01

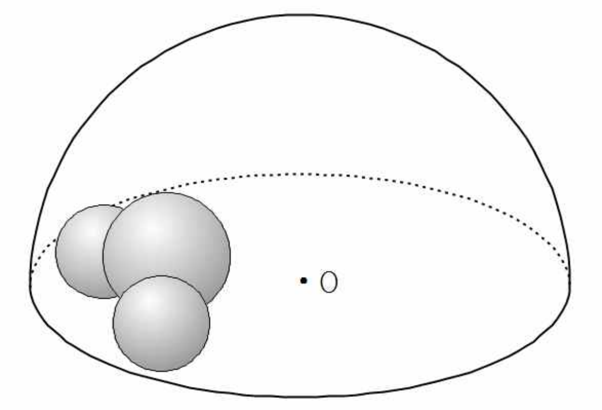
[Integral 수학 연구실]

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 반구의 내부에 반지름의 길이가 2인 구 C_1과 반지름의 길이가 1인 구 C_2, C_3가 다음의 조건을 만족한다.

(가) 구 C_1, C_2, C_3의 중심이 각각 A, B, C이다. (나) 구 C_1, C_2, C_3는 반구와 내접한다. (다) 구 C_1에 두 구 C_2, C_3가 접한다.

두 평면 OAB와 OAC가 이루는 예각을 θ라 하면, $\cos\theta = \dfrac{p}{q}$이다.

이 때, $p+q$의 값을 구하여라.



2 [Integral 수학 연구실]

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+(z-2)^2=2^2$와 구 S위의 세 점 P, Q, R에 대하여 다음의 조건을 만족하는 삼각형 PQR의 xy평면과 yz평면으로의 정사영의 넓이의 합의 최대값을 $p(1+\sqrt{3})$이라 할 때, $128p^2$의 값을 구하여라.

> (가) 점 P의 좌표는 $(1,\ \sqrt{2},\ 3)$이다.
> (나) 삼각형 $\triangle\mathrm{PQR}$의 한변의 길이가 3인 정삼각형이다.

3

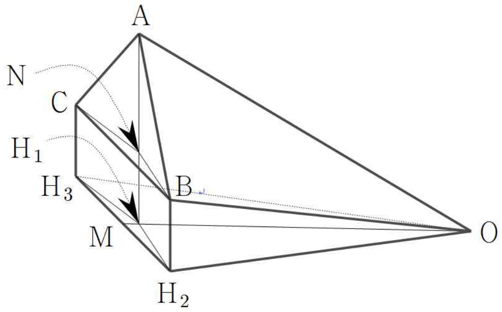
[Integral 수학 연구실]

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+(z-1)^2=1$와 평면 $\alpha : x+y+z=1$에 대하여 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C라 하자. 원 C위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 x축에 내린 수선의 발을 P_1, Q_1이라 하고, y축에 내린 수선의 발을 P_2, Q_2라 한다. $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2$의 최대값을 M이라 할 때, $5M$의 값을 구하여라.

1 [정답] 46

[Solution]

주어진 도형에서 각 구의 중심과 각각의 수선의 발을 연결하여
아래의 그림과 같은 입체도형을 찾을 수 있다.



A, B, C가 구의 중심이므로,

$\overline{AO}=4$, $\overline{BO}=\overline{CO}=5$, $\overline{AB}=\overline{AC}=3$, $\overline{AH_1}=2$, $\overline{AH_2}=\overline{AH_3}=1$

이고, AH_1, BH_2, CH_3는 반구의 밑면에 수직이므로,

$\overline{OH_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{OH_2}=\overline{OH_3}=2\sqrt{6}$, $\overline{MH_2}=2\sqrt{2}$

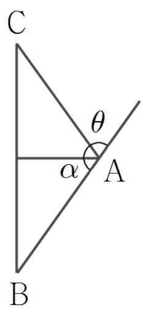
따라서 $\overline{MH_1}=x$, $\overline{MH_2}=y$라 하면,

$(x+2\sqrt{3})^2+y^2=(2\sqrt{6})^2$

$x^2+y^2=8$이다.

$\therefore\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \ y=\dfrac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$

삼각형 ABC에서



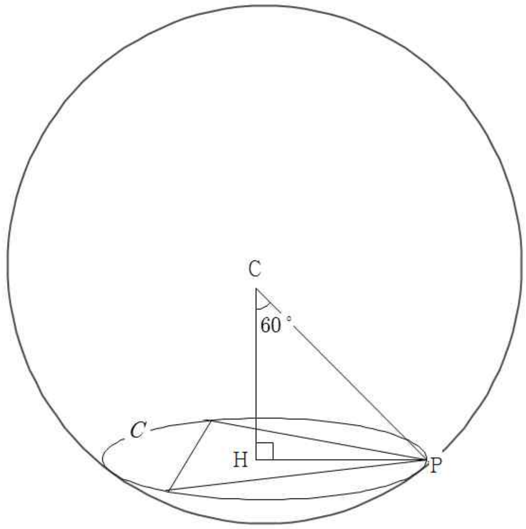
따라서 $\cos\theta=\cos(\pi-2\alpha)=-1+2\sin^2\alpha=-1+2\left(\dfrac{\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}\right)^2$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{19}{27}$

