01. [어차피 더해야 한다면]

sol)

행렬 A의 모든 성분의 합은 5이고, 단위행렬 E의 모든 성분의 합은 2이므로 답은 ③ 7입니다.

02. [삼각함수 공식들쯤이야]

sol)

$$\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

03. [가장 빠르게 증가하는 요소]

sol)

분모, 분자 통틀어 $n \to \infty$일 때 양의 무한대로 발산하는 요소가 2^n입니다. 이때 엄밀히 말해 계수라고 할 수는 없지만, 분모, 분자의 2^n 앞에 곱해진 숫자가 각각 2와 1이므로 답은 $\frac{2}{1} = 2$가 됩니다.

※ 이번 해설지의 컨셉은 문제풀이에 최적화된 실전적인 해법들의 제시하는 것입니다. 쉬운 건 쉽게, 어려운 것도 빠르고 정확하게 푸는 것 말이죠!

04. [적분 가능성과 적분 함수를 찾는 것은 별개의 문제]

sol)

$$\therefore \left[e^{x^2}\right]_0^2 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

05. [등차수열과 일차함수의 유사성]

sol)

$a_1 = 6$이고, $a_9 = 22$이므로($\because$ 등차중항) 공차는 $d = \frac{a_9 - a_1}{9 - 1} = 2$가 되어 $a_5 = a_1 + 4d = 6 + 8 = 14$가 답입니다.

※ 등차수열 $\{a_n\}$에서 서로 다른 두 항 a_m과 a_n을 안다면, 그 공차 d는

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

를 만족합니다.

06. [행렬 성분 하나하나씩 다 안 구하더라도]

sol)

일차변환 f를 의미하는 이차정사각행렬을 A라 합시다. 그러면

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

에서 굳이 A^2을 구할 필요 없이

$$(1, 0) \overset{f}{\to} (0, 1) \overset{f}{\to} (-1, 7)$$

$$(2, 0) \overset{f}{\to} ? \overset{f}{\to} (-2, 14)$$

의 관계를 포착했다면 $a + b = -2 + 14 = 12$임을 금방 알 수 있습니다.

07. [다양한 삼각함수 공식들 중에서 가장 효과적인 것의 선택]

sol)

한 번씩 정의역으로 장난치는 문제들이 있는데, 여기서는 구간 끝값 0과 2π가 모두 포함되어 있습니다. 나중에 삼각방정식을 풀어서 나온 해들을 필터링할 때 반드시 이 사실을 고려해야 합니다.

좌변은 반각을 이용해서 변형하면 우변과 각의 크기가 x로 같아지기에

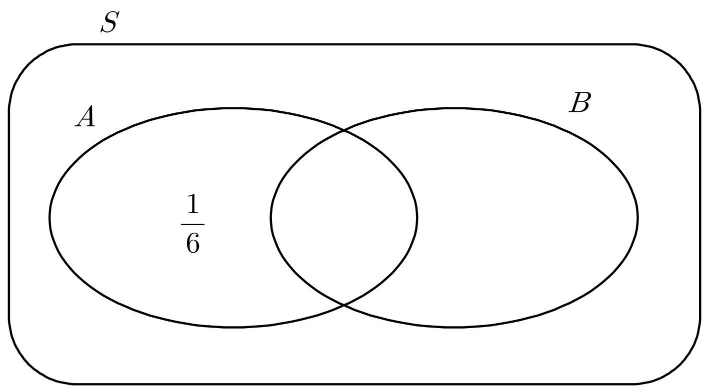
$$1 + \cos x = 3\cos x \to \cos x = \frac{1}{2}$$

에서 해당 구간에 속하는 값은 그래프든 단위원을 통해서든 일반해 공식을 이용해서든 구해보면 $\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}$으로서 모든 해의 합은 2π가 됩니다.

08. [어쩐 일로 독립 조건이 안 보이네?]

sol)

모든 교과서에서 공통적으로 말하는 수학적 확률의 정의에 의하면 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률은 $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$입니다. 따라서 수학적 확률을 계산할 때에, 특히 지금 타이밍에 벤 다이어그램을 그려서 집합적으로 접근하는 것이 타당한 풀이가 될 수 있습니다.



$$\therefore \mathrm{P}(A|B^c) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B^c)}{\mathrm{P}(B^c)} = \frac{1 - \mathrm{P}\left((A \cap B^c)^c\right)}{1 - \mathrm{P}(B)} = \frac{1 - \mathrm{P}(A^c \cup B)}{1 - \mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{1 - \frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{24}$$

09. [각 수치들의 의미]

sol)

표본비율 $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$에 대하여 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1}{25}$이므로 모비율은 근사적으로 $p \sim N\left(\frac{1}{5}, \left(\frac{1}{25}\right)^2\right)$이라 할 수 있습니다. 그리고 신뢰도 95%가 나오도록 한다는 말의 의미는

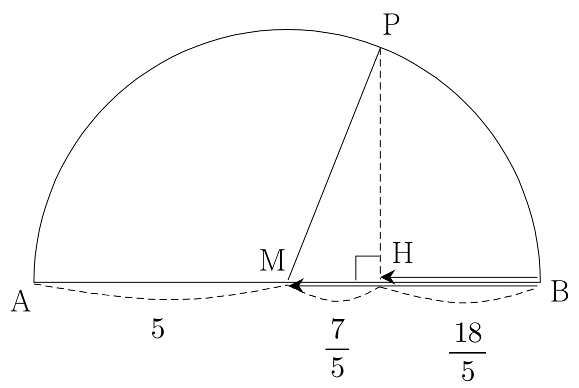
$$\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96) = 1 - 2(0.025) = 0.95 = 95\%$$

로서 1.96을 2라 두지 않고 그대로 사용하므로, 신뢰구간의 길이는 $2 \times 1.96 \times \frac{1}{25} = 0.1568$이 됩니다.

※ '어, 뭐지??' 하고 조금이라도 의심이 가는 부분이 있다면 곧바로 아무 교과서나 참고서, 인강 교재든 뭐든 좋으니 확인해보시길 바랍니다.

10. [내적의 기하학적 의미]

sol)



호 위의 점 P에서 선분 AB 위로 내린 수선의 발 H에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BM}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=18\rightarrow\overline{\mathrm{BH}}=\frac{18}{5}$$

이므로

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\left(5+\frac{7}{5}\right)\cdot 10=64$$

[2012년 09월 평가원 수리(가형) 29번]

29. 좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}|=2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_k}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi\ \ (k=1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

11. [사각세씨 마음에 드는 문제 스타일인가요?]

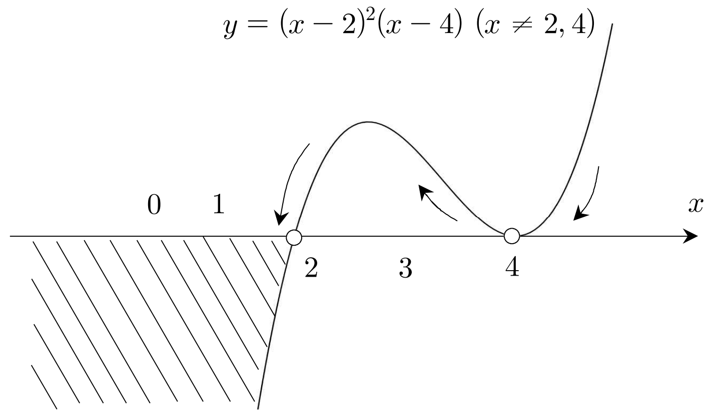
sol)

포물선의 관점에서 접선의 방정식은 $y=2x+\frac{2}{2}$이고, 쌍곡선의 관점에서 접선의 방정식은 $y=2x+\sqrt{4a-a}$입니다. 그리고 이 접선이 서로 일치하므로 $1=\sqrt{3a}$이므로 양수 a의 값은 $\frac{1}{3}$입니다.

12. [답은 이미 정해져 있으니 대답만 하면 돼]

sol)

복잡함이라곤 전혀 없는 분수부등식과 착한 보기들을 스윽 살펴보면, 조건을 만족하는 상황은 다음과 같아야 합니다.



즉, 분수부등식 $\frac{x-n}{(x-2)(x-4)}\leq 0$을 해집합의 손실이 없도록 동치변형하면 $(x-n)(x-2)(x-4)\leq 0\ (x\neq 2,4)$가 되는데, 해당범위에서 만족하는 자연수 x의 개수가 1이 되려면 $n=4$여야 합니다.

