는 극값을 하나 갖는다. **(참)**

(ㄷ) $m<0$인 경우, $x>0$에서 극솟값이 음수이거나 존재하지 않으므로 모순이다.

$m>0$인 경우, $x=0$에서 극소가 아니어야 하므로 $2-f(0)>0$이여야 하고

$x>0$에서는 극솟값 0이 존재해야 하므로 $f(0)>0$이어야 한다. ($\because f(0)\leq 0$이면 극솟값이 음수)

따라서 $f(0)=n$에서 $0<n<2$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a\,(a>0)$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(a)=0$이고, $\int_0^a f(t)dt=0$이어야 한다.

$f(a)=0$에서

$f(x)=mx(x-2)+n$

$=m(x-a)(x-2+a)=mx^2-2mx-m(a^2-2a)$

라 하면, $\int_0^a f(t)dt=\left[\frac{1}{3}mt^3-mt^2-m(a^2-2a)t\right]_0^a$

$=\frac{1}{3}ma^3-ma^2-ma^3+2ma^2$

$=ma^2\left(-\frac{2}{3}a+1\right)=0$

에서 $a=\frac{3}{2}$이다.

즉, $n=-m(a^2-2a)=\frac{3}{4}m$이고 $0<n<2$에서

$0<m<\frac{8}{3}$이다. 따라서 $f(3)=3m+\frac{3}{4}m=\frac{15}{4}m$

$\therefore 0<f(3)=\frac{15}{4}m<10$ **(참)**

15. ②

$a_1a_2=1\times\sin\frac{\pi}{2}=1$

가능한 a_1, a_2, b_1, b_2의 값은 표와 같다. ($\because a_n$은 정수)

a_1	a_2	b_1	b_2
1	1	1	1
-1	-1	2	2

$a_3a_3=2\times\sin\pi=0$, $a_3=0$

$a_5a_4=3\times\frac{3}{2}\pi=-3$

a_4	a_5	b_4	b_5
3	-1	3	2
-3	1	4	1
1	-3	1	4
-1	3	2	3

$a_7a_5=4\times\sin2\pi=0$, $a_7=0$ ($\because a_5\neq 0$)

$a_9\times a_6=5\times\sin\frac{5}{2}\pi=5$

a_6	a_9	b_6	b_9
5	1	5	1
1	5	1	5
-5	-1	6	2
-1	-5	2	6

$\left|\sum_{n=1}^{7}(-1)^{k-1}b_k\right|=|b_1-b_2+b_3-b_4+b_5-b_6+b_7|$

$|-b_4+b_5-b_6+2|=2$

$b_6=t$라고 하면

$\lvert -b_4+b_5-b_6+2\rvert$	b_6
$\lvert -3+2-t+2\rvert$	**가능한 값 없음**
$\lvert -4+1-t+2\rvert$	1
$\lvert -1+4-t+2\rvert$	**가능한 값 없음**
$\lvert -2+3-t+2\rvert$	5 or 1

b_5+b_6의 값으로 가능한 값은

$3+5$, $3+1$, $1+1$이므로 합은 $8+4+2=14$

16. 12

$f(x)=x^3+ax$, $f(a)=a^2+8$

$\therefore a=2$, $f(2)=12$

17. 32

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+6)^2+(2a_k-3)^2=300+85=385$$

$$\sum_{k=1}^{5}5\left\{(a_k)^2+9\right\}=385,\ \sum_{k=1}^{5}\left\{(a_k)^2+9\right\}=77$$

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2+45=77,\ \therefore \sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=32$$

18. 3

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$와 마주 보는 변을 각각 a, b, c라 하면

$$\sin A\times\sin B=\frac{ab}{4R^2}=\frac{1}{8}$$

$$ab=\frac{R^2}{2}=8,\ \frac{6}{\sin C}=2R=8$$

$$\therefore \sin C=\frac{3}{4}$$

ΔABC의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\sin C\times ab=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times 8=3$

