2024학년도 수학대왕 모의고사 1회 정답표

수학 영역 정답표

공통 과목						선택 과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
1	⑤	2	12	⑤	4	23	④	2	23	④	2	23	③	2
2	③	2	13	②	4	24	⑤	3	24	④	3	24	④	3
3	②	3	14	④	4	25	②	3	25	②	3	25	⑤	3
4	③	3	15	③	4	26	③	3	26	③	3	26	⑤	3
5	①	3	16	8	3	27	⑤	3	27	⑤	3	27	②	3
6	②	3	17	88	3	28	②	4	28	①	4	28	①	4
7	④	3	18	10	3	29	197	4	29	13	4	29	74	4
8	④	3	19	40	3	30	70	4	30	36	4	30	72	4
9	③	4	20	17	4									
10	①	4	21	46	4									
11	⑤	4	22	12	4									

정답 및 해설(공통 과목)

1회 공통 과목 빠른 정답

1	⑤	9	③	17	88
2	③	10	①	18	10
3	②	11	⑤	19	40
4	③	12	⑤	20	17
5	①	13	②	21	46
6	②	14	④	22	12
7	④	15	③		
8	④	16	8		

1회 공통 과목 해설

1.

정답 ⑤

$4 \times 2^{\frac{2}{\sqrt{3}-1}} \times 2^{1-\sqrt{3}}$

$= 4 \times 2^{\sqrt{3}+1} \times 2^{1-\sqrt{3}}$

$= 4 \times 2^{(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})}$

$= 4 \times 2^2$

$= 16$

2.

정답 ③

$f(x) = 3x^2 - 5x$에서

$f'(x) = 6x - 5$

이므로

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = f'(2) = 7$

3.

정답 ②

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \frac{3}{7}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$

4.

정답 ③

$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = 2 + (-1) = 1$

5.

정답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

모든 항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$을 만족시키려면 $0 < r < 1$이어야 한다.

$\frac{a_3 + a_7}{a_5} = \frac{97}{36}$에서

$\frac{a_3}{a_5} + \frac{a_7}{a_5} = \frac{97}{36}$

$\frac{a_3}{a_3 r^2} + \frac{a_5 r^2}{a_5} = \frac{97}{36}$

$\frac{1}{r^2} + r^2 = \frac{97}{36}$

$36r^4 - 97r^2 + 36 = 0$

$(4r^2 - 9)(9r^2 - 4) = 0$

$0 < r < 1$이므로 $r = \frac{2}{3}$

따라서 $\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_2 r^3}{a_2} = r^3 = \frac{8}{27}$

6. 정답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+8$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$$3x^2+2ax+b=3(x+3)(x-1)$$
$$=3x^2+6x-9$$

따라서 $a=3,\ b=-9$이고

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+8$$

이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$$f(1)=1+3-9+8=3$$

7. 정답 ④

$16^x=18^y=k\ (k>0)$이라 하자.

$16^x=k$에서 $2^{4x}=k,\ 2=k^{\frac{1}{4x}}$

$18^y=k$에서 $18=k^{\frac{1}{y}}$

$\dfrac{3}{2x}+\dfrac{2}{y}=2$이고

$k^{\frac{3}{2x}+\frac{2}{y}}=k^{\frac{3}{2x}}\times k^{\frac{2}{y}}=2^6\times 18^2=(2^3\times 18)^2=144^2$이므로

$$k^2=144^2$$
$$k=144$$

$16^x=144$에서 $x=\log_{16}144$

$18^y=144$에서 $y=\log_{18}144$

따라서

$$x\log_{12}64=\log_{16}144\times\log_{12}64$$
$$=\frac{2\log 12}{4\log 2}\times\frac{6\log 2}{\log 12}=3,$$

$$(4-y)\log_3 18=(4-\log_{18}144)\times\log_3 18$$
$$=\log_{18}\frac{18^4}{144}\times\log_3 18$$
$$=\log_{18}729\times\log_3 18$$
$$=\frac{6\log 3}{\log 18}\times\frac{\log 18}{\log 3}=6$$

이므로

$$x\log_{12}64+(4-y)\log_3 18=3+6=9$$

8. 정답 ④

$$f(x)=\int\{3x^2+6f(1)x-1\}dx$$
$$=x^3+3f(1)x^2-x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

라 하면 $f(0)=-4$이므로

$$C=-4$$

즉, $f(x)=x^3+3f(1)x^2-x-4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=1+3f(1)-1-4$$
$$f(1)=2$$

따라서

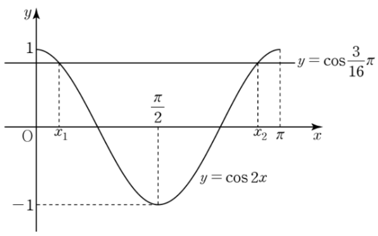
$$f(x)=x^3+6x^2-x-4$$

이므로

$$f(2)=8+24-2-4=26$$

9. 정답 ③

$$\sin\frac{5}{16}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{16}\pi\right)=\cos\frac{3}{16}\pi$$



위의 그림과 같이 곡선 $y=\cos 2x\ (0\le x\le\pi)$와 직선 $y=\cos\dfrac{3}{16}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$라 하면 $x_1=\dfrac{3}{32}\pi$이고 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$x_2=\pi-x_1=\frac{29}{32}\pi$$

따라서 $0\le x\le\pi$일 때, 부등식 $\cos 2x\le\sin\dfrac{5}{16}\pi$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\dfrac{3}{32}\pi\le x\le\dfrac{29}{32}\pi$이므로

$$\beta-\alpha=\frac{29}{32}\pi-\frac{3}{32}\pi=\frac{13}{16}\pi$$

10.