[2006년 06월 평가원 수리(가형) 22번]

22. x에 대한 분수부등식

$$\frac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)}\leq 0$$

을 만족시키는 정수 x가 100개가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]

13. [실전에서 그림 예쁘게 잘 그리면 쿠폰 주나요?]

sol)

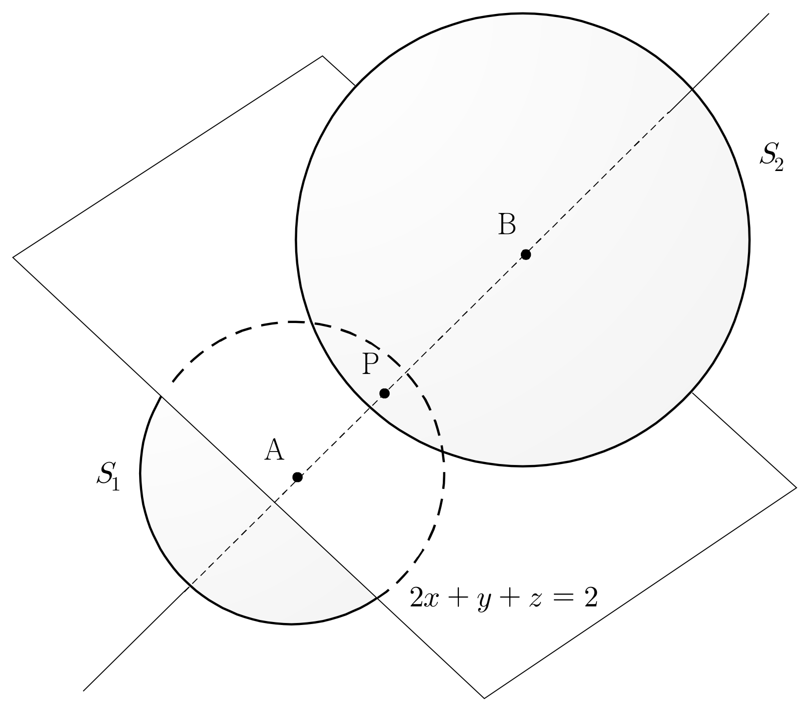
두 개의 구 S_1, S_2가 서로 외접하고 있는 상황에서 세 점 $\mathrm{A, P, B}$는 한 직선 상에 존재하며 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$라 하였으므로 점 P의 좌표는 $(1,1,-1)$입니다. 한편, 구 S_1과 한 점에서 만나는 평면, 즉 점 P를 지나는 구 S_1의 접평면의 방정식은, 법선벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,3,3)//(2,1,1)$이라 볼 수 있으므로

$2(x-1)+(y-1)+(z+1)=0$

이 됩니다. 그리고 이 평면이 점 $(0,0,a)$를 포함하므로 평면의 방정식에 대입하면

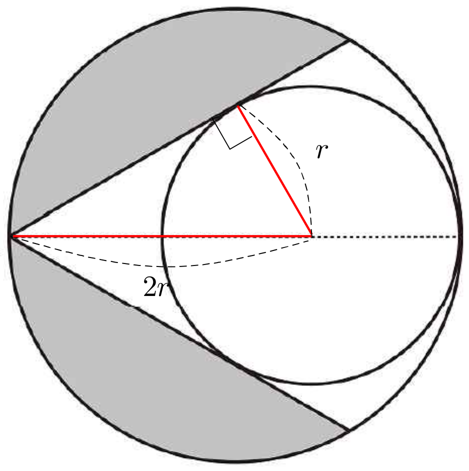
$-2-1+(a+1)=0\rightarrow a=2$

※ 설마 문제 풀 때 이런 그림 그렸던 분은 없겠죠? 이런 건 생각만 하고 넘어가도 충분합니다.



14. [보조선은 간결하게]

sol)



$2r+r=3 \to r=1$로서 닮음비는 $3:1$이고,

무한등비급수의 초항은 두 개의 활꼴 넓이 합으로 생각하면

$$S_1=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\times 2=\frac{9}{4}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{S_1}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{27(4\pi-3\sqrt{3})}{40}$

※ 그림 R_{n-1}에는 나타나지 않다가 그림 R_n에서 최초로 나타나는 활꼴의 넓이를 a_n이라 하면 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$으로 수열 $\{a_n\}$이 등비수열을 이루고, 수열 $\{S_n\}$은 등비수열의 합으로서 등비수열은 아닙니다.

$\because\ a_n=ar^{n-1}\to S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\to\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{r^{n+1}-1}{r^n-1}$

하지만 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$으로서 극한값은 곧 무한등비급수 형태가 됩니다. 이러한 관계를 완벽하게 이해하고서 수식을 사용해야, 여러분의 뒤통수를 치려는 문제를 만나도 재빠르게 대응할 수 있습니다.

15. [적분하려는 변수와 미분하려는 변수]

sol)

주어진 함수 $f(x)$를 x에 관하여 미분하고자 피적분함수의 t자리에 x^2을 넣은 값으로서 $f'(x)=(x-e^{x^2})(2x)$라 할 수 없습니다. 왜 그러한지 한 번 적분 과정을 살펴봅시다. 앞으로 다룰 이변수 함수는 교과외이긴 하지만 직관적인 수준에서 이해해도 충분합니다. 피적분함수에 해당하는 $F'(x,t)=x-e^t$은 x와 t에 관한 식인데, 이를 t에 대해서만 적분한 식 $F(x,t)$에다가 t자리에 x^2을 넣은 값 $F(x,x^2)$에서 t자리에 1을 넣은 값 $F(x,1)$을 뺀 값으로

$$f(x)=F(x,x^2)-F(x,1)$$

이라 할 수 있는데, 이를 다시 x에 대해 미분한다고 해서

$$f'(x)=F'(x,x^2)\cdot 2x-0$$

이라 할 수 없습니다. t에 대해 적분할 때 가만히 있던 x가, x에 대해 미분할 때는 고려의 대상이기 때문입니다. 이러한 경우에는, 최대한 적분하려는 변수 이외의 변수들은 인테그랄 기호 밖으로 빼내어서 적분하거나, 치환 등을 통해서 처리해야 합니다. 즉,

$$f(x)=x\int_1^{x^2}dt-\int_1^{x^2}e^t dt=x(x^2-1)-\int_1^{x^2}e^t dt$$

의 상태가 되고, 여기서 다시 x에 관해 미분해보면

$$f'(x)=3x^2-1-e^{x^2}\cdot 2x$$

가 되고, 점 $(1,f(1))$에서의 접선을 파악하고자 $f(1), f'(1)$의 값을 구해보면

$$f(1)=1(1-1)-\int_1^1 e^t dt=0$$

$$f'(1)=3-1-2e=2-2e$$

가 되어 접선의 방정식은 $g(x)=(2-2e)(x-1)$이 됩니다.

따라서, $g(2)=2-2e$가 답입니다.

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 21번]

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt=6\int_0^1 x^3(x-t)^2 dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, x축, y축으로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$라 할 때, a의 값을 구하시오. [4점]

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 28번]

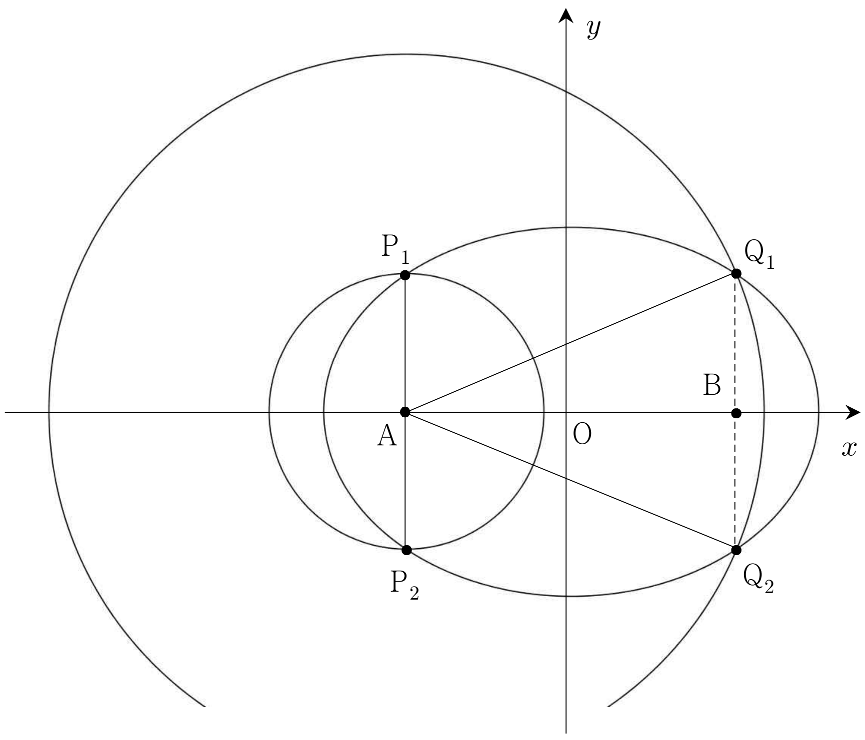
28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. [아무 이유도 없이 주어진 수치는 없다]
sol)
주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$입니다. 점 A를 중심으로 하고 반지름이 각각 $5, 13$인 동심원을 그려보면 다음과 같습니다.



