[2016학년도 리듬농구 직전 모의평가 수학 영역(A형) 30번]

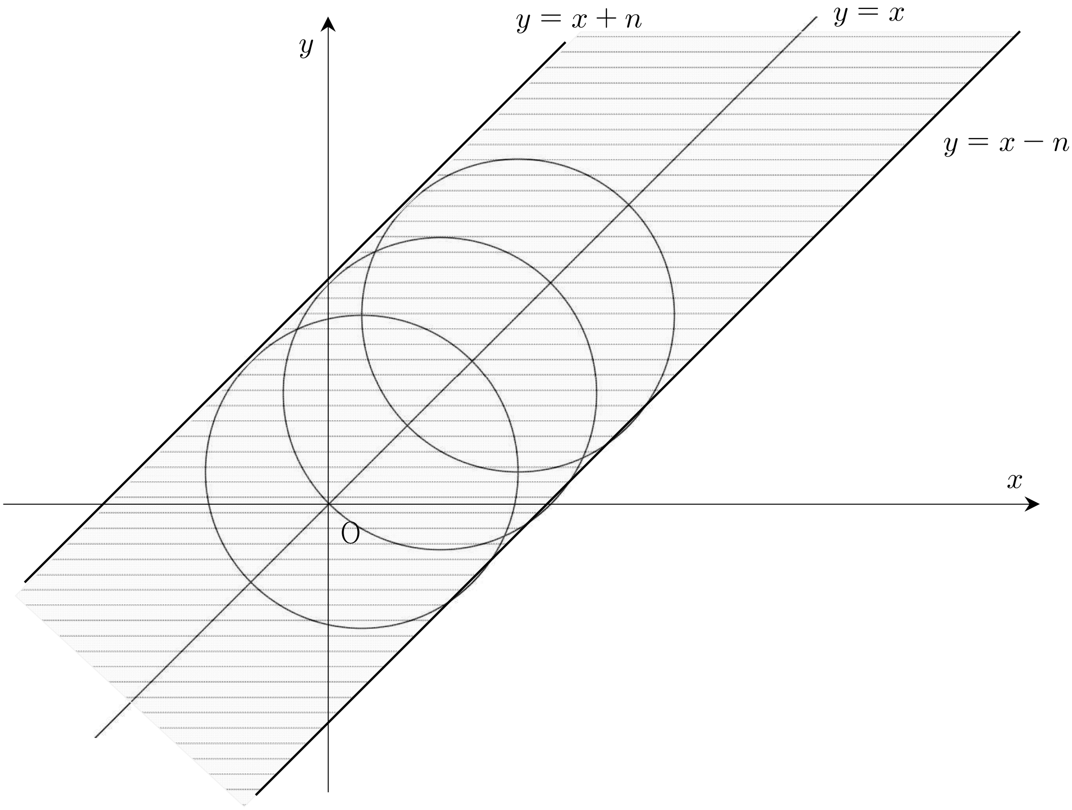
30. 자연수 n과 두 영역 S, T에 대하여 영역 $S\cap T$에 속한 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(22)-f(21)$의 값을 구하시오. [4점]

$$S=\{(x,\ y)\mid y\geq 2^{x+3}-8\}$$
$$T=\{(x,\ y)\mid 2(x-t)^2+2(y-t)^2\leq n^2,\ t\text{는 실수이다.}\}$$

sol)
집합 T를 먼저 봅시다.

$$2(x-t)^2+2(y-t)^2=n^2$$

가 의미하는 것은 중심이 (t,t)이고 반지름이 $\dfrac{n}{\sqrt{2}}$인 원과 그 내부 영역을 의미합니다.
그런데 t가 임의의 실수이므로, 원들의 자취로 생각할 수 있고, 결국 이러한 원들이 쓸고 지나간 자취는 $y=x+n$과 $y=x-n$ 사이의 영역이 됩니다.