정답 ①

조건 (나)에서 접선 l의 방정식은 직선 $y=-x$와 수직이므로 직선 l의 기울기는 1이다. 즉,

$$y-f(2)=x-2$$

에서

$$y=x+f(2)-2$$

또한 $f(2)-f(-1)=3$에서 양변을 3으로 나누면

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=1$$

이므로 접선 l은 점 $(-1,\ f(-1))$을 지난다.

그러므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$$f(x)-\{x+f(2)-2\}=k(x-2)^2(x+1)$$

$$f(x)=k(x-2)^2(x+1)+x+f(2)-2$$

$$f'(x)=2k(x-2)(x+1)+k(x-2)^2+1$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$$f(1)=2k+f(2)-1=0 \cdots ㉠$$

$$f'(1)=-4k+k+1=-3k+1=0 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$k=\frac{1}{3},\ f(2)=\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)+x-\frac{5}{3}$이므로

$$f(4)=\frac{1}{3}\times 2^2\times 5+4-\frac{5}{3}=9$$

11.

정답 ⑤

시각 t에서 두 점 A, B의 위치를 각각 $x_{\mathrm{A}}(t)$, $x_{\mathrm{B}}(t)$라 하면

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{A}}(t) &= 1+\int_0^t(-3t+5)dt \\ &= 1+\left[-\frac{3}{2}t^2+5t\right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2}t^2+5t+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{B}}(t) &= -14+\int_0^t(3t-7)dt \\ &= -14+\left[\frac{3}{2}t^2-7t\right]_0^t \\ &= \frac{3}{2}t^2-7t-14 \end{aligned}$$

$t=t_1$일 때 두 점 A, B가 처음 만나므로

$$-\frac{3}{2}{t_1}^2+5t_1+1=\frac{3}{2}{t_1}^2-7t_1-14$$

$$3{t_1}^2-12t_1-15=0$$

$$3(t_1-5)(t_1+1)=0$$

$$\therefore\ t_1=5\ (\because\ t_1\geq 0)$$

또한, 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\begin{aligned} &\left|\left(-\frac{3}{2}t^2+5t+1\right)-\left(\frac{3}{2}t^2-7t-14\right)\right| \\ &=3|-t^2+4t+5| \\ &=3|-(t-2)^2+9| \end{aligned}$$

$0\leq t\leq 5$에서 두 점 사이의 거리는 $t=2$일 때 최대이므로

$$t_2=2$$

$$\therefore\ t_1+t_2=7$$

12.

정답 ⑤

(ⅰ) a_2가 3의 배수일 때,

$$a_3=\frac{1}{3}a_2+1=6,\ a_2=15$$

① a_1이 3의 배수일 때,

$$a_2=\frac{1}{3}a_1+1=15,\ a_1=42$$

이때 $a_1a_2=630$으로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

② a_1이 3의 배수가 아닐 때,

$$a_2=a_1+2=15,\ a_1=13$$

이때 $a_1a_2=195$로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) a_2가 3의 배수가 아닐 때,

$$a_3=a_2+2=6,\ a_2=4$$

① a_1이 3의 배수일 때,

$$a_2=\frac{1}{3}a_1+1=4,\ a_1=9$$

이때 $a_1a_2=36$으로 주어진 조건을 만족시킨다.

② a_1이 3의 배수가 아닐 때,

$$a_2=a_1+2=4,\ a_1=2$$

이때 $a_1a_2=8$로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$a_1=9,\ a_2=4$$

한편, a_3이 3의 배수이므로

$$a_4=\frac{1}{3}a_3+1=\frac{6}{3}+1=3$$

a_4가 3의 배수이므로

$$a_5=\frac{1}{3}a_4+1=\frac{3}{3}+1=2$$

a_5가 3의 배수가 아니므로

$$a_6=a_5+2=2+2=4$$

a_6이 3의 배수가 아니므로

$$a_7=a_6+2=4+2=6$$

이때

$$a_1=9$$

$$a_2=a_6=a_{10}=a_{14}=\cdots=4$$

$$a_3=a_7=a_{11}=a_{15}=\cdots=6$$

$$a_4=a_8=a_{12}=a_{16}=\cdots=3$$

$$a_5=a_9=a_{13}=a_{17}=\cdots=2$$

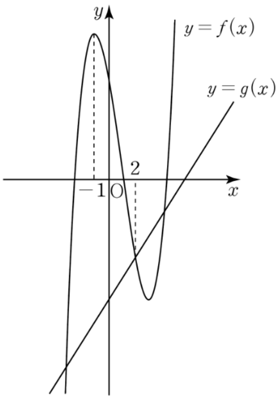
따라서 $a_k\geq a_2$를 만족시키는 30 이하의 자연수 k의 개수는

$1+2\times 7+1=16$이다.

13.

정답 ②

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 다음 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=2$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+25$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$이고 $f'(-1)=0$이어야 하므로

$6-2a+b=0 \cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$이어야 하므로 $16+4a+2b+25=-19$에서

$2a+b=-30 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-18$이므로

$f(x)=2x^3-6x^2-18x+25$이고

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

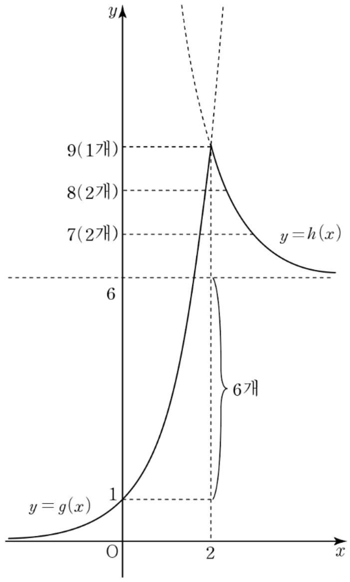
$f(-1)+f(3)=35-29=6$

14.

정답 ④

$g(x)=3^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}-3^{a-2}+9$라 하면 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고, 곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은 $y=-3^{a-2}+9$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 11이므로 $x\le 2$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 9이다.