$\overline{\mathrm{AP}}=5, \overline{\mathrm{AB}}=12$이고, 타원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{BP}}=18-\overline{\mathrm{AP}}=13$이므로 삼각형 ABP는 세 변의 길이가 각각 $5, 12, 13$인 직각삼각형이 됩니다. 이때 $\angle\mathrm{PAB}=90^\circ$가 됩니다.
한편, 같은 방식으로 삼각형 ABQ도 세 변의 길이가 각각 $5, 12, 13$인 직각삼각형임을 알 수 있습니다. 따라서 두 삼각형 ABP와 ABQ는 합동이면서 변 AB를 공유하고 있습니다.
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 취할 수 있는 값으로서 12 혹은 $\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$이 있고, 이들의 곱은 $24\sqrt{61}$이 답이 됩니다.

[2015년 09월 평가원 수학 영역(B형) 19번]

19. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 제1사분면에 있다.
(나) 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이다.

삼각형 PF′F의 넓이를 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$ ④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

17. [점화식 마스터 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/397382]
sol)
그리 어려운 상황이 아니니 간단하게 말하겠습니다.
$f(n)=2^n$이고, $g(n)=-\frac{n}{2}$이므로 $f(3)\times g(20)=2^3\times(-10)=-80$ 입니다.

[2014년 03월 교육청 수학 영역(B형) 29번]

29. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times {a_2}^2 \times {a_3}^3 \times \cdots \times {a_n}^n = 10^{n^2-n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $\log a_k$의 가수가 0.99일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

18. [다항함수와 결합한 통계 문제]

sol)

준 식을 표준화 해보면

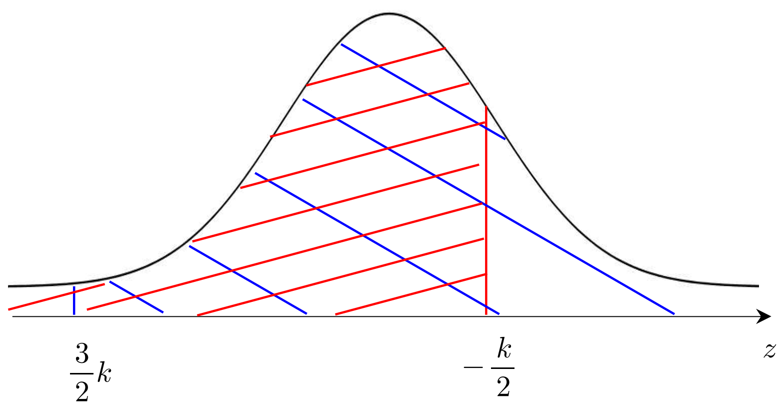
$$\mathrm{P}(X \geq t^2) + \mathrm{P}(Y \leq -t^2)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{t^2-2t}{\frac{2}{3}}\right) + \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{-t^2+2t}{2}\right)$$

가 됩니다. 여기서 $t^2-2t=k$로 치환하면 $k \geq -1$이고,

$$\mathrm{P}(X \geq t^2) + \mathrm{P}(Y \leq -t^2) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{3}{2}k\right) + \mathrm{P}\left(Z \leq -\frac{1}{2}k\right)$$

라 할 수 있습니다. 이 값이 최대가 되기 위해선 $k \geq 0$보다 $-1 \leq k < 0$의 경우임이 자명하고, $\because$ $k \geq 0$이면 $k=0$일 때 최댓값 1



$-1 \leq k < 0$일 때 $k=-1$이면 최대가 됩니다. 계산해보면

$$\mathrm{P}(X \geq t^2) + \mathrm{P}(Y \leq -t^2)$$

$$\leq \mathrm{P}(Z \geq -1.5) + \mathrm{P}(Z \leq 0.5)$$

$$= (0.5+0.4332) + (0.5+0.1915) = 1.6247$$

[2013년 09월 평가원 수학 영역(B형) 20번]

20. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\frac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$G(t) = \mathrm{P}\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$$

이다. 함수 $G(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915
④ 0.7257 ⑤ 0.7580

19. [항상 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 답이어야 할 이유는 없으니]

sol)

ㄱ. $2AB+2B=-A \;\rightarrow\; 2(A+E)B+A+E=E$

$\rightarrow\; (A+E)(2B+E)=E$

즉, $(A+E)^{-1}=2B+E$이므로 참.

ㄴ. $(A+E)(2B+E)=E=(2B+E)(A+E)$를 전개하여 정리하면 $AB=BA$만 남으므로 참.

ㄷ. $A^2B+BA=AB(A+E)=E$에서 $(A+E)^{-1}=AB$이고, 역행렬은 유일하게 존재하므로 $2B+E=(A+E)^{-1}=AB$입니다.

한편, $2AB+2B=-A \;\rightarrow\; AB=-\frac{1}{2}A-B$이므로 이를 등치하면

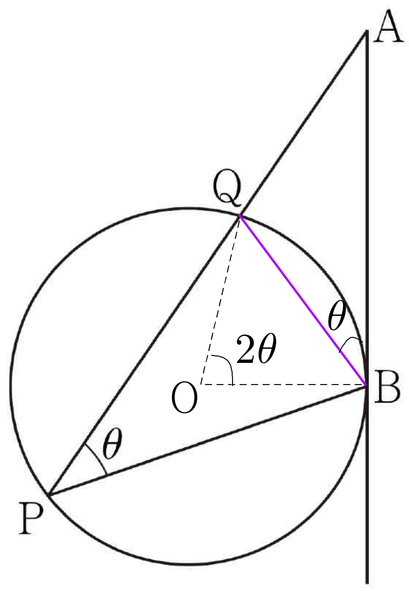
$2B+E=AB=-\frac{1}{2}A-B \;\rightarrow\; A+6B=-2E$가 되어 거짓.

따라서 답은 ③ ㄱ, ㄴ입니다.

20. [때로는 좌표풀이가 돌파구가 될 수도 있다]

sol.1)

보조선 $\overline{\mathrm{BQ}}$를 그어보면 두 삼각형 ABP와 APQ는 닮음이 됩니다.



왜냐하면 중학교 때 다룬 할선 정리에 의하여 혹은 AA 닮음 관계에 의해

$$\overline{\mathrm{AQ}} \cdot \overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AB}}^2 \;\rightarrow\; \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AQ}}$$

이 성립하기 때문입니다. 그리고 원의 중심 O에 대하여 원주각의 성질에 의해

$$\angle \mathrm{BPQ} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BOQ} \;\rightarrow\; \angle \mathrm{BOQ} = 2\theta$$

임을 알 수 있습니다. 이때 $\overline{\mathrm{BQ}} = 2\sin\theta$이고, 삼각형 ABQ에서 제이코사인 법칙을 사용하면

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = 4\sin^2\theta + 4 - 8\sin\theta\cos\theta = 2(1-\cos 2\theta) + 4 - 4\sin 2\theta$$

$$= 6 - 4\sin 2\theta - 2\cos 2\theta$$

이 되어 $\theta \rightarrow +0$일 때 $\overline{\mathrm{AQ}} \rightarrow 2$임을 알 수 있습니다. 이를 염두에 두고 부정형의 극한값을 미리 정리해보면

$$\frac{2-\overline{\mathrm{AQ}}}{\theta} = \frac{4-\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\theta(2+\overline{\mathrm{AQ}})} = \frac{4\sin 2\theta - 2(1-\cos 2\theta)}{\theta(2+\overline{\mathrm{AQ}})}$$

이므로 주어진 극한값은 $\frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{2+2} = 2$가 됩니다.

