1번 문항(2018학년도 연세대학교 논술기출)

좌표평면 위의 세 점 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 주어져 있다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$은 주어진 삼각형에 내접해있다. 이 타원의 넓이는 $ab\pi$이다.

(1) 위 조건을 만족시키는 a와 b의 관계식과 범위를 구하시오.

(2) 타원의 넓이가 최대가 되도록 하는 b의 값을 구하시오.

김진성

(3) 타원의 넓이가 $\dfrac{3}{16}\pi$가 되도록 하는 a의 값을 모두 구하시오.

2번 문항(2018학년도 한양대학교 논술기출)

점 (a,b)에서 포물선 $y^2-2y-4x+13=0$에 두 개의 접선을 그을 수 있고 이 두 접선이 수직으로 만날 때, 점 (a,b)를 모두 구하시오.

김진성

3번 문항(2018학년도 한양대학교 논술기출)

$s > \sqrt{6}$ 인 실수 s에 대하여 점$(-2, s)$에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$에 그을 수 있는 접선이 두 개다.

이 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 s로 나타내시오.

김진성

4번 문항(2018학년도 한양대학교 논술기출)

점 $(t, 6)$에서 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$에 그을 수 있는 접선이 두 개일 때, t의 값을 모두 구하시오.

김진성

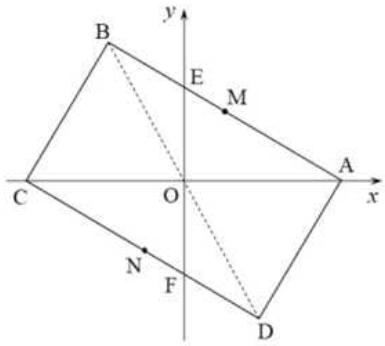
5번 문항(2020학년도 GIST 면접기출)

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F'이라고 하자. 이 타원 위의 한 점 $\mathrm{P}\left(4, \dfrac{12}{5}\right)$에서 그은 접선을 L이라고 하자. L과 $\overline{\mathrm{PF}}$가 이루는 예각을 α, L과 $\overline{\mathrm{PF}'}$이 이루는 예각을 β라 하였을 때, α와 β의 크기를 비교하시오.

김진성

6번 문항(2023학년도 경희대학교 논술기출)

그림과 같이 직사각형 ABCD는 점 A와 C가 x축 위에 있고, 두 대각선의 교점이 원점에 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2p$이고 $0<p<1$이다. 변 AB, CD와 y축의 교점을 각각 E, F라 하고, 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 다음 물음에 답하시오.



(1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이 점 A, E, C, F를 지날 때, 이 타원의 두 초점의 좌표를 p의 식으로 나타내고, 그 과정을 논술하시오.

김진성

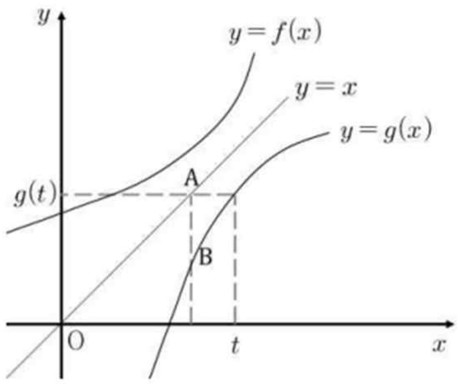
(2) 타원 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ $(m>0,\ n>0)$이 점 A, M, C, N을 지날 때, (1)의 b에 대하여 $n<b$임을 보이고,

그 근거를 논술하시오.

7번 문항(2022학년도 고려대학교 세종약학 논술기출)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 두 점 $(0,\ g(t))$와 $(t,\ g(t))$를 잇는 선분과 직선 $y=x$의 교점을 A라고 하고 점 A를 지나고 y축과 평행인 직선과 곡선 $y=g(x)$의 교점을 B라고 한다.



(나) 점 P는 포물선 $sy^2=-x+3-\frac{4}{s}-\sqrt{17}$ 위를 움직인다. (단, s는 양의 실수이다.)

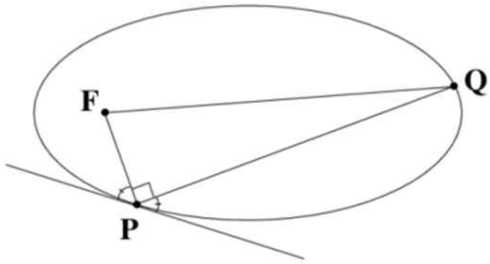
(1) 제시문 (가)에서 점 B의 y좌표를 $h(t)$라고 할 때, 곡선 $y=h(x)$의 $x=3$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 제시문 (나)의 점 P 중에서 문제 [1-1]의 접선과 가장 가까운 점 P_0을 찾고, 이때 점 P_0과 접선 사이의 거리 d를 구하시오.