곡선 $y=h(x)$의 점근선이 $y=-3^{a-2}+9$이므로 $-3^{a-2}+9$는 6 이상 7 미만이어야 한다.

즉,

$6\le -3^{a-2}+9<7$,

$2<3^{a-2}\le 3$

$\log_3 2<a-2\le 1$

$2+\log_3 2<a\le 3$

따라서 $m=2+\log_3 2$, $M=3$이므로

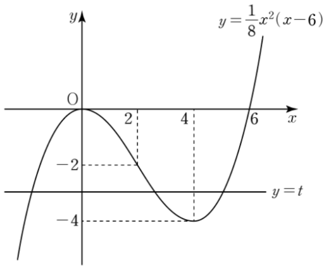
$3^{M+m}=3^{5+\log_3 2}=3^5\times 2=486$

15. 정답 ③

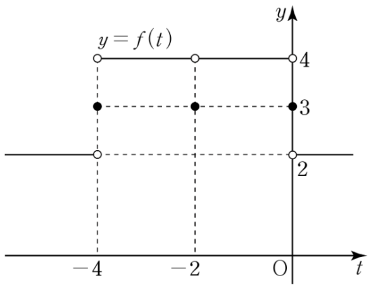
$(x-2)\{x^2(x-6)-8t\}=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2(x-6)-8t=0$

방정식 $x^2(x-6)-8t=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\frac{1}{8}x^2(x-6)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.



그러므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$가 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 불연속이므로 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\lim_{t\to-4-} f(t)g(t)=2g(-4)$,

$\lim_{t\to-4+} f(t)g(t)=4g(-4)$,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$

이고 함수 $f(t)g(t)$가 $t=-4$에서 연속이므로

$2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$

$\therefore\ g(-4)=0$

같은 방법으로

$g(-2)=g(0)=0$

조건 (가)에서 $g(x)$가 삼차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+2)(x+4)\ (a\neq 0)$이라 하면 조건 (나)에서 $g(4)=64$이므로

$a=\frac{1}{3}$

따라서 $g(x)=\frac{1}{3}x(x+2)(x+4)$이므로

$g(2)=16$

16. 정답 8

$x-6,\ 9-x$는 로그의 진수이므로

$x-6>0,\ 9-x>0$에서

$6<x<9$

방정식 $\log_2(x-6)=1+\log_4(9-x)$에서

$\log_2(x-6)=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2(9-x)$

$2\log_2(x-6)=2\log_2 2+\log_2(9-x)$

$\log_2(x-6)^2=\log_2 2^2+\log_2(9-x)$

$(x-6)^2=4(9-x)$

$x(x-8)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=8$

이때 $6<x<9$이므로 구하는 실수 x의 값은 8이다.

17. 정답 88

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(a_k+2)^2&=\sum_{k=1}^{15}({a_k}^2+4a_k+4)\\&=\sum_{k=1}^{15}\{({a_k}^2+3a_k)+a_k+4\}\\&=\sum_{k=1}^{15}a_k(a_k+3)+\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}4\\&=25+3+4\times 15=88\end{aligned}$$

18. 정답 10

함수 $f(x)=(x-3)\left(x^3-x+a\right)$에서

$f'(x)=(x^3-x+a)+(x-3)(3x^2-1)$

$f'(2)=(a+6)-11$

$=a-5=5$

따라서 $a=10$

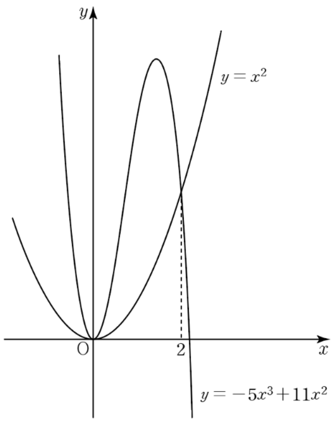
19.

정답 40

두 곡선 $y=-5x^3+11x^2$, $y=x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$$-5x^3+11x^2=x^2$$
$$5x^2(x-2)=0$$
$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

이때, 두 함수 $y=-5x^3+11x^2$, $y=x^2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 구하는 넓이는

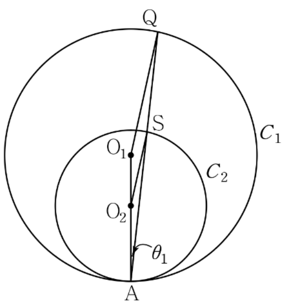
$$\int_0^2 \{(-5x^3+11x^2)-x^2\}dx$$
$$=\int_0^2 (-5x^3+10x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{5}{4}x^4+\frac{10}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\left(-20+\frac{80}{3}\right)-0$$
$$=\frac{20}{3}$$

따라서 $S=\dfrac{20}{3}$이므로

$$6S=40$$

20.

정답 17



$\angle O_1AQ=\theta_1$이라 하면

이등변삼각형 O_1AQ에서

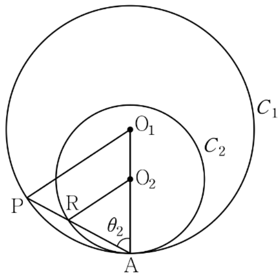
$$\overline{AQ}=2\times\overline{O_1A}\times\cos\theta_1$$
$$=10\cos\theta_1$$

이등변삼각형 O_2AS에서

$$\overline{AS}=2\times\overline{O_2A}\times\cos\theta_1$$
$$=6\cos\theta_1$$

따라서

$$\overline{AQ}:\overline{AS}=5:3$$



$\angle O_1AP=\theta_2$라 하면

이등변삼각형 O_1AP에서

$$\overline{AP}=2\times\overline{O_1A}\times\cos\theta_2$$
$$=10\cos\theta_2$$

이등변삼각형 O_2AR에서

$$\overline{AR}=2\times\overline{O_2A}\times\cos\theta_2$$
$$=6\cos\theta_2$$

따라서

$$\overline{AP}:\overline{AR}=5:3$$

그러므로 두 삼각형 ARS, APQ는 서로 닮은 도형이고, 두 선분 PQ, RS는 서로 평행하다.