원 $2(x-t)^2+2(y-t)^2=n^2$에 접하는 접선의 방정식을 찾기 위해,
점 (t,t)를 처음부터 원점으로 보고서 기울기가 1인 직선의 방정식을 세워서 구해도 되고,
아니면 점 (t,t)에 이르는 거리가 $\dfrac{n}{\sqrt{2}}$이고 기울기가 1인 직선의 방정식을 구해 봐도

$$x-y+k=0 \rightarrow \frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{|t-t+k|}{\sqrt{1+1}} \rightarrow k=\pm n$$

이므로 $y=x\pm n$이 집합 T가 의미하는 영역의 경계가 됨을 알 수 있습니다.
그런데 여기서 왜 하필 경계가 되는 직선의 기울기가 1이냐고 질문하는 똑똑한 학생이 있을 수 있습니다! 혹자에겐 누가 봐도 빼도 박도 못하게 기울기가 1이어야 하는 것 같지만요. 그러면 처음부터 직선의 방정식을

$$y=px+q \rightarrow px-y+q=0 \quad (\text{단, } p,q\text{는 실수})$$

라 두고서, 임의의 실수 t에 대하여 점 (t,t)에 이르는 거리가 같다고 식을 세워보면

직선 $y=x$ 위를 움직이는 원들의 중심에서 이르는 거리가

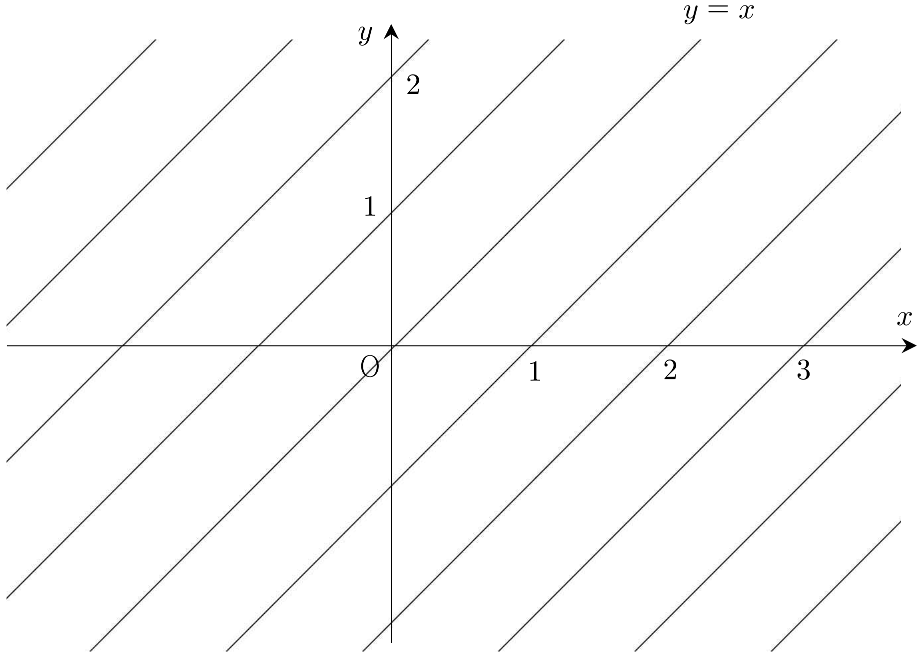
$$\frac{|(p-1)t+q|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

로서 t값에 상관없이 항상 일정한 값을 가져야 합니다. 그러려면 분자 부분의 t에 곱해진 $p-1$ 부분이 0이 되어야 하므로 $p=1$이 되는 것이죠!

이때 $n=1,2,3,4,\cdots,\ldots$를 대입해보면 경계는 마치 샌드위치처럼 $y=x$에 평행하게 생기면서 $T=T_n$이라 하였을 때

$$T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset \cdots \subset T_n \subset \cdots$$

의 관계를 만족하게 됩니다.



반면, S가 의미하는 영역은 $y=2^{x+3}-8$의 윗 부분과 경계로서 n값에 관계없이 항상 고정되어 있으므로, $f(22)-f(21)$에 해당하는 값은

$$(S\cap T_{22})-(S\cap T_{21})=S\cap(T_{22}-T_{21})$$

에 해당하는 영역에 존재하는 x,y좌표가 모두 정수인 점, 즉 격자점의 개수가 됩니다.

