

2016학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학)

모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[제시문 1]

[가] 자연수 n 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n} \right\}$ 이라 하자.

[나] A_n 의 임의의 원소가 x 가 주어졌을 때, 0 또는 1의 값을 가지는 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이 존재하여 항상

$$x = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n}$$

으로만 표현되어진다. 이 때, 함수 $f_j : A_n \rightarrow \{0,1\}$ 을 $f_j(x) = a_j$ 로 정의하자. ($j = 1, 2, 3 \dots n$)

[다] A_n 을 정의역으로 가지는 함수 g_j 를 $g_j(x) = 2f_j(x) - 1$ 로 정의한다.

[1-1] 집합 $\{x \in A_n | f_1(x) = 1\}$ 의 원소의 개수를 구하시오. [5점]

[1-2] $n = 10$ 일 때, 집합 $\{x \in A_{10} | f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_6(x) = 4\}$ 의 원소의 개수를 구하시오. [5점]

[1-3] $n = 3$ 일 때, 함수 g_j 의 그래프 $\{(x, g_j(x)) | x \in A_3\}$ 에 대하여 $j = 1, 2$ 인 경우의 그래프를 좌표평면 위에 각각 나타내시오. [5점]

[1-4] m 이 n 보다 작거나 같은 자연수 일 때, 다음 값을 구하시오. [10점]

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left\{ g_1 \left(\frac{k-1}{2^n} \right) + g_2 \left(\frac{k-1}{2^n} \right) + \dots + g_m \left(\frac{k-1}{2^n} \right) \right\}^2$$

[제시문 2]

[가] 좌표공간 반구면 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ 그리고 } z \geq 0\}$ 가 주어졌을 때, S 를 x 축을 회전축으로 하여 각 t 만큼 회전시킨 도형을 S_t 라 하자.

[나] 도형을 $\{(x, y, z) \in S_t | z \geq 0\}$ 의 xy 평면 위로의 정사영을 도형 R_t 라 하자.

[다] xy 평면 위에서 도형 R_t 를 포함하고 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형 넓이의 최솟값을 $f(t)$ 라 하자.

[라] xy 평면 위에서 도형 R_t 에 포함되고 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형 넓이의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자.

[2-1] $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 도형 R_t 의 넓이를 구하시오. [5점]

[2-2] 모든 실수 t 에 대해 함수 $f(t)$ 를 구하고, 좌표평면 위에 그 그래프를 나타내시오. [10점]

[2-3] $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $g(t)$ 를 구하시오. [10점]

[2-4] 도형 R_t 의 넓이가 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) \pi$ 일 때, $g(t)$ 의 값을 구하시오. [10점]