삼각형 O_1O_2B에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1B}^2$$
$$=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2B}^2-2\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2B}\times\cos(\angle O_1O_2B)$$
$$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\angle O_1O_2B)$$
$$=13-12\cos(\angle O_1O_2B)\ \cdots\ ㉠$$

삼각형 O_1O_2T에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_2T}^2$$
$$=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_1T}^2-2\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1T}\times\cos(\angle O_2O_1T)$$
$$=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos(90^\circ+\angle O_1O_2B)$$
$$=29+20\sin(\angle O_1O_2B)\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\left(\frac{\overline{O_1B}^2-13}{12}\right)^2+\left(\frac{\overline{O_2T}^2-29}{20}\right)^2$$
$$=\cos^2(\angle O_1O_2B)+\sin^2(\angle O_1O_2B)$$
$$=1$$

따라서 $p=10$, $q=6$, $r=1$이므로

$$p+q+r=10+6+1=17$$

21.

정답 46

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} S_k &= \sum_{k=1}^{5}\left\{\frac{d}{2}k^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\} \\ &= \frac{d}{2} \times \sum_{k=1}^{5} k^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right) \times \sum_{k=1}^{5} k \\ &= \frac{d}{2} \times \frac{5\times 6\times 11}{6} + \left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{5\times 6}{2} \\ &= \frac{55}{2}d + 15\left(a-\frac{d}{2}\right) \\ &= 15a + 20d\end{aligned}$$

$15a+20d$는 5의 배수이고 $\sum_{k=1}^{5} S_k$가 어떤 자연수의 제곱이므로 자연수 m에 대하여

$$15a + 20d = 25m^2$$

$$3a + 4d = 5m^2 \ \cdots \ ㉠$$

$a_9 = 55$에서

$$a + 8d = 55 \ \cdots \ ㉡$$

$3\times㉡ - ㉠$에서 $20d = 165 - 5m^2$

$$4d = 33 - m^2$$

$$d = \frac{33-m^2}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 m의 값은 5 이하의 홀수이어야 한다.

즉, m이 될 수 있는 값은

1, 3, 5

이고, 이때 d의 값은

8, 6, 2

한편, ㉡에서 $a = 55 - 8d$이고 이 값이 양수이어야 하므로

$$55 - 8d > 0$$

$$d < \frac{55}{8}$$

따라서 가능한 a_1의 값은 7, 39이므로 구하는 합은

$$7 + 39 = 46$$

22.

정답 12

$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$이므로

조건 (나)에서

$$\{xf(x)\}' = 3x^2 - 4x - 12 + g'(x)$$

$$xf(x) = x^3 - 2x^2 - 12x + g(x) + C \ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \ \cdots \ ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0 = g(0) + C$$

조건 (가)에서 $g(0)=0$이므로

$$C = 0$$

또한 두 조건 (가), (다)에 의하여 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$$g(x) = x(x-p)^2$$

으로 놓을 수 있으므로 이를 ㉠에 대입하면

$$xf(x) = x^3 - 2x^2 - 12x + x(x-p)^2$$

$f(x)$는 다항함수이므로

$$f(x) = x^2 - 2x - 12 + (x-p)^2$$

조건 (가)에서 $f(4)=0$이므로

$f(4) = 16 - 8 - 12 + (4-p)^2 = 0$에서

$$p^2 - 8p + 12 = 0$$

$$(p-2)(p-6) = 0$$

$$\therefore\ p = 2 \text{ 또는 } p = 6$$

(i) $p=2$일 때

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2x - 12 + (x-2)^2 \\ &= 2x^2 - 6x - 8\end{aligned}$$

$$\therefore\ f(5) = 50 - 30 - 8 = 12$$

(ii) $p=6$일 때

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2x - 12 + (x-6)^2 \\ &= 2x^2 - 14x + 24\end{aligned}$$

$$\therefore\ f(5) = 50 - 70 + 24 = 4$$

(i), (ii)에 의하여 $f(5)$의 최댓값은 12이다.

정답 및 해설(확률과 통계)

1회 확률과 통계 빠른 정답

23	④	26	③	29	197
24	⑤	27	⑤	30	70
25	②	28	②		

1회 확률과 통계 해설

23.

정답 ④

이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{7}{15}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X) = 90 \times \frac{7}{15} = 42$$

24.

정답 ⑤

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$이다.

P지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 10 = 30$$

25.

정답 ②

A와 B^C이 서로 배반사건이므로

$$A \subset B$$

즉 $A = A \cap B$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

26.

정답 ③

이 공장에서 생산한 비누 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(188,\ 4^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-188}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한 개의 비누 제품이 정품으로 인정될 확률이 0.6247이므로

$$\mathrm{P}(a \le X \le 194) = \mathrm{P}\left(\frac{a-188}{4} \le Z \le \frac{194-188}{4}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{a-188}{4} \le Z \le 1.5\right)$$

이때 $\mathrm{P}(a \le X \le 194) = 0.6247 > 0.4332$이므로

$$\frac{a-188}{2} < 0$$

즉,

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-188}{4} \le Z \le 1.5\right) = \mathrm{P}\left(\frac{a-188}{4} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{188-a}{4}\right) + 0.4332$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{188-a}{4}\right) = 0.6247 - 0.4332 = 0.1915$$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) = 0.1915$이므로

$$\frac{188-a}{4} = 0.5$$

따라서 $a = 188 - 2 = 186$

27.