※ $\angle \mathrm{OPQ} \neq \frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}} \cdot \left(\overline{\mathrm{AQ}} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right) \neq 4$이니 주의해야 합니다.

sol.2)

원의 중심을 원점으로 삼아서 직교좌표를 잡아보면 $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(1,0)$이고, $\mathrm{Q}(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$입니다. 이때 두 점 사이의 거리를 곧바로 구해보면

$$\overline{\mathrm{AQ}} = \sqrt{(1-\cos 2\theta)^2 + (2-\sin 2\theta)^2}$$

로서 $\theta \to +0$일 때 $\overline{\mathrm{AQ}} \to 2$가 성립함을 알 수 있습니다. 그러면

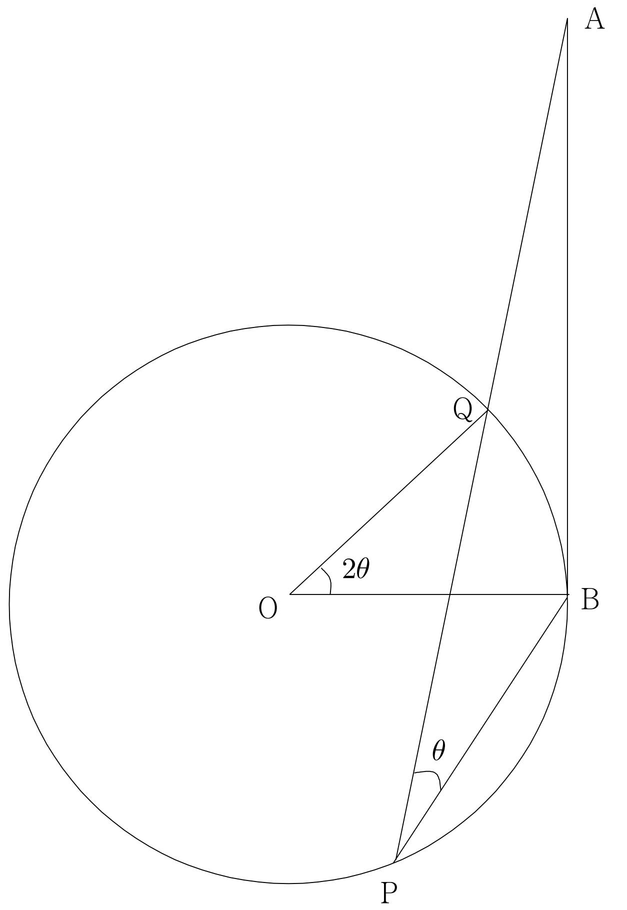
$$\frac{2-\overline{\mathrm{AQ}}}{\theta} = \frac{4-\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\theta(2+\overline{\mathrm{AQ}})} = \frac{4-(2-\sin 2\theta)^2-(1-\cos 2\theta)^2}{\theta(2+\overline{\mathrm{AQ}})}$$

$$= \frac{4\sin 2\theta - \sin^2 2\theta - (1-\cos 2\theta)^2}{\theta(2+\overline{\mathrm{AQ}})}$$

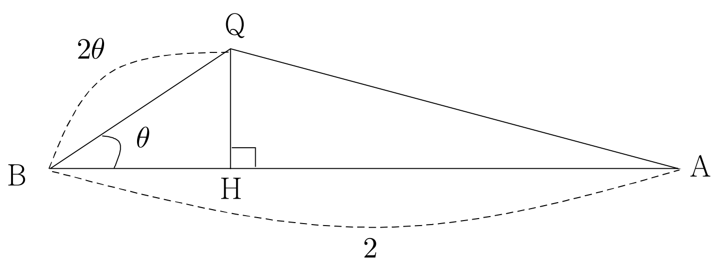
이므로 주어진 극한값은 $\dfrac{4 \cdot 2 - 0 - 0}{2+2} = 2$가 됩니다.

sol.3)

근사해서 풀려면, 역동적으로 그림을 변형해가며 따져야 하기 때문에 제법 까다롭습니다. 한번 $\theta \to +0$인 상황에 근접하게 그려봅시다. 이때 원의 중심을 O라 하면 원주각의 성질에 의해 $\angle \mathrm{BOQ} = 2\theta$가 됩니다.



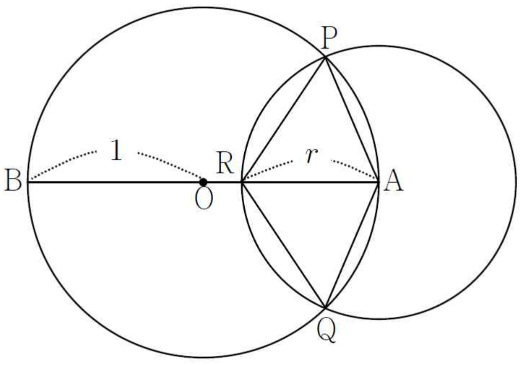
그러면 $\overline{\mathrm{BQ}} \simeq \widehat{\mathrm{BQ}} = 2\theta$라 근사할 수 있고, $\angle \mathrm{OBQ} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$라 할 수 있습니다. 그러면 $\angle \mathrm{ABQ} = \theta$입니다. 여기서 삼각형 ABQ만 따로 떼어내서 관찰해봅시다. 또, 점 Q에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하겠습니다.



그러면 $\theta \to +0$의 상황에서 $2-\overline{\mathrm{AQ}} \simeq 2-\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{BH}} \simeq 2\theta$가 되므로 답은 ② 2가 됩니다. 극한 상황의 그림을 굳이 그려려 한다면, 삼각형 ABQ에서 두 변 AQ와 BQ가 모두 변 AB에 평행해져 가는 상황으로 생각할 수 있습니다.

[2006년 04월 교육청 수리(가형) 16번]

16. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 $\mathrm{S}(r)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{r \to 2-0} \frac{\mathrm{S}(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은? (단, $0 < r < 2$) [4점]



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

21. [현재까지 ① ~ ⑤번 답 개수는 4 / 4 / 4 / 4 / 4]

sol.1)

(나) 조건에 등장한 함수는 사차함수 $f(x)$에서부터 비롯되었습니다. 즉, 21번 난이도에 걸맞는 함수를 구성하기 위해서 출제자는 $y = x^{2-n}f(x)$라는 다항함수일지도 모르는 어떠한 함수를 x축 아랫부분을 접어 올린 후에 $x=0$에서 구멍을 뚫고, 점 $(0,1)$을 다시 추가한 함수를 만든 것이죠. 이러한 생소한 함수들이 나왔을 때 접근하는 방법 중에 하나로, 지금처럼 어떤 함수로부터 출발하였는지를 생각해볼 수 있습니다.

$y = x^{2-n}f(x)$의 차수(degree)를 논하고 싶지만 차수는 다항함수에만 정의되는 개념이므로, 다른 쪽으로 접근을 해봅시다. 즉, (나) 조건에 등장한 함수가 실수 전체에서 미분가능함을 이용하는 것입니다. 그러면 미분가능성은 연속성을 함의하기 때문에

$$\lim_{x \to 0} |x^{2-n}f(x)| = 1 \ \to \ \lim_{x \to 0} x^{2-n}f(x) = \pm 1$$

이 되어야 합니다. 다음으로 자연숫값 $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$을 차례로 대입하며 따져봅시다.

(i) $n=1$이면 x^{2-n}은 0으로 가는 형태이고, $f(x)$는 다항함수로서 $f(0)$으로 가는 값이므로, $x^{2-n}f(x) \to 0 \cdot f(0) = 0$이 되어 모순입니다.

(ii) $n=2$이면 x^{2-n}은 1로 상수값을 취하고, $f(x)$는 다항함수로서 $f(0)$으로 가는 값이므로, $x^{2-n}f(x) \to 1 \cdot f(0) = f(0)$의 꼴이 되어 $f(0) = \pm 1$이면 됩니다. 연속 조건을 통과(?!) 하였으니 미분가능성 조건을 따져봅시다. $x^{2-n}f(x) = f(x)$는 사차함수인데 두 점 $(0, \pm 1), (1, 0)$을 지나는 개형입니다. 이때 x축 아랫부분을 접어올려도 여전히 미분가능하려면 x축과의 교점인 점 $(1,0)$에서는 적어도 이중근을 가짐으로서 미분계수가 0이 되어야 하고, 그 밖에 x축과 교점이 발생하는 지점에서도 미분계수가 0이면 됩니다. 따라서