19. 15

$v(t)=3t^2-6kt+3$

$a(t)=6t-6k$, $a(2k)=6k=4$

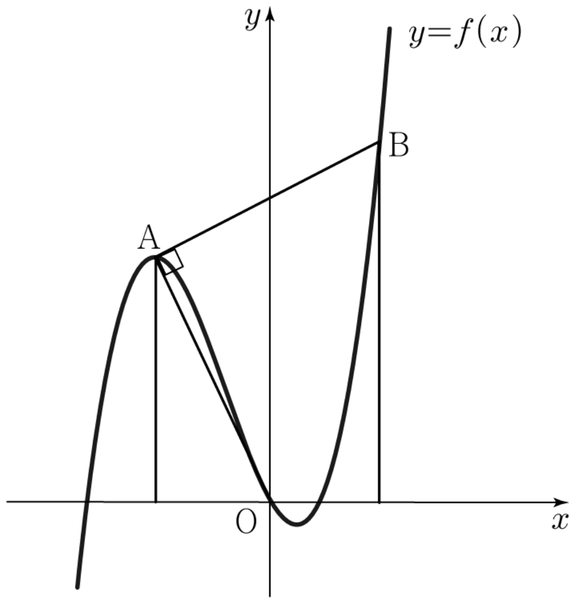
$\therefore k=\dfrac{2}{3}$

$x(2)=8-8+6+2=8$

$v(2)=v_0=12-8+3=7$

$x(2)+v_0=15$

20. 5



최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$이고 원점을 지나는 함수 $f(x)$를

$f(x)=\dfrac{1}{2}x(x^2+ax+b)$라 하자.

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2+2ax+b)$이므로 $f'(0)=\dfrac{b}{2}$

$f(x)-\dfrac{b}{2}x=\dfrac{1}{2}x^2(x+a)$, $f(-a)=-\dfrac{1}{2}ab$

$f'(-a)=\dfrac{1}{2}(a^2+b)$

따라서 $(-a, f(-a))$에서 $f(x)$에 그은 접선은

$\overline{AB}=\dfrac{1}{2}(a^2+b)(x+a)-\dfrac{1}{2}ab$

$f(x)-\overline{AB}=\dfrac{1}{2}(x^3+ax^2-a^2x-a^3)=\dfrac{1}{2}(x+a)^2(x-a)$

$\dfrac{1}{2}(a^2+b)\times\dfrac{b}{2}=-1$ ($\because \angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$)

$f(a)=a-\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}a(a^2+a^2+b)$ ($\because \overline{OA}=\overline{AB}$)

$\therefore a=\sqrt{5}$, $b=-4$

$\overline{OA}=\sqrt{20+5}=5$

[미적분 선택자]

삼차함수에서 변곡점에서의 대칭성을 고려하면

$\overline{OA}$의 기울기는 -2, $\overline{AB}$의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$\therefore \dfrac{b}{2}=-2$, $\dfrac{1}{2}(a^2+b)=\dfrac{1}{2}$

$a=\sqrt{5}$, $b=-4$

21. 256

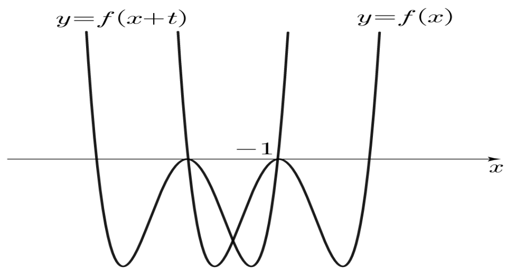
곡선 $y=a^{4x+1}$과 직선 $y=-2x+1$은
오직 한 점에서 만난다. 즉, x에 대한 방정식
$-2x+1=a^{4x+1}$은 오직 하나의 실근 α를 가지고
$a^{4\alpha+1}=-2\alpha+1$이다.
곡선 $y=\log_a(x+2)$와 직선 $y=-2x+1$은
오직 한 점에서 만난다. 즉, x에 대한 방정식
$\log_a(x+2)=-2x+1$은 오직 하나의 실근 β를 가지고
$a^{4\left(-\frac{\beta}{2}\right)+1}=-2\left(-\frac{\beta}{2}\right)+1$이므로 $\alpha=-\frac{\beta}{2}$,
$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=-2=$**(가)**이다.
직선 $y=-2x+1$과 y축이 만나는 점을 C라고 할 때
ΔOAB의 넓이는 $\Delta OCA+\Delta OCB$의 넓이의 합이므로
$-\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ ($\because a<0$), $-\alpha+\beta=-3\alpha$
$\therefore \alpha=-\frac{1}{6}=$**(나)**, $\beta=\frac{1}{3}$이다.
α, β는 각각 두 점 A, B의 x좌표이므로
$\log_a\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 실수 a의 값은 $\left(\frac{4}{3}\right)^3=$**(다)**이다.