이때 $y=2^{x+3}-8$은 원점을 지나는 곡선으로서 비록 $y=x$가 원점에서의 접선은 아니지만 $y=-8$을 점근선으로 갖기 때문에 전체적인 개형을 고려해보면 $T_{22}-T_{21}$이 의미하는 영역인

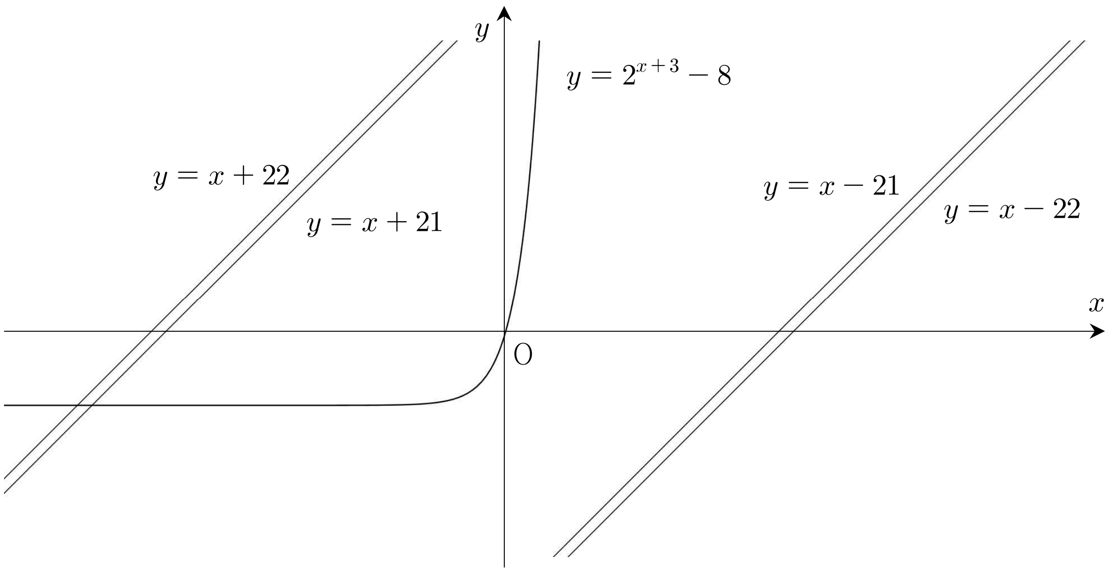
$$\{(x,y)|x+21<y\le x+22\}\cup\{(x,y)|x-22\le y<x-21\}$$

중에서

$$\{(x,y)|x+21<y\le x+22\}$$

만 따져도 충분합니다.

왜 그러한지, 곡선 $y=2^{x+3}-8$과 T_{22}, T_{21}이 의미하는 영역을 살펴보겠습니다.