(3) 문제 (2)의 점 P_0이 중심이고 문제 [1-1]의 접선에 접하는 원 위를 움직이는 점 C와 문제 (2)의 점 P_0을 x축에 대하여 대칭이동한 점 D에 대하여, 선분 CD의 수직이등분선과 직선 $\mathrm{P}_0\mathrm{C}$의 교점을 Q라 하자. 이때, 점 Q가 그리는 도형의 방정식에 대하여 논술하시오. (단, 점 C와 점 D가 일치하는 경우는 제외한다.)

8번 문항(2022학년도 한양대학교 논술기출)

장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원 모양의 당구대 위의 한 초점 F에 공이 놓여 있다. 이 공을 쳤을 때 그림과 같이 공은 타원의 둘레의 점 P를 지나 점 Q에 닿았다. 이때, 점 F, P를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각과 점 P, Q를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각은 서로 같다. $\angle FPQ = \frac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이를 구하시오.



김진성

9번 문항(2021학년도 중앙대학교 논술기출)

좌표평면 위에 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$가 있다.

그리고 원점을 지나며 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 2θ인 직선과 곡선 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$의

교점을 B라 하고, 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값을 M이라 하자. 삼각형 AOB의 넓이를

$\tan\theta$로만 표현된 함수로 나타내고, 이를 이용하여 M^2을 구하시오. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)

김진성

10번 문항(2023학년도 서울시립대학교 모의논술)

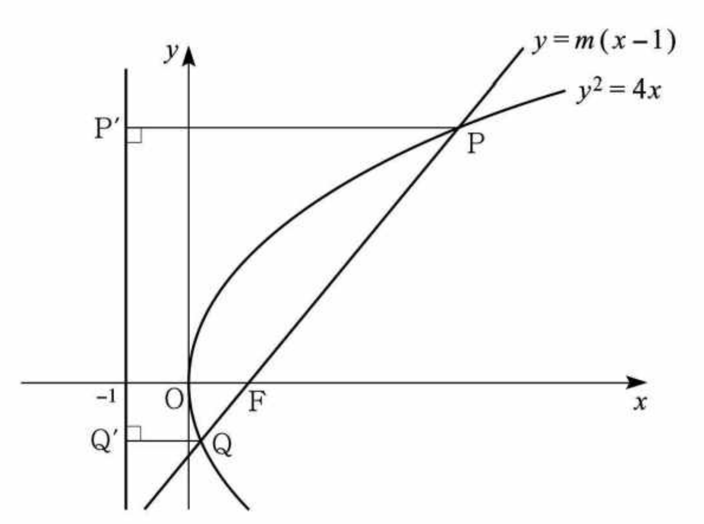
쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 P와 이 쌍곡선의 두 초점 F_1, F_2에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{PF}_2}}{\overline{\mathrm{PF}_1}}=\frac{29}{11}$일 때, 세 점 P, F_1, F_2를 지나는 이차함수의 그래프와 선분 $\overline{\mathrm{PF}_2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

김진성

11번 문항 (2024학년도 중앙대학교 논술기출)

아래의 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 $\mathrm{F}(1,0)$을 지나고 $m>0$인 직선 $y=m(x-1)$이 서로 다른 두 점 P,Q에서 포물선과 만난다. 두 점 P,Q에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 P',Q'이라 하자. 사각형 $\mathrm{PP}'\mathrm{Q}'\mathrm{Q}$의 둘레의 길이가 40일 때, 이 사각형의 넓이를 구하시오.



김진성

12번 문항(2024학년도 중앙대학교 논술기출)

직선 $y=\sqrt{3}$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\sqrt{3})$에서 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선이 이루는 예각이 45°일 때, k^2의 값을 구하시오.

김진성

13번 문항 (2023학년도 경희대학교 논술기출)

$a>b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하자.

(1) $k>a$인 상수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$에서 타원에 그은 접선 중 접점의 y좌표가 양수인 접선을 l이라 할 때, 그 접점을 P라고 하자. 이때 P의 좌표를 a, b, k를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오.

(2) (1)에서 $a=5$, $b=4$, $k=13$이라고 하자. 접점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선 l'이 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. 이때 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{QF}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{QF'}}}$의 값을 구하여 기약분수로 나타내고, 그 근거를 논술하시오.

김진성

14번 문항 (2023학년도 시립대학교 모의논술)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{F}(5,0)$, $\mathrm{F}'(-5,0)$을 초점으로 하는 타원 C_1과 두 점 F, F'을 초점으로 하는 쌍곡선 C_2가 있다. 두 곡선 C_1, C_2의 제1사분면 위의 교점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF}'} = 20$일 때, 다음에 답하여라.

(a) $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}$의 값의 범위를 구하여라.

(b) $\angle \mathrm{FPF}' = \dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}$의 값을 구하여라.