정답 ⑤

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 모든 함수 f의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

임의로 선택한 함수 f가 $f(1)+f(2)+f(3)>2f(4)-1$인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 임의로 선택한 함수 f가 $f(1)+f(2)+f(3)\le 2f(4)-1$인 사건이다.

사건 A^C은 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(4)=1$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)\le 2f(4)-1$에서

$$f(1)+f(2)+f(3)\le 1 \cdots ㉠$$

$f(1),\ f(2),\ f(3)$은 모두 1 이상의 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ii) $f(4)=2$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)\le 2f(4)-1$에서

$$f(1)+f(2)+f(3)\le 3 \cdots ㉡$$

$f(1),\ f(2),\ f(3)$은 모두 1 이상의 자연수이므로 ㉡을 만족시키려면 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이다.

즉, 함수 f의 개수는 1이다.

(iii) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)\le 2f(4)-1$에서

$$f(1)+f(2)+f(3)\le 5 \cdots ㉢$$

$f(1),\ f(2),\ f(3)$은 모두 1 이상 3 이하의 자연수이므로 ㉢을 만족시키려면

$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 중 적어도 두 개는 1이거나 두 개는 2, 나머지 한 개는 1이어야 한다.

$f(1)=f(2)=f(3)=1$인 함수 f의 개수는 1,

$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 중 두 개는 1, 나머지 한 개는 2 또는 3인 함수 f의 개수는 ${}_3C_2\times 2=6$,

$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 중 두 개는 2, 나머지 한 개는 1인 함수 f의 개수는 ${}_3C_2=3$이므로

구하는 함수 f의 개수는 $1+6+3=10$

(i), (ii), (iii)에서

$n(A^C)=0+1+10=11$이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{11}{81}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{11}{81}=\frac{70}{81}$$

28.

정답 ②

주머니 A에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 0개일 확률은 $\dfrac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{20}$

주머니 A에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 1개일 확률은 $\dfrac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{9}{20}$

주머니 A에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 2개일 확률은 $\dfrac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\dfrac{9}{20}$

주머니 A에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 3개일 확률은 $\dfrac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{20}$

주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 1개일 확률은 $\dfrac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{5}$

주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 2개일 확률은 $\dfrac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\dfrac{3}{5}$

주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 3개일 확률은 $\dfrac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{5}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1, 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2라 하면 구하는 확률은 $X_1+X_2=2$일 확률이다.

(i) $(X_1,\ X_2)=(2,\ 0)$인 경우

첫 번째 시행에서 6의 약수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{20}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{100}$$

첫 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{150}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{150}=\frac{1}{60}$$

(ii) $(X_1,\ X_2)=(0,\ 2)$인 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{150}=\frac{1}{60}$$

(iii) $(X_1,\ X_2)=(1,\ 1)$인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{20}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{20}\right)=\frac{9}{100}$$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{225}$$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{20}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{25}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{9}{100}+\frac{1}{225}+\frac{1}{25}=\frac{121}{900}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+\frac{121}{900}=\frac{151}{900}$$

29.

정답 197

2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 곱이 12인 사건을 A, 주어진 시행에서 앞면이 나온 동전이 뒷면이 나온 동전보다 1개 더 많은 사건을 B라 하자.

(i) 두 주사위의 눈의 수의 곱이 12인 경우

두 주사위의 눈의 수가 각각 2, 6 또는 3, 4 또는 4, 3 또는 6, 2인 경우이므로

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\mathrm{P}(B \mid A)$는 5개의 동전 중 앞면이 나온 동전이 3개, 뒷면이 나온 동전이 2개일 확률이므로

$$\mathrm{P}(B \mid A) = {}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{144}\end{aligned}$$

(ii) 두 주사위의 눈의 수의 곱이 12가 아닌 경우

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$\mathrm{P}(B \mid A^C)$은 3개의 동전 중 앞면이 나온 동전이 2개, 뒷면이 나온 동전이 1개일 확률이므로

$$\mathrm{P}\left(B \mid A^C\right) = {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C \cap B) &= \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B \mid A^C) \\ &= \frac{8}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A^C \cap B\right) \\ &= \frac{5}{144} + \frac{1}{3} = \frac{53}{144}\end{aligned}$$

따라서 $p = 144$, $q = 53$이므로

$$p + q = 197$$

30.

정답 70

$a\square b\square c\square d$

위와 같이 빨간색 카드 3장을 놓고, 빨간색 카드 가장 왼쪽, 두 카드의 사이, 빨간색 카드 가장 오른쪽에 놓이는 파란색 카드의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.

(i) 가장 왼쪽 빨간색 카드가 놓여 있는 접시에 적힌 수가 홀수인 경우

$a+b+c+d=9$이고, 조건을 만족시키도록 나열하려면 a, b, c는 모두 0 또는 짝수이어야 하고, d는 홀수이어야 한다.

음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'$, $d=2d'+1$로 놓으면

$$2a'+2b'+2c'+(2d'+1)=9$$

$$a'+b'+c'+d'=4$$

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 $a'+b'+c'+d'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_4 = {}_{4+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$$

(ii) 가장 왼쪽 빨간색 카드가 놓여 있는 접시에 적힌 수가 짝수인 경우

$a+b+c+d=9$이고, 조건을 만족시키도록 나열하려면 a는 홀수이어야 하고, b, c, d는 모두 0 또는 짝수이어야 한다.

음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=2a'+1$, $b=2b'$, $c=2c'$, $d=2d'$으로 놓으면

$$(2a'+1)+2b'+2c'+2d'=9$$

$$a'+b'+c'+d'=4$$

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 $a'+b'+c'+d'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_4 = {}_{4+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$$

(i), (ii)에서

$$35+35=70$$

정답 및 해설(미적분)

1회 미적분 빠른 정답

23	④	26	③	29	13
24	④	27	⑤	30	36
25	②	28	①		

1회 미적분 해설

23.