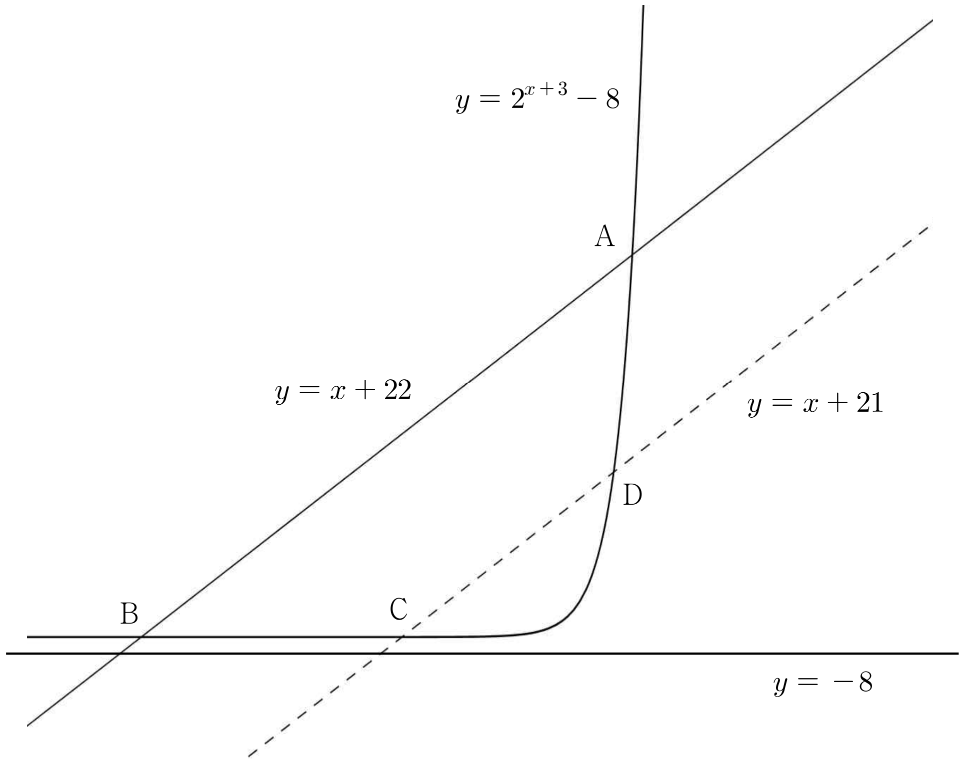
따라서,

$$T_{22} - T_{21} = \{(x, y) | x + 21 < y \le x + 22\} \cup \{(x, y) | x - 22 \le y < x - 21\}$$

과

$$S = \left\{(x, y) | y \ge 2^{x+3} - 8\right\}$$

가 나타내는 영역은, 두 직선 $y = x + 21$과 $y = x + 22$, 또 곡선 $y = 2^{x+3} - 8$로 둘러싸여 있음을 알 수 있습니다. 약간 그림을 왜곡해서 그려보면 다음과 같습니다.



편의상 곡선과 직선들의 교점을 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$라 하고, 곡선 $y = 2^{x+3} - 8$의 점근선도 함께 나타내었습니다.

그런데 여기서 구체적으로 교점 A, B, C, D의 좌표를 찾을 생각을 할 필요가 없습니다! 사실 우리가 풀 수 있는 방정식은 기껏해야 일, 이차 방정식이나 인수분해가 깔끔하게 맞아떨어지는 방정식처럼 아~주아주아주아주아주 특별하고도 극히 일부인 경우에 불과합니다.
그래서 이 타이밍에, 아까 의문을 품었었던 똑똑한 학생이 다시 물어볼 수 있습니다.

"어머, 그럼 교점도 못 구하는데 어떻게 이 문제를 풀 수 있죠?
출제자가 정말 사악한 사람이군요!"

하지만 걱정할 필요는 없습니다. 출제자는 언제나 답이 있고, 해법도 누구나 떠올림직한 문제를 내게 되어 있으니까요!
지금의 난관을 헤쳐 나가기 위해서 우리는 근사의 개념을 이용할 수 있습니다.
사실 여러분 모두 초등학교 3학년쯤 되던 꼬꼬마 시절에, 원주율 π의 근삿값을 구하기 위해서 가로, 세로 모두 $10(cm)$쯤 되는 정사각형에 $1(cm)$간격으로 모눈을 그린 다음, 정사각형에 내접하는 원을 그려서 온전하게 포함되는 $1(cm^2)$짜리 정사각형과, 절반 이상 포함된 정사각형, 절반 이하 포함된 정사각형을 헤아려서 근삿값 3.14를 유추하였던 추억이 있을 겁니다.
지금과 유사한 상황을 포함하고 있는 기출 문제 중에서

[2012년 11월 대수능 수리(나형) 30번]

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\{(x,\ y) \mid 2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$$