$p=-2$, $q=-\frac{1}{6}$, $r=\left(\frac{4}{3}\right)^3$

$\therefore \frac{r}{p\times q^3}=256$

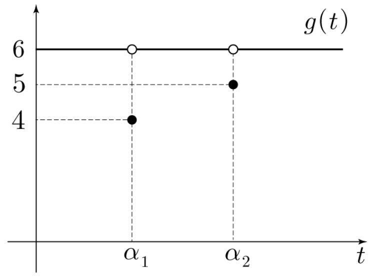
22. 530

$\lim_{x\to k}\frac{f(x)f(x+t)}{(x+k)^n}\cdots$①이 0이 아닌 값으로 수렴하려면
$f(x)f(x+t)$는 $(x+k)^n(n\le 4)$를 인수로 가져야 한다.
$g(t)$는 $f(x)f(x+t)$의 사중근 이하의 서로 다른 근의 개수이다. ($(x-k)^5$, $(x-k)^6$을 가지면 ①이 0으로 수렴)
따라서 $g(t)$가 불연속인 점은 $f(x)$와 $f(x+t)$가 공통근을 가질 때 불연속점이 발생한다.
$f(x)=0$의 서로 다른 근의 개수에 따라 생각해보자
1) 근이 2개(중근+중근)일 경우 → 불연속점 1개
2) 근이 2개(삼중근)일 경우 → 불연속점 1개
3) 근이 3개일 경우 → 불연속점 2개 이상
$g(t)$가 $t>0$에서 불연속점을 두 개만 가지려면
$f(x)$는 근을 세 개 가져야 한다.
따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-\beta)(x-\gamma)$라고 할 때
$f(x+t)$는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼
평행 이동한 것이므로 두 그래프를 동시에 그리면



이다.

따라서 $g(t)$가 $t>0$에서 불연속점을 2개만 가지려면
$f(x)$와 $f(x+\alpha_1)$, $f(x)$와 $f(x+\alpha_2)$
에서만 공통근을 가져야 한다.
따라서 $f(x)=(x+1)^2(x+1-\alpha_1)(x+1+\alpha_1)$이다.



$g(\alpha_1)=4$,
$g(\alpha_2)=5$이므로
$\sum_{m=1}^{2}\{\alpha_m+g(\alpha_m)\}$
$=\alpha_1+\alpha_2+4+5=15$

$3\alpha_1+9=15$ ($\because \alpha_2=2\alpha_1$), $\alpha_1=2$
$f(x)=(x+1)^2(x+3)(x-1)$
$\therefore$ $f(4)+g(\alpha_2)=525+5=530$

<미적분 해설>

23. ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x+\pi)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{4x^2}{1-\cos 2x}\times\frac{1}{4}$$
$$=1\times 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

24. ④

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=(\frac{1}{4}e^2)-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

25. ⑤

$a_n=1+d(n-1)$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\times a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}(1-\frac{1}{dn+1})=\frac{1}{d}=2,\ \therefore d=\frac{1}{2}$$
$$a_9=1+8\times\frac{1}{2}=5$$

26. ②

$(\ln f(t))^2-4\ln f(t)=t\cdots\cdots\cdots\cdots$①
$(\ln f(32))^2-4\ln f(32)=32$, $f(32)=e^8$
①의 식을 미분하면
$$2\ln f(t)\frac{f'(t)}{f(t)}-4\frac{f'(t)}{f(t)}=1$$
$$2\ln f(32)\frac{f'(32)}{f(32)}-4\frac{f'(32)}{f(32)}=1$$
$$(2\times 8-4)\frac{f'(32)}{e^8}=1,\ \therefore f'(32)=\frac{e^8}{12}$$