$\therefore\ p+q=46$

2 [정답] 486

[Solution]



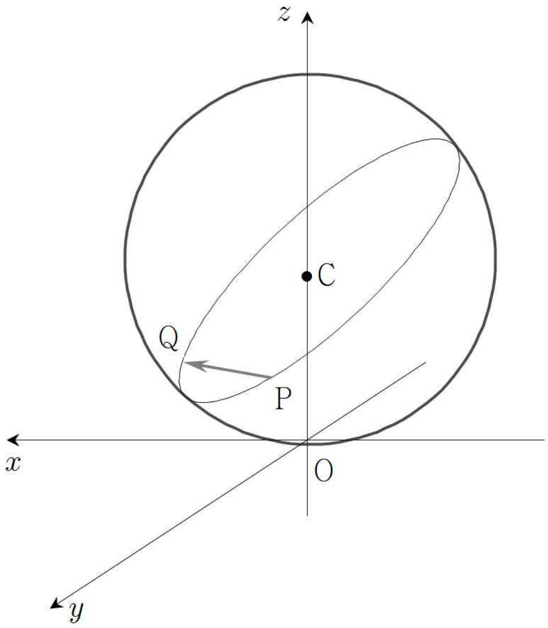
삼각형 PQR을 포함하는 평면을 α라 하고,
평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C라 하면,
삼각형 PQR은 원 C에 내접하는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로
원 C의 중심 H는 삼각형 PQR의 무게중심이므로,
원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이고,
구의 반지름이 2이므로 평면 α와 구의 중심사이의 거리는 1임을 알 수 있다.
따라서 평면 α의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$가 이루는 각의 크기는 60°이다.
이 때, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$와 평행하고 크기가 1인 벡터를
$\overrightarrow{h_\alpha}=(a, b, c)$라 가정하면
α와 xy평면, yz평면이 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면,
$\cos\theta_1 = c$, $\cos\theta_2 = a$ 이므로,
삼각형 PQR의 xy평면과 yz평면으로의 정사영의 넓이의 합은
$\frac{\sqrt{3}}{4}3^2 \times (a+c)$ 라 할 수 있으므로
$a+c$가 최대일 때 정사영의 넓이의 합이 최대이다.
또한, $a+c=(a, b, c)\cdot(1, 0, 1)$라 할 수 있으므로
$\overrightarrow{h_\alpha}$와 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$가 60°를 이루고, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$와 $(1, 0, 1)$은 45°를 이루므로
$\overrightarrow{h_\alpha}$와 $(1, 0, 1)$이 이루는 각을 θ라 하면,
$15^\circ \le \theta \le 105^\circ$이므로

$$a+c=(a, b, c)\cdot(1, 0, 1) \le \sqrt{2}\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이의 합의 최댓값은
$\frac{\sqrt{3}}{4}3^2 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}$이다.
따라서 $p=\frac{9\sqrt{3}}{8}$
$\therefore 128p^2 = 486$

3 [정답] 20

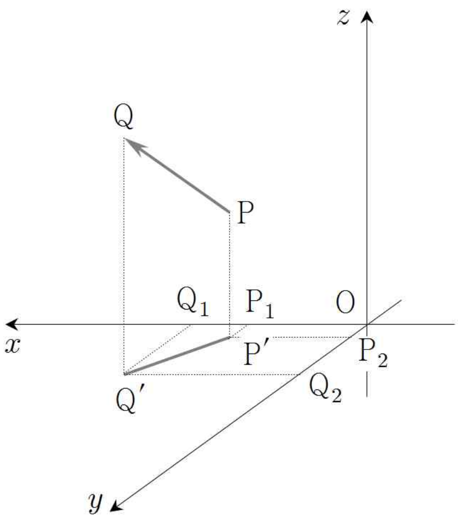
[Solution]



그림과 같이 평면 α가 구의 중심 $\mathrm{C}(0,0,2)$을 지나고
있으므로 구의 중심을 지나는 반지름이 2인 원 위의 임의의 두 점 P, Q가 존재한다.
선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 평면 α위에 존재하므로 평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{h_\alpha}=(1,1,1)$과 수직이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{h_\alpha}$ ⋯①

한편, P와 Q에서 x축과 y축에 내린 수선의 발의 위치는 아래의 그림과 같이 삼수선의 정리에 의하여
P, Q의 xy평면 위로의 정사영 P′, Q′에서 각각 x축과 y축에 내린 수선의 발과 같다.



따라서, $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}^2+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}^2=\overline{\mathrm{P'Q'}}^2$이 성립한다.
$\overrightarrow{h_\alpha}$와 $\overrightarrow{h_{xy}}$가 이루는 각을 θ_1이라 하면
$\cos\theta_1=\dfrac{(1,1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.
①에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 $\overrightarrow{h_\alpha}$와 90° 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{h_{xy}}$가 이루는 각을 θ라 하면,

$90^\circ - \theta_1 \leq \theta \leq 90^\circ + \theta_1$

이다.

따라서, 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 xy평면 위로의 정사영의 길이의 최대값은

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 원의 지름이고, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{h_{xy}}$가 90° 일때이므로

$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}^2 + \overline{\mathrm{P_2Q_2}}^2 \leq 2^2$이다.

$\therefore 5M = 20$이다.