정답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{6x}{5x}\right)=\frac{6}{5}$$

24.

정답 ④

$\frac{dx}{dt}=3-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=4\sin 2t\cos 2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sin 2t\cos 2t}{3-\sin t}$$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

25.

정답 ②

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln 5$에서

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\ln 5dx$$

$$\ln f(x)=x\ln 5+C\ (\because\ f(x)>0)$$

$$\ln f(x)=\ln 5^x+C$$

$f(0)=\frac{1}{e}$이므로 $x=0$을 대입하면

$$\ln f(0)=\ln 1+C$$

$$\ln\frac{1}{e}=C$$

$$\therefore\ C=-1$$

$\ln f(x)=\ln 5^x-1$이므로

$$f(x)=\frac{5^x}{e}$$

$$\therefore\ f(2)=\frac{5^2}{e}=\frac{25}{e}$$

26.

정답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n\beta_n=4n^2-9$$

이므로 $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\alpha_k\beta_k}\ (n\geq 2)$라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4k^2-9}\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(2k-3)(2k+3)}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)\right.\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{23}{15}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{23}{15}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{6}\times\frac{23}{15}\\&=\frac{23}{90}\end{aligned}$$

27.

정답 ⑤

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=e^{4t}x-\frac{t}{4}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는

$$(\alpha,\ \alpha^2),\ (\beta,\ \beta^2)$$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이다. 두 식 $y=x^2$, $y=e^{4t}x-\frac{t}{4}$를 연립하면

$$x^2=e^{4t}x-\frac{t}{4},$$

$$x^2-e^{4t}x+\frac{t}{4}=0$$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=e^{4t},$$

$$\alpha\beta=\frac{t}{4}$$

이때

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=e^{8t}-\frac{t}{2}\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}e^{4t},\ \frac{1}{2}e^{8t}-\frac{t}{4}\right)$이다.

즉, 점 P의 시각 t에서의 위치는

$$x=\frac{1}{2}e^{4t},\ y=\frac{1}{2}e^{8t}-\frac{t}{4}$$

이다.

$\frac{dx}{dt}=2e^{4t}$, $\frac{dy}{dt}=4e^{8t}-\frac{1}{4}$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\&=\sqrt{4e^{8t}+\left(4e^{8t}-\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\sqrt{4e^{8t}+16e^{16t}-2e^{8t}+\frac{1}{16}}\\&=\sqrt{16e^{16t}+2e^{8t}+\frac{1}{16}}\\&=\sqrt{\left(4e^{8t}+\frac{1}{4}\right)^2}\\&=4e^{8t}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^2\left(4e^{8t}+\frac{1}{4}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^{8t}+\frac{1}{4}t\right]_0^2\\&=\frac{1}{2}e^{16}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+0\right)\\&=\frac{e^{16}}{2}\end{aligned}$$

28.

정답 ①

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}}f(x)dx&=\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}}\cos(ax)dx\\&=\left[\frac{1}{a}\sin(ax)\right]_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}}=\frac{2}{a}\end{aligned}$$

$\frac{2}{a}\ge 1$이므로

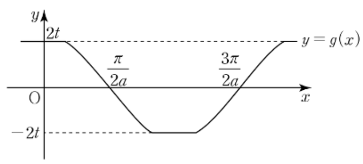
$$0<a\le 2\ \cdots\ ㉠$$

조건 (나)에서

$$\int_0^{4\pi}\{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx=0$$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-2t & (-1\le\cos(ax)<-t)\\ 2\cos(ax) & (-t\le\cos(ax)<t)\\ 2t & (t\le\cos(ax)\le 1)\end{cases}$$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같으므로 $\int_0^{\frac{\pi}{a}}g(x)dx=0$이고

$\int_0^{4\pi}g(x)dx=0$이므로

$$4\pi=\frac{\pi}{a}\times n\ (n\text{은 자연수}),\ a=\frac{1}{4}n$$

㉠에서

$$0<\frac{n}{4}\le 2$$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값은 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, 2이므로 그 합은 9이다.

29. 정답 13

(i) $|x| > 1$일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-4)x^{2n+1}+4x}{5x^{2n}+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a-4)x + \frac{4}{x^{2n-1}}}{5+\frac{1}{x^{2n}}}$$
$$= \frac{a-4}{5}x$$

(ii) $|x| < 1$일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-4)x^{2n+1}+4x}{5x^{2n}+1}$$
$$= 4x$$

(iii) $x = 1$일 때

$$f(1) = \frac{a}{6}$$

(iv) $x = -1$일 때

$$f(-1) = -\frac{a}{6}$$

(i) ~ (iv)에서 $f(1) = \frac{a}{6}$이므로

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{a}{6}\right) = 2$$

① $\frac{a}{6} > 1$, 즉 $|a| > 6$일 때,

$f\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a-4}{5} \times \frac{a}{6} = 2$에서

$$a^2 - 4a - 60 = 0$$
$$(a-10)(a+6) = 0$$
$$a = 10$$

② $\frac{a}{6} < 1$, 즉 $|a| < 6$일 때,

$f\left(\frac{a}{6}\right) = 4 \times \frac{a}{6} = 2$에서

$$a = 3$$

③ $\frac{a}{6} = 1$, 즉 $a = 6$일 때,

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = f(1) = 1 \neq 2$$

④ $\frac{a}{6} = -1$, 즉 $a = -6$일 때,

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = f(-1) = 1 \neq 2$$

① ~ ④에서

$a = 10$ 또는 $a = 3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$10 + 3 = 13$$

30. 정답 36

선분 AB의 중점을 O라 하면

$$\overline{OP} = \sqrt{7}$$
$$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = \sqrt{7} - (\sqrt{7}-1) = 1$$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{CP} \times \overline{OC} \times \cos\theta$$