$f(x)=(x-1)^2(ax^2+bx+c)$

라 할 수 있고, $f(0)=\pm 1$이면 되므로 $c=\pm 1$이라 할 수 있습니다. 즉,

$f(x)=(x-1)^2(ax^2+bx\pm 1)$

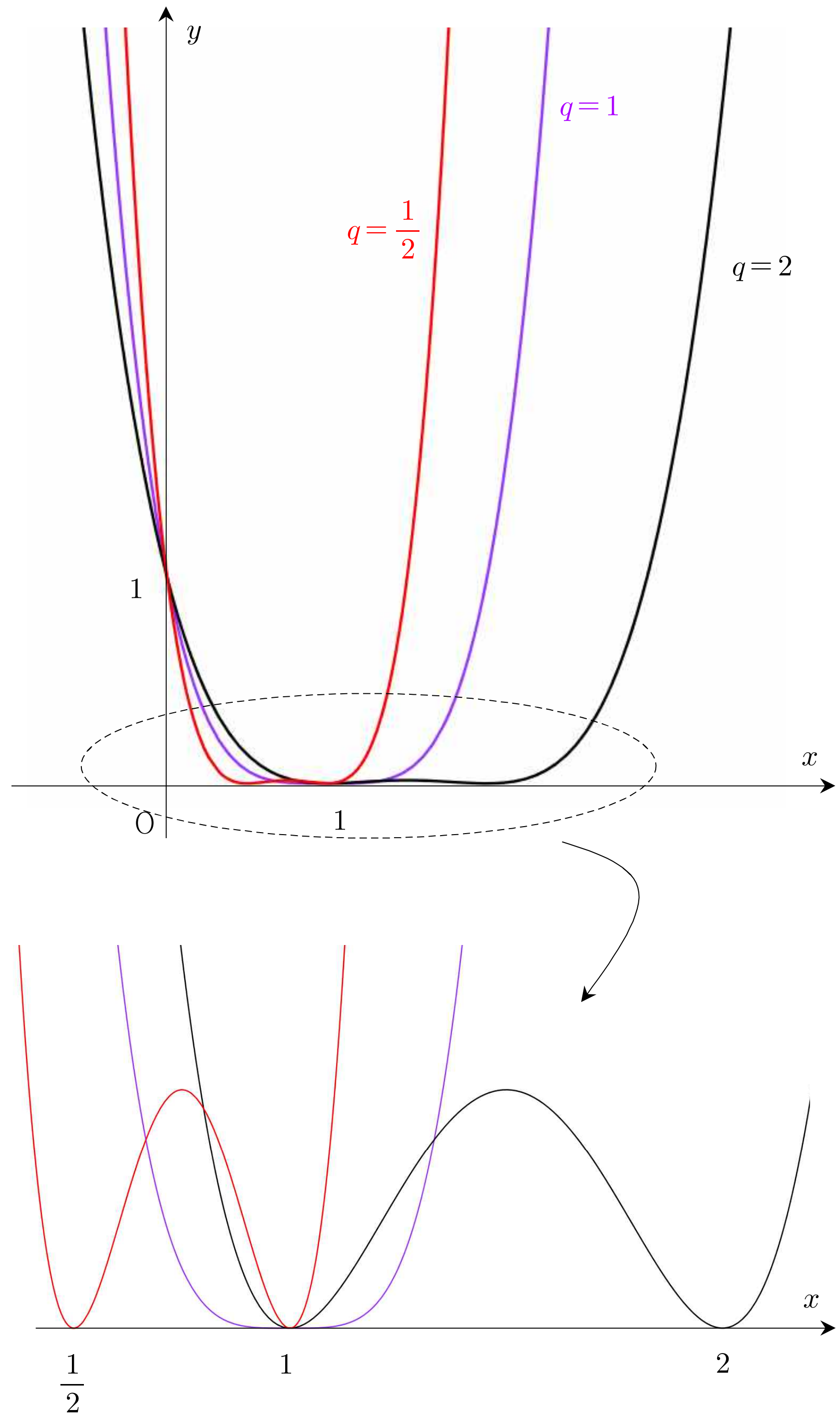
이때 $x=1$이외의 근을 갖는지 확인하기 위해서 이중근 이외의 다항식 부분인 $ax^2+bx\pm 1$도 완전제곱식의 형태를 띄어야 합니다. 다시 말해

$ax^2+bx\pm 1=\pm p(x-q)^2\ (pq^2=\pm 1)$

의 조건을 만족하기만 하면

$x^{2-n}f(x)=f(x)=\pm p(x-1)^2(x-q)^2=\pm\dfrac{1}{q^2}(x-1)^2(x-q)^2$

는 x축과 항상 중근을 갖고 접어 올려서 만든 $|x^{2-2}f(x)|$ 개형도 여전히 미분가능하며 (가) 조건도 만족합니다. 따라서 $n=2$가 가능합니다.



(iii) $n=3$이면 x^{2-n}은 $\dfrac{1}{x}$로 발산하는 형태이고, $f(x)$는 다항함수로서 $f(0)$으로 가는 값이므로, $x^{2-n}f(x)\to\dfrac{1}{x}f(0)$의 꼴이 되어

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2\pm x\ (a\neq 0)$

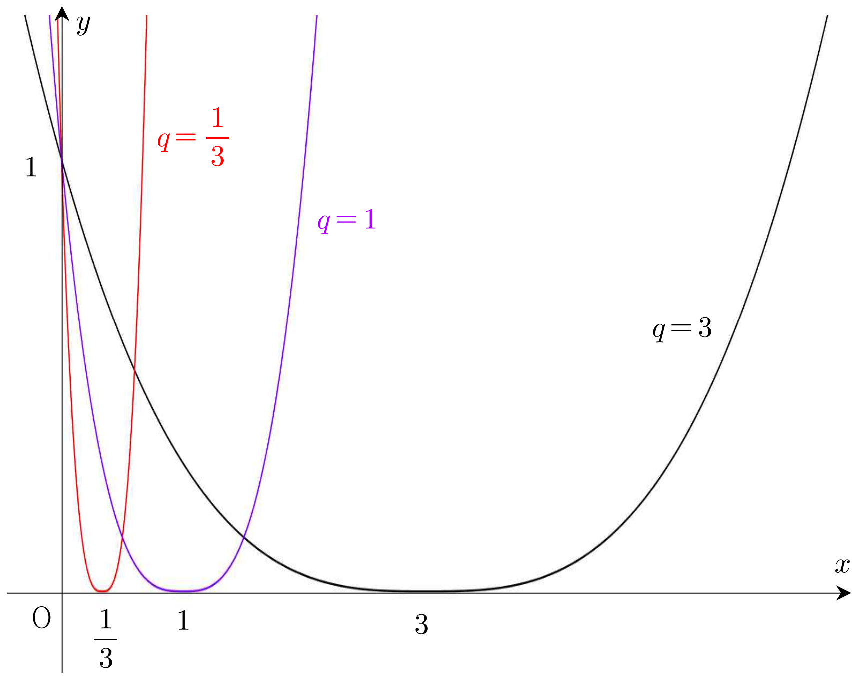
여야만 합니다. 그러면

$x^{2-n}f(x)=ax^3+bx^2+cx\pm 1$

의 x축 아랫부분을 접어올려도 여전히 미분가능하기 위해, x축과 교점을 가질 때마다 적어도 이중근을 가져야 합니다. 하지만, $x^{2-n}f(x)$가 최대 이중근만을 갖는다면 나머지 한 근은 단일근이 되어 (나) 조건을 만족하지 못합니다. 예를 들어 $x^{2-n}f(x)=x(x-2)^2$이라고 하면 이중근을 갖는 $x=2$에서는 $|x^{2-n}f(x)|$가 미분가능하지만 단일근 $x=0$에서는 $|x^{2-n}f(x)|$가 미분불가능하게 됩니다. 따라서, $x^{2-n}f(x)$는 다음과 같이 삼중근을 가져야 합니다.

$x^{2-n}f(x)=\pm p(x-q)^3\ (pq^3=\pm 1)$

따라서 $n=3$도 가능합니다.



(iv) $n=4$이면 x^{2-n}은 $\dfrac{1}{x^2}$로 발산하는 형태이고, $f(x)$는 다항함수로서 $f(0)$으로 가는 값이므로, $x^{2-n}f(x)\to\dfrac{1}{x^2}f(0)$의 꼴이 되어

$f(x)=ax^4+bx^3\pm x^2\ (a\neq 0)$

여야만 합니다. 그러면

$x^{2-n}f(x)=ax^2+bx\pm 1$

의 x축 아랫부분을 접어 올려도 여전히 미분가능하기 위해, (ii)에서와 유사하게 중근을 가져야만 합니다.

$x^{2-n}f(x)=\pm p(x-q)^2\ (pq^2=\pm 1)$

따라서 $n=4$여도 가능합니다.

(v) $n\geq 5$이면 조건을 만족하지 않게 됩니다. 왜냐하면 $n=5$라 하더라도 x^{2-n}은 $\dfrac{1}{x^3}$로 발산하는 형태이고, $f(x)$는 다항함수로서 $f(0)$으로 가는 값이므로, $x^{2-n}f(x)\to\dfrac{1}{x^3}f(0)$의 꼴이 되어

$f(x)=ax^4\pm x^3\ (a\neq 0)$

이어야 하나, $x^{2-n}f(x)=ax\pm 1$은 x축 아랫부분을 접어 올렸을 때 $x=\pm\dfrac{1}{a}$에서 미분불가능하기 때문에 (나) 조건에 어긋나기 때문입니다.

$n=6$이면 $f(x)=\pm x^4$여야 하지만 (가) 조건에 위배되고,

$n=7,8,9,\cdots$ 에서는 $x^{2-n}f(x)$가 연속 조건도 만족하지 못합니다.