27. ③

주어진 도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^k \frac{1}{5\cos^2 x-1}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{7}{5}$$

$$\int_0^k \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{5\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}}dx=\int_0^k \frac{\sec^2 x}{5-\sec^2 x}dx$$

$$=\int_0^k \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x-4}dx \ (\because\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^k \frac{\sec^2 x}{\tan x+2}-\frac{\sec^2 x}{\tan x-2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|\right]_0^k$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\tan k+2}{\tan k-2}\right|\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{7}{5}$$

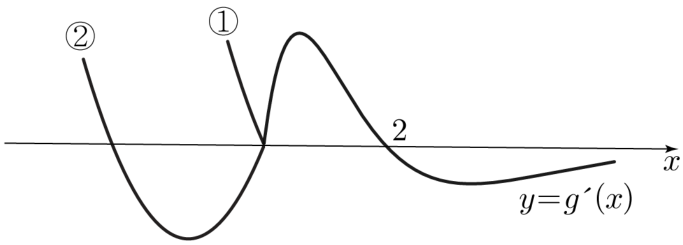
$$\left|\frac{\tan k+2}{\tan k-2}\right|=\frac{7}{5}$$

$\tan k=12$ or $\tan k=\frac{1}{3}$

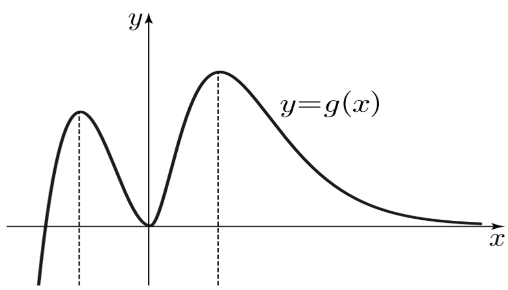
$\therefore \tan k=\frac{1}{3}$ $\left(\because 0<k<\frac{\pi}{3}\right)$

28. ⑤

$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ (6x-3x^2)e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$$

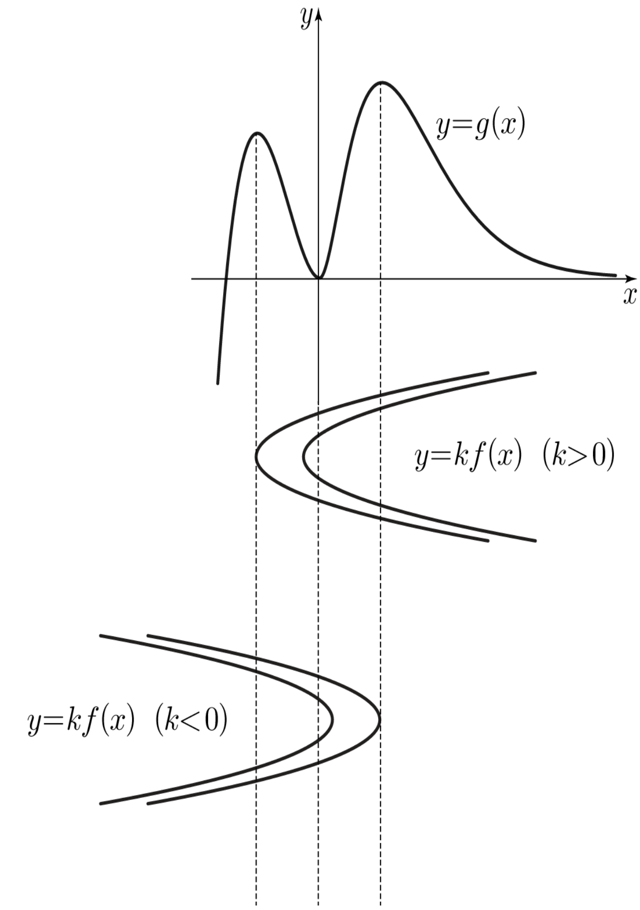


$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이여야 한다.
$f(x)$는 $x=0$에서 0을 지나야 하며 $x<0$에서 근을 가지는 ②와 같은 형태로 그려져야 한다.
($\because$ ①이라면 $g(kf(x))$의 극점이 5개가 될 수 없다.)
$f(x)=px(x+2a)$ $(p>0,\ a>0)$이라 하면
$g(x)$는 아래 그림과 같아진다.