$\overline{CP} = x$라 하면

$$(\sqrt{7})^2 = x^2 + 1^2 - 2 \times x \times 1 \times \cos\theta$$
$$x^2 - 2x\cos\theta - 6 = 0 \ \cdots \ ㉠$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$를 ㉠에 대입하면

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$x > 0$이므로 $x = 3$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta} - 2\cos\theta\frac{dx}{d\theta} + 2x\sin\theta = 0$$
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta - x}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3 \times \sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} - 3} = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

이때 $\overline{PC} = \overline{PQ}$이고 $\angle CPQ = \pi - 2\theta$이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{PQ} \times \sin(\pi - 2\theta)$$
$$= \frac{1}{2}x^2\sin 2\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$
$$= x\frac{dx}{d\theta}\sin 2\theta + x^2\cos 2\theta$$

이 식에 $\theta = \frac{\pi}{3}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 3 \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right) \times \sin\frac{2\pi}{3} + 3^2\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$= -\frac{36}{5}$$

따라서 $-5 \times S'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -5 \times \left(-\frac{36}{5}\right) = 36$

정답 및 해설(기하)

1회 기하 빠른 정답

23	③	26	⑤	29	74
24	④	27	②	30	72
25	⑤	28	①		

1회 기하 해설

23.

정답 ③

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(3,\ -6,\ -4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(-3,\ -6,\ 4)$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{-6-(-6)\}^2+\{-4-4\}^2} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

24.

정답 ④

타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$$

$y=0$일 때,

$$\frac{x}{4}+0=1$$

$$x=4$$

따라서 구하는 x절편은 4이다.

25.

정답 ⑤

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

이때

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-3)^2+\{8-(-4)\}^2}=13$$

이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=13$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원이므로 그 길이는 26π이다.

26.

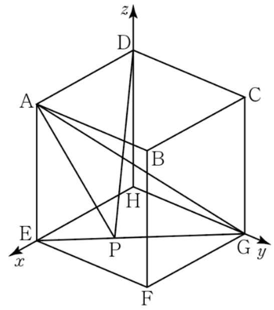
정답 ⑤

점 H를 원점이라 하고,

반직선 HE가 x축의 양의 방향,

반직선 HG가 y축의 양의 방향,

반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록 직육면체 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$를 놓으면 그림과 같다.



삼각형 AEG에서

$$\overline{\mathrm{AE}}=12,$$

$$\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{(8\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2}=16,$$

이고, 점 P가 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이 선분 EG와 만나는 점이므로

$$\overline{\mathrm{EP}}:\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AG}}=3:5$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{EP}}=6,\ \overline{\mathrm{PG}}=10$$

이때, xy평면에서 점 P는 직선 $y=-x+8\sqrt{2}$위의 점이고 $\overline{\mathrm{EP}}=6$이므로

$\mathrm{P}(p,\ -p+8\sqrt{2},\ 0)\ (0<p<8\sqrt{2})$라 하면 $\mathrm{E}(8\sqrt{2},\ 0,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{EP}} &= \sqrt{(p-8\sqrt{2})^2+(-p+8\sqrt{2})^2} \\ &= (8\sqrt{2}-p)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$(8\sqrt{2}-p)\sqrt{2}=6$에서

$$8\sqrt{2}-p=3\sqrt{2}$$

$$\therefore\ p=5\sqrt{2}$$

따라서 $\mathrm{P}(5\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 0)$이고, $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 12)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DP}} &= \sqrt{(5\sqrt{2}-0)^2+(3\sqrt{2}-0)^2+(0-12)^2} \\ &= 2\sqrt{53}\end{aligned}$$

27.

정답 ②

포물선 $y^2 = 4px$에서 초점 F의 좌표는

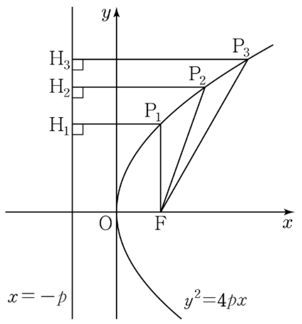
$(p,\ 0)$

이고, 준선의 방정식은

$x = -p$

이다.

포물선 위의 세 점 $P_1,\ P_2,\ P_3$에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 $H_1,\ H_2,\ H_3$이라 하자.



세 점 $P_1,\ P_2,\ P_3$의 x좌표가 각각 $p,\ 2p+1,\ 3p+5$이므로 포물선의 성질에 의해

$$\overline{FP_1} = \overline{H_1P_1} = p + p = 2p,$$

$$\overline{FP_2} = \overline{H_2P_2} = p + (2p+1) = 3p+1,$$

$$\overline{FP_3} = \overline{H_3P_3} = p + (3p+5) = 4p+5$$

이다.

이때, $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \overline{FP_3}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\overline{FP_2}^2 = \overline{FP_1} \times \overline{FP_3}$에서

$$(3p+1)^2 = 2p(4p+5)$$

$$9p^2 + 6p + 1 = 8p^2 + 10p$$

$$p^2 - 4p + 1 = 0$$

$p > 2$이므로

$$p = 2 + \sqrt{3}$$

28.

정답 ①

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 100\ \cdots$ ㉠,

$S_2 : x^2 + (y-7)^2 + z^2 = 51\ \cdots$ ㉡이라 놓고

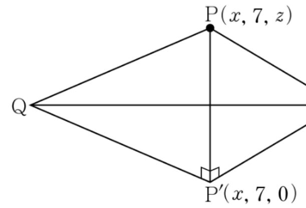
㉠−㉡을 하면 $y^2 - (y-7)^2 = 49,\ 14y - 49 = 49,\ 14y = 98$

$\therefore\ y = 7$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2 + z^2 = 51\ \cdots$ ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은 $x^2 + z^2 = 51,\ y = 7$이다.