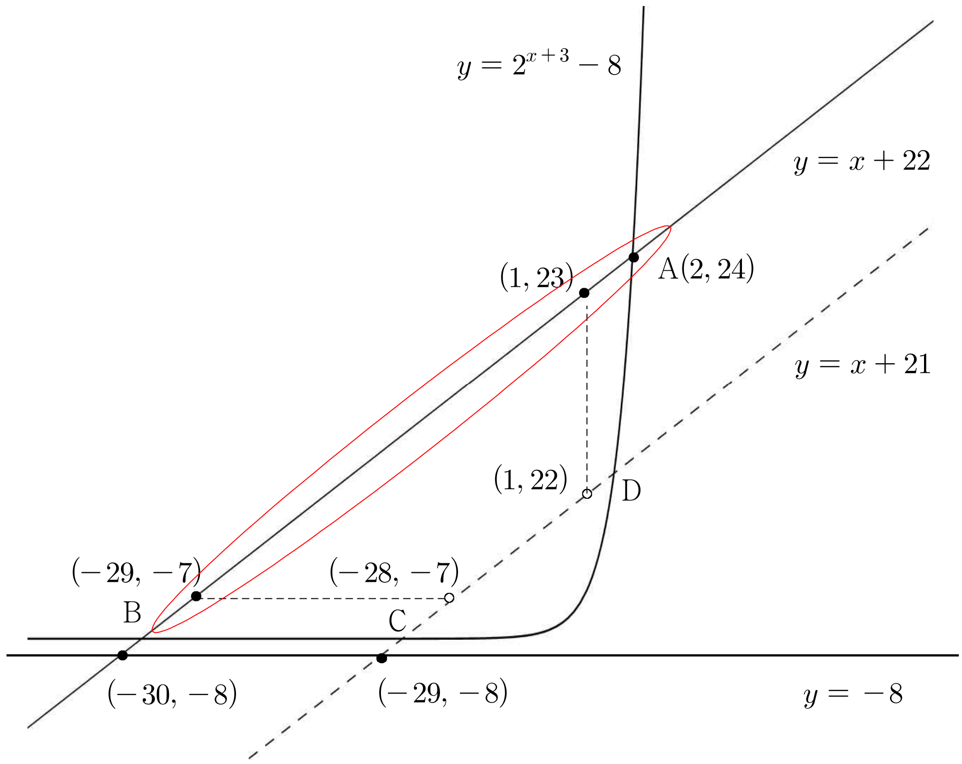
에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

제 3사분면에서 발생하는 교점들을 카운팅하기 위해서 썼던 아이디어를 꼽을 수 있습니다. 지수함수든 로그함수든, 점근선 근처에서는 아주 빠르게 곡선이 직선에 다가갔던 상황을요. 그리고 점점 가까워지는 곡선과 직선 사이의 간격에 비해서, 격자점들간의 거리는 충분히 멀리 떨어져 있기 때문에 본래의 영역을 다듬어서 생각해도 무방합니다.

그래서 우리 문제에서도 곡선 BC 부분과 곡선 AD 부분 근처에 위치한 격자점들의 좌표를 함께 나타내어 보면 다음과 같을 것입니다.



곡선 $y=2^{x+3}-8$에서 $x=1,2,3,4,\cdots$ 를 대입하다보면 곡선이 점 $(2,24)$를 지나는 것을 알 수 있는데, 마침 직선 $y=x+22$ 위에 놓인 점이기도 합니다. 출제자가 그래서 21과 22라는 숫자를 등장시킨거군요! 따라서 운좋게 교점 A의 좌표가 $(2,24)$인 것을 알아내었습니다.

그리고 점근선에 해당하는 $y=-8$부근에서 보면 두 점 B, C의 y좌표는 -8에 아주 가까운 값으로서 $-7.\text{xx}$쯤 되는 값을 가질테니 근처의 격자점 $(-29,-7)$과 $(-28,-7)$을 생각해줄 수 있습니다.

그런데 직선 $y=x+22$는 포함되는 경계이나, 직선 $y=x+21$은 비포함되는 경계이므로 문제에서 요구하는 조건을 모두 만족하는 격자점은 직선 $y=x+22$ 상에 놓인 점들로서

$$(-29,-7),(-28,-6),\cdots,(2,24)$$

로 총 $2-(-29)+1=32$ 혹은 $24-(-7)+1=32$가 답이 됩니다.