고로, 모든 경우를 종합해보면 가능한 n값들의 합은

$2+3+4=9$

***sol*.2)**

사실, ***sol*.1)**처럼 구체적으로 따질 필요도 없이, 조건을 만족하는 $f(x)$가 존재하도록 하는 n값을 체크해주기 위해서 각각의 n마다 함수 $f(x)$를 잡아주고 끝내도 됩니다. 다만, 이전의 풀이에 비해서 말도 안 되게 시간을 단축할 수 있겠지만 그만큼 사고가 정확해야 하고 노련해야 합니다.

문제에서 요구하는 바는 곧, $x^{2-n}f(x)$를 x축 아랫부분을 접어 올리고,

$x=0$일 때의 함숫값을 제거한 다음, 점 $(0,1)$을 추가한 함수가 여전히 미분가능해야 한다는 것입니다.

$n=1$이면.. (나) 조건 불만족

$n=2$이면.. $f(x)=(x-1)^4$

$n=3$이면.. $f(x)=x(x-1)^3$

$n=4$이면.. $f(x)=x^2(x-1)^2$

$n=5,6,7,8,\cdots$ 이면.. (가), (나) 조건 불만족

고로, $n=2,3,4$이므로 답은 ⑤ 9라고 생각할 수 있습니다.

[2010년 06월 평가원 수리(가형) 12번]

12. 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [이 페이지에서 22, 23번 먼저 풀고 21번 푸는 사람 있나요?]

sol)

실수 k에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$이므로 주어진 극한값은 5입니다.

23. [무연근]

sol)

준 식의 양변을 각각 완전제곱 하여 정리해보면

$4x+13=x^2-4x+4 \to x^2-8x-9=(x-9)(x+1)=0$

그런데 $x=-1$은 무연근이므로 해는 $x=9$입니다.

24. [이항정리에서의 일반항 공식]

sol)

$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r x^{2r}\cdot2^{5-r}$에서 계수가 짝수인 항은 최고차항을 제외한 항들입니다. 따라서 전체 계수 합에 최고차항의 계수를 빼주면

$\therefore\ (1+2)^5-1=242$

25. [독해 문제]

sol)

$$\begin{cases}\log_a(20-L_1)=1 \ \to\ 20-L_1=a\\ \log_a(20-L_2)=2 \ \to\ 20-L_2=a^2\end{cases}$$

$\therefore\ L_1-L_2=a^2-a=2 \ \to\ a=2$

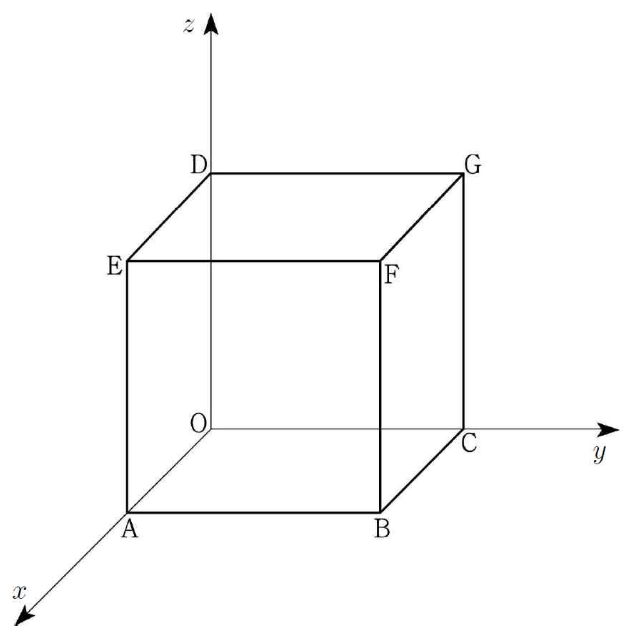
$\therefore\ \log_2(20-L)=3 \ \to\ L=12$

26. [리듬농구님은 아무리 97 수능 문제를 참고했다 하지만]

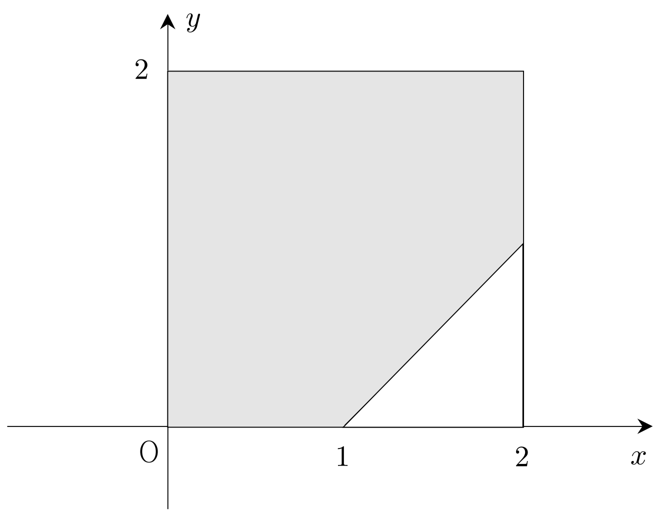
sol)

[2012년 10월 교육청 수리(가형) 30번]

30. 그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 OABC$-$DEFG에서 A(4, 0, 0), C(0, 4, 0), D(0, 0, 4)이다. 이 정육면체가 평면 $x+y+2z=6$에 의하여 잘린 단면의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



그림에서 색칠한 단면을 xy평면으로 정사영 내리면 아래와 같은 오각형 영역이 됩니다.



정사영 된 넓이는 $S'=4-\frac{1}{2}\cdot1=\frac{7}{2}$이고, 평면 $2x-2y+3z=2$이 xy평면과 이루는 이면각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{4+4+9}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$

이므로 $S'=S\cos\theta \to S=\frac{7}{6}\sqrt{17}$ 로 $p+q=13$이 답이 됩니다.

27. [여사건 써주세요~ 현기증 난단 말이에요]

sol)

(가) 조건만을 만족하는 자연수의 순서쌍은 일단

$(a-1)+(b-1)+(c-1)+(d-1)=6$

으로 고쳐서 생각해보면 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$임을 알 수 있습니다.

(나) 조건의 행렬에서 판별식을 정리해보면

$(a-c)(b+d-2)\neq 0$

으로 정리 되는데, 여기서 여사건을 이용해서 푸는 것이 훨씬 빠릅니다.

즉, 전체 84개의 자연수 순서쌍 중에서 $(a-c)(b+d-2)=0$을 만족하는 것들을 빼주면 됩니다.

(i) $a-c=0$, 즉 $a=c$인 것들로

$$\begin{cases} a=c=1\text{이면 } b+d=8 \ \rightarrow\ 7\text{개} \\ a=c=2\text{이면 } b+d=6 \ \rightarrow\ 5\text{개} \\ a=c=3\text{이면 } b+d=4 \ \rightarrow\ 3\text{개} \\ a=c=4\text{이면 } b+d=2 \ \rightarrow\ 1\text{개} \end{cases}$$

(ii) $b+d-2=0$, 즉 $b+d=2$인 것들로

$a+c=8 \ \rightarrow\ 7$개

그런데 (i)이면서 동시에 (ii)인 것들로 중복해서 카운팅 된 것은 $a=c=4$이면서 $b+d=2$인 순서쌍 $(a,b,c,d)=(4,1,4,1)$ 하나가 있으므로 구하고자 하는 경우의 수는

$\therefore\ 84-\{(7+5+3+1)+7-1\}=62$

28. [갓듬농구는 착했다]

sol)

(가) 조건에서 $2\le \log x<4$이므로 $f(x)$는 2 아니면 3의 값을 갖습니다. 그리고 (나) 조건에서 $3f(x)$는 원래 정수 $f(x)$의 배수이므로 $7g(x)$ 부분만 마저 $f(x)$의 배수이기만 하면 됩니다.