$g(kf(x))$가 극값을 5개 가지도록 하는 모든 실수 k의 집합이
① $-\frac{2e}{9}\leq k<0$ ② $0<k\leq\frac{2}{9}$이다.

$g(kf(x))$가 극값을 가지는 점은 $kf(x)$의 극값인 점과 $g(x)$의 극값이 $g(\alpha)$일 때, $k(f(x))=\alpha$인 점이다.



(1) $k<0$일 때, k가 ①의 범위를 만족시키려면

$k=-\frac{2e}{9}$일 때, $-\frac{2e}{9}f(-a)=2$를 만족시켜야 한다.

$$-\frac{2e}{9}f(-a)=\left(-\frac{2e}{9}\right)(-a^2p)=2$$

(2) $k>0$ 일 때, k가 ②의 범위를 만족시키려면

$k=\frac{2}{9}$일 때, $\frac{2}{9}f(-a)=-2a$를 만족해야 한다.

$$\frac{2}{9}f(-a)=\frac{2}{9}(-a^2p)=-2a$$

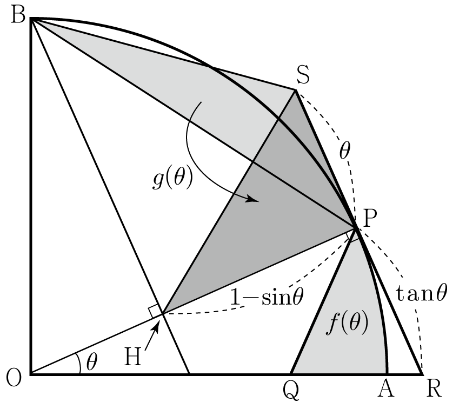
(1), (2)를 통해 얻어진 두 식을 연립하면

$$\therefore a=\frac{1}{e},\ p=9e,\ f(x)=9ex\left(x+\frac{2}{e}\right)$$

$$g(1)=3e^{-1},\ g\left(-\frac{2}{e}\right)=\int_0^{-\frac{2}{e}}f(x)dx=\frac{12}{e^2}$$

$$g(1)\times g\left(-\frac{2}{e}\right)=3e^{-1}\times 12e^{-2}=36e^{-3}$$

29. 60



[그림 참고]

그림과 같이 $\overline{PS}=\theta$, $\overline{PH}=1-\sin\theta$이므로 $2g(\theta)=\theta-\theta\sin\theta$이다. 또한 삼각형 OPQ에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}=\frac{\overline{PQ}=\sin\theta}{\sin\theta}$$ 이므로

$$f(\theta)=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\theta-\frac{1}{2}\cdot1\cdot cos2\theta\cdot tan\theta$$ 이다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{2g(\theta)-\theta\}^2}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\sin^2\theta}{\frac{1}{2}\times\theta^2\times\{1-\cos2\theta\}}=1$$

이다. $\therefore k=1$ 이므로 $60k=60$이다.

30. 25

$$f(2)=4f(4)+2f\left(\frac{1}{2}\right)-1,\ f(4)=0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right)+2f(2)-1,\ f\left(\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}xf(x^2)+\frac{2}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{4}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx-[\ln x]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{4}f(x)dx+\frac{3}{2}-(2\ln2)=0$$

$$\therefore\ -\int_{\frac{1}{4}}^{4}f(x)dx=3-4\ln2$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{4}xf'(x)dx=[xf(x)]_{\frac{1}{4}}^{4}-\int_{\frac{1}{4}}^{4}f(x)dx=3-4\ln2$$

$$p^2+q^2=9+16=25$$