두 구가 만나서 생기는 원 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ 7,\ z)$라 하면 점 P의 xy평면 위로의 정사영은 $P'(x,\ 7,\ 0)$이고, 두 점 Q, R 사이의 거리는 구 S_1의 지름과 같으므로 $\overline{QR} = 20$이다.



$\triangle QP'R = \dfrac{1}{2} \times \overline{QR} \times |(\text{점 } P'\text{의 } x\text{좌표})| = 10|x|$

$\therefore$ (사면체 $PQP'R$의 부피)

$= \dfrac{1}{3} \times \triangle QP'R \times \overline{PP'} = \dfrac{1}{3} \times 10|x| \times |z|$

$= \dfrac{10}{3}|xz| = \dfrac{10}{3}\sqrt{x^2z^2}$

$\le \dfrac{10}{3} \times \dfrac{x^2+z^2}{2}$ (단, 등호는 $|x| = |z|$일 때 성립)

$= 85$ ($\because$ ㉢)

따라서 사면체 $PQP'R$의 부피의 최댓값은 85이다.

29.

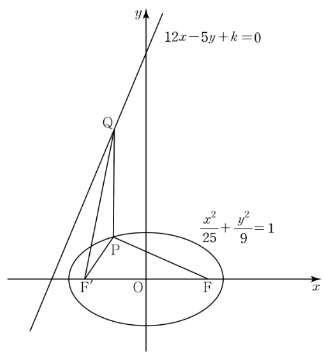
정답 74

타원 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$의 초점 F의 x좌표를 $c\ (c > 0)$이라 하면

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

즉,

$$F(4,\ 0)$$



타원 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$의 다른 한 초점을 F'이라 하면 $F'(-4,\ 0)$이고 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 10\ \cdots\ ㉠$$

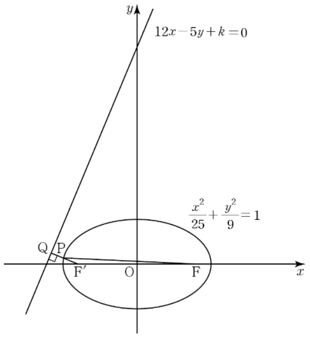
한편, 직선 $12x - 5y + k = 0$ 위의 점 Q를 고정시키면 ㉠에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PQ} = (10 - \overline{PF'}) - \overline{PQ}$$

$$= 10 - (\overline{PF'} + \overline{PQ})$$

$$\le 10 - \overline{QF'}\ \cdots\ ㉡$$

즉, 점 P가 선분 $\mathrm{QF'}$과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 교점에 있을 때, $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은 $10-\overline{\mathrm{QF'}}$이고, 이 값이 최댓값이 되기 위해서는 선분 $\mathrm{QF'}$의 길이가 최소이어야 한다.



직선 $12x-5y+k=0$ 위의 임의의 점 Q에 대하여 선분 $\mathrm{QF'}$의 길이가 최소가 되는 점 Q의 위치는 점 Q가 점 F′에서 직선 $12x-5y+k=0$에 내린 수선의 발일 때이고, 이때 점 P는 선분 $\mathrm{QF'}$과 타원의 교점에 있음을 알 수 있다. 그러므로 선분 $\mathrm{QF'}$의 길이의 최솟값은 점 F′과 직선 $12x-5y+k=0$ 사이의 거리와 같다.

즉,

$$\overline{\mathrm{QF'}} \geq \frac{|12\times(-4)-0+k|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|k-48|}{13}$$

㉡에서

$$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10-\overline{\mathrm{QF'}} \leq 10-\frac{|k-48|}{13}$$

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값이 8이므로

$$10-\frac{|k-48|}{13}=8,\ |k-48|=26$$

$$k=22 \text{ 또는 } k=74$$

$k>15\sqrt{17}$이므로

$$k=74$$

30.

정답 72

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 방향이 같다. $\cdots$ ㉠

$$4|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=4|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}=|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$$

㉠에서 $\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$이므로

$$4|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}| \cdots ㉡$$

조건 (나)에서

$$0<\angle\mathrm{CBP}<\frac{\pi}{2}$$

조건 (다)와 ㉠에서

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos(\angle\mathrm{ACM})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\times\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$$

이때, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CM}}$은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선이다

그러므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:\sqrt{5}$에서

$$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{5}:2$$

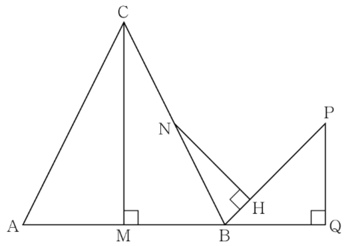
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2=32$$

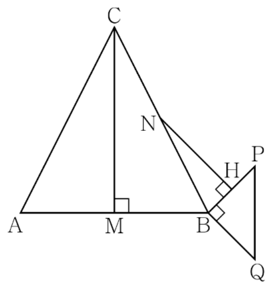
$$|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=8$$

㉡에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{2}\times8=4$$

삼각형 BPQ가 직각이등변삼각형이므로 다음과 같다.





선분 BC의 중점을 N, 점 N에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{XN}}|$$
$$\geq 2|\overrightarrow{\mathrm{HN}}|$$

이때 위의 그림을 점 M을 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 B(4, 0), C(0, 8)이므로

$$\mathrm{N}(2,\ 4)$$
$$\overline{\mathrm{BP}}: y=x-4$$
$$\overline{\mathrm{HN}}: y=-x+6$$

또한 두 직선 BP, HN의 교점의 x좌표는

$$x-4=-x+6$$
$$x=5$$

즉, 교점 H(5, 1)이다.

따라서 $m=2\overline{\mathrm{HN}}=2\sqrt{(5-2)^2+(1-4)^2}=6\sqrt{2}$이므로

$$m^2=72$$