(i) $f(x)=2$

$$6+7g(x)=6,8,10,12 \ \rightarrow\ g(x)=0,\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7}$$

(ii) $f(x)=3$

$$9+7g(x)=9,12,15 \ \rightarrow\ g(x)=0,\frac{3}{7},\frac{6}{7}$$

고로, 주어진 조건을 만족하는 $\log x$의 값들로

$$\log x=2,2+\frac{2}{7},2+\frac{4}{7},2+\frac{6}{7},3,3+\frac{3}{7},3+\frac{6}{7}$$

이 가능하므로

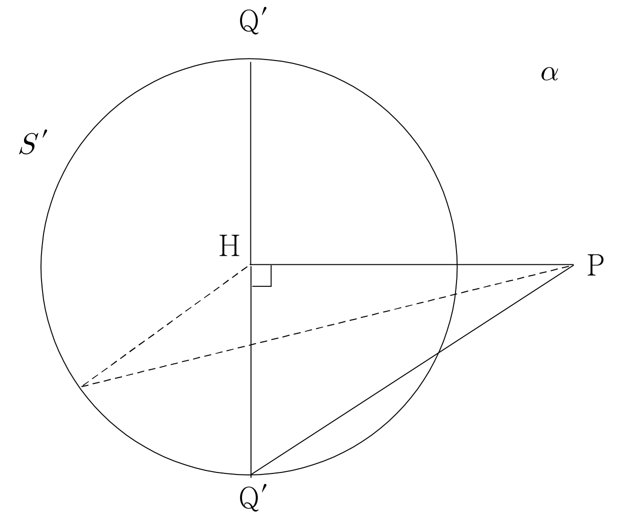
$$\begin{aligned}\therefore\ \log k&=\left\{2+\left(2+\frac{2}{7}\right)+\left(2+\frac{4}{7}\right)+\left(2+\frac{6}{7}\right)\right\}\\&\qquad+\left\{3+\left(3+\frac{3}{7}\right)+\left(3+\frac{6}{7}\right)\right\}\\&=8+9+\frac{12+9}{7}=20\end{aligned}$$

29. [출제자의 호이가 계속되면 둘리로 볼텐데]

sol)

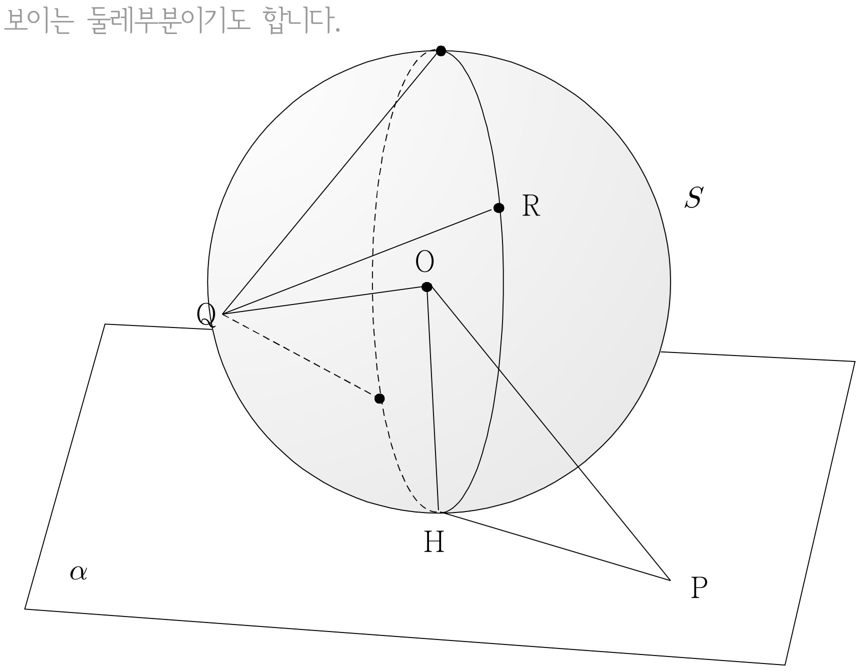
계산해보면 구 S는 평면 α에 접하며, 접점을 H라 하겠습니다. 그러면 삼각형 POH는 길이가 $3,4,5$인 직각삼각형이 됩니다.

다음으로 점 Q의 위치를 잡아주어야 하는데, 삼각형 POQ를 평면 α에 정사영하면 다음과 같은 상황이 됩니다.



구 S를 평면 α 위로 정사영하면 반지름의 길이가 같은 원 S'이 되고, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HQ'}}$이 되는 위치에 점 $\mathrm{Q'}$이 존재하면 됩니다.

다음으로 점 R의 위치를 결정해주어야 하는데, 반지름의 길이가 3인 구 위에 고정된 점 Q에서 이르는 거리가 $3\sqrt{2}$인 또 다른 구 위의 점 R의 자취는, 점 P 근처에서 바라보면 다음과 같습니다. 그림에 주어진 구 S의 눈에 바로 보이는 둘레부분이기도 합니다.

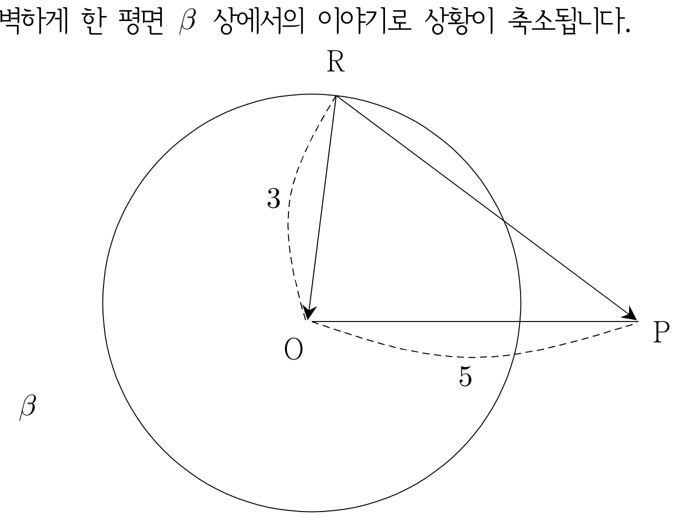


삼각형 ROQ는 항상 세 변의 길이가 $3,3,3\sqrt{2}$이고 변 QR을 빗변으로 갖는 직각삼각형이어야 합니다. 즉, 점 R의 자취는 구 S의 중심 O를 지나고 평면 α에 수직인 평면상에 존재하는 교원이 됩니다. 편의상 점 R의 자취인 교원이 존재하는 평면을 β라 하겠습니다.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$에서 두 점 P,R은 평면 β상에 존재하는 것이 자명하므로, 점 Q를 마저 평면 β로 정사영 내리면 점 O가 됩니다. 따라서,

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{RO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RO}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RO}}$$

로서 완벽하게 한 평면 β 상에서의 이야기로 상황이 축소됩니다.



직관적으로 점 R이 반직선 PO의 연장선과 구 S의 교점 위치가 되어야 함이 자명합니다. 여러분들은 비슷한 문제들을 그동안 충분히 학습해왔을 테니까요! 그래도 논리적으로 수식을 통해서 출제자가 아빠 미소 짓도록 풀어보자면 다음과 같이 회전하는 점 R의 중심 O로 분해해서 생각하면 됩니다.

즉, $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO}$의 최댓값을 구하기 위해서 변형해보면

$$\therefore\ \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO}=(\overrightarrow{RO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{RO}=|\overrightarrow{RO}|^2+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RO}$$
$$\le|\overrightarrow{RO}|^2+|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{RO}|=9+15=24$$

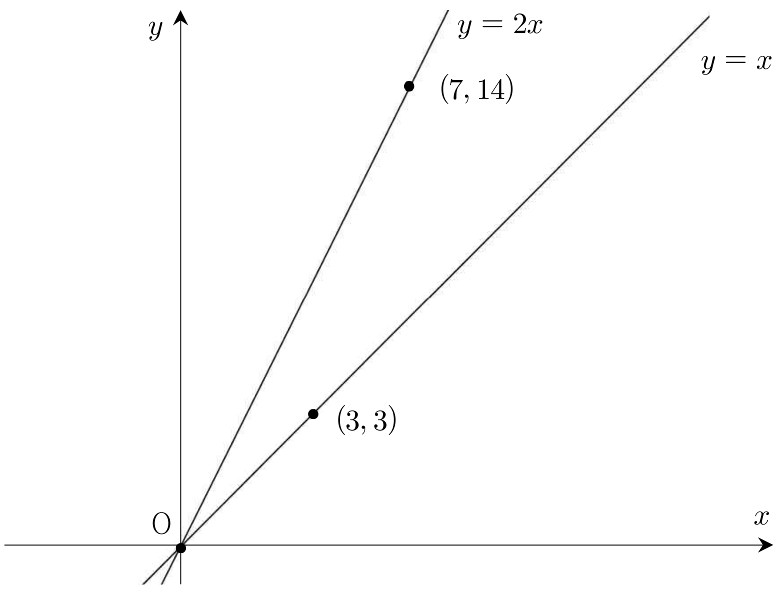
[2015년 10월 교육청 수학 영역(B형) 30번]

30. 좌표공간에서 구 $S:x^2+y^2+(z-3)^2=4$와 평면 $x-y+z-6=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 점 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3)$과 원 C 위를 움직이는 점 B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$의 내적 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

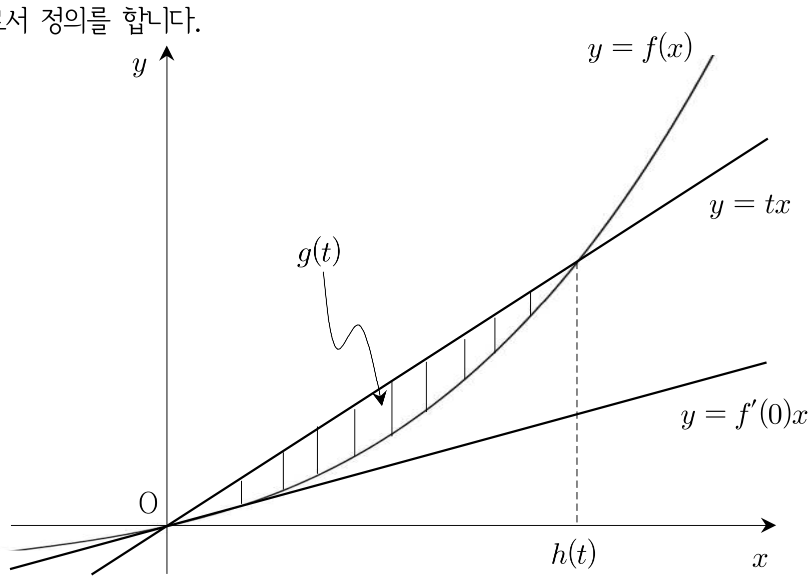
30. [x축 상에 존재하는 적분 구간 함수]

sol)

(가) 조건을 보고서 좌표평면 상에 $y=x, y=2x$를 그리고 언급된 세 점을 찍어보겠습니다.



(나) 조건에서 말하는 것은 아래로 볼록한 함수라는 것입니다. 즉, 도함수의 관점에서는 $f'(x)$가 증가함수라는 것이므로, 기울기가 계속 증가만 해야 합니다. 이때 $g(t)$를 정의하는 방식이 독특한데, 기존 적분들이 좌표축 방향으로 성분을 더해가는 방식이었던 것과 달리 여기서는 원점을 지나는 직선이 쓸고 간 영역으로서 정의를 합니다.



두 함수 $y=f(x)$와 $y=tx$의 교점의 좌표는, 굳이 수식으로 나타내자면

$$f(x)=tx\ \rightarrow\ \frac{f(x)}{x}=p(x)=t\ \rightarrow\ x=p^{-1}(t)$$

라는 t에 대한 함수가 되는데, 간단하게 $h(t)$라 하겠습니다. 그러면

$$g(t)=\int_0^{h(t)}\{tx-f(x)\}dx$$

라 할 수 있습니다. 여기서 미적분학의 기본정리를 잘 써야 하는데,

$$g'(t)=\{t\cdot h(t)-f(h(t))\}h'(t)$$

라고 잘못 계산하면 풀이가 안드로메다로로 갈 수 있습니다. 경험입니다;;

그러니 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 상정해서

$$g(t)=\left[t\cdot\frac{x^2}{2}-F(x)\right]_0^{h(t)}=\frac{t}{2}\{h(t)\}^2-F(h(t))+F(0)$$

이라 한 다음

$$g'(t)=\frac{1}{2}\{h(t)\}^2+t\cdot h(t)\cdot h'(t)-f(h(t))\cdot h'(t)$$

라고 안전하게 구하거나, 사실 $t\cdot h(t)=f(h(t))$이니 바로 소거해도 됩니다.

$$g(t)=t\int_0^{h(t)}xdx-\int_0^{h(t)}f(x)dx$$

로 적분하지 않는 변수 t를 최대한 인테그랄 기호 밖으로 끄집어 낸 다음

$$g'(t)=\int_0^{h(t)}xdx+t\cdot h(t)\cdot h'(t)-f(h(t))\cdot h'(t)$$
$$=\frac{1}{2}\{h(t)\}^2+t\cdot h(t)\cdot h'(t)-f(h(t))\cdot h'(t)$$

라 정리하면 충분합니다.

그리고 구해야 하는 적분 식을 도표적분을 쓰든, u, v를 잡든 상관없으니 변형해봅시다.

$$\int_1^2 tg''(t)dt=[tg'(t)-g(t)]_1^2$$

한편,

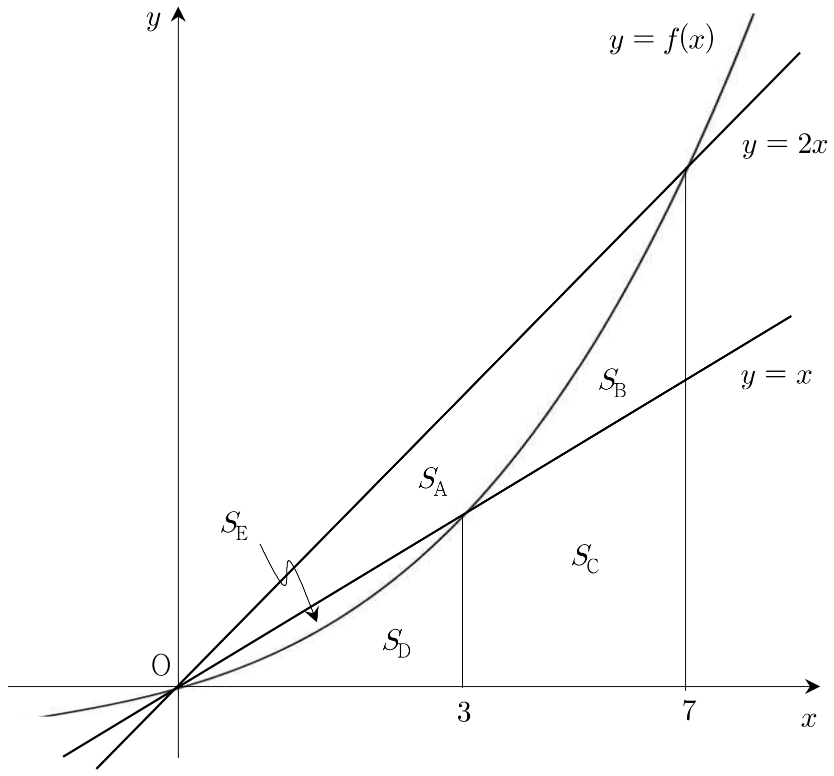
$$\begin{cases} g'(1)=\dfrac{1}{2}\{h(1)\}^2+h(1)h'(1)-f(h(1))h'(1) \\ \qquad=\dfrac{9}{2}+3h'(1)-3h'(1)=\dfrac{9}{2} \\ g'(2)=\dfrac{1}{2}\{h(2)\}^2+2h(2)h'(2)-f(h(2))h'(2) \\ \qquad=\dfrac{49}{2}+14h'(2)-14h'(2)=\dfrac{49}{2}\end{cases}$$

임을 이용하면

$$\int_1^2 tg''(t)dt=[tg'(t)-g(t)]_1^2=2g'(2)-g'(1)-g(2)+g(1)$$
$$=49-\frac{9}{2}-g(2)+g(1)=\frac{89}{2}-\{g(2)-g(1)\}$$

로 정리됩니다.

마지막으로 $g(2)-g(1)$ 부분을 계산하기 위해서 기하학적 의미를 파악해보면, $f(x)$와 $y=x$와 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 됩니다. 마치 정적분에서 $\int_a^b dx-\int_a^c dx=\int_c^b dx$가 되는 것과 동일한 논리입니다. 이제 (가) 조건에서 $\int_3^7 f(x)dx=32$라 한 것을 마저 사용해야 합니다. 불필요하게 제시된 정보는 없으니까요! 이를 종합해서 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.



해당 영역들을 S_A, S_B, S_C, S_D, S_E라 하면

$$\begin{cases} S_A+(S_B+S_C)+(S_D+S_E)=49 \\ S_A=g(2)-g(1) \\ S_B+S_C=\int_3^7 f(x)dx=32 \\ S_D+S_E=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

이므로 $S_A=49-32-\dfrac{9}{2}=\dfrac{25}{2}$임을 알 수 있습니다. 고로,

$$\therefore \int_1^2 tg''(t)dt=\frac{89}{2}-\{g(2)-g(1)\}=\frac{89-25}{2}=32$$

[2011년 11월 대수능 수리(가형) 28번]

28. 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오. [4점]

[2015년 10월 교육청 수학 영역(B형) 21번]

21. 함수 $f(x)=\sin\pi x$와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2014학년도 수능 대비 자유전자 모의평가 문제지 30번]

30. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하고, 미분 가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$가 등식

$$\int_1^5 f(f(x))dx=0$$

을 만족 시킬 때, $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 부등식

$$\int_0^n f(x)g'(x)dx \le 0 \qquad (f'(1)\neq 0)$$

을 만족시키는 자연수 n들의 합을 구하시오. [4점]