김진성

15번 문항 (2023학년도 한양대학교 모의논술)

평면 위의 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=2:1:2$이다.

아래의 등식을 만족하는 평면 위의 두 점 P와 Q에 대하여, $\overline{\mathrm{AQ}}$가 최소가 될 때 $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$의 값을 구하시오.

$$2(\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{AB}})=2(\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{PC}})=2(\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{PQ}})=\overline{\mathrm{BC}}$$

김진성

16번 문항 (2022학년도 부산대학교 논술기출)

(가) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

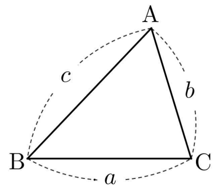
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

(나) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

(다) 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c일 때 다음이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

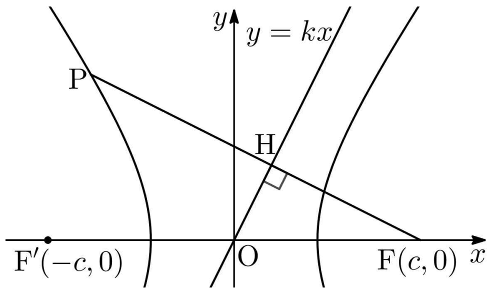


(라) 선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라 한다.

두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\ (c>0)$인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=kx\ (k>1)$이다. 점 F에서 직선 $y=kx$에 내린 수선의 발을 H라 하고 직선 FH가 쌍곡선과 제2사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[기하-1] $k=2$일 때, 점 H는 선분 PF의 중점이다.

선분 FH가 쌍곡선과 만나는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{4}{3}$일 때, c의 값을 구하시오.

17번 문항 (2022학년도 이화여자대학교 논술기출)

[1] 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

[2] 타원 $x^2+3y^2=3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x좌표는 양수이다. 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$라 하자. $f(k)$를 구하시오.

[3] [1]에 해당하는 실수 k에 대하여 $\{f(k)\}^2$의 최댓값을 구하시오.

김진성

18번 문항 (2022학년도 이화여자대학교 논술기출)

다음과 같이 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(s)$에 대하여 아래 물음에 답하시오.

> 좌표평면에서 실수 s에 대하여 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$과 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프가 한 점에서 만날 때 원의 반지름의 길이를 $f(s)$라 하자.

[1] 점 $(4,\ 5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발을 구하시오.

[2] $s \geq 4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

[3] $-4 < s < 4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

김진성

19번 문항 (2022학년도 한양대학교 논술기출)

장축의 길이가 6, 단축의 길이가 4인 타원이 있다. 네 변이 각각 이 타원에 접하는 직사각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$일 때, 이 직사각형의 넓이를 구하시오.

김진성

20번 문항 (2022학년도 한양대학교 논술기출)

<가> 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{27}=\frac{1}{2}$ 위의 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

- 점 A는 제1사분면에 있고, 점 B는 제3사분면에 있다.
- 위 쌍곡선의 두 초점을 F, F′이라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{FAF'})=\cos(\angle \mathrm{F'BF})=\frac{7}{25}$ 이다.

<나> 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $0<b<a$)의 두 초점을 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하고 타원 위의 점 P에서의 접선을 l이라 하자.
점 P의 x좌표를 t라고 할 때, 원점으로부터 접선 l까지 거리의 제곱을 $f(t)$라 하고, $\overline{\mathrm{PF_1}}\times\overline{\mathrm{PF_2}}$를 $h(t)$라 하자.

[1] 제시문 <가>에서 두 점 A, B의 좌표를 각각 구하시오.

김진성

[2] 제시문 <나>에서 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$일 때, $\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)\,dt$의 값을 구하시오.

[3] 제시문 <나>에서 $f(t)\times h(t)$를 a와 b에 대한 식으로 나타내시오.

21번 문항 (2022학년도 한양대학교 메디컬 논술기출)

함수 $h(x)=x(x^2-16)\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)-8(2x^2-5)$ (단, $x\geq 4$)는 열린구간 $(4,\infty)$에서 증가하고, $h(x)=0$이면 $x=5$이다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{k^2}{4},\,k\right)$를 중심으로 하고 점 $\mathrm{F}(1,\,0)$과 점 $\mathrm{B}(-1,\,k)$를 지나는 원을 C라 하자. 어떤 양수 k_0에 대하여 $0\leq k<k_0$이면 원 C와 포물선 $y^2=4x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, $k>k_0$이면 원 C와 포물선 $y^2=4x$는 서로 다른 네 점에서 만난다. 이때 k_0의 값을 구하시오.

김진성

22번 문항 (2020학년도 부산대학교 논술기출)

(가) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

(나) x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어져 있을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후에 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

좌표평면에서 곡선 $C: x^2+y^2=4\ (x \geq 0, y \geq 0)$와 두 점 $\mathrm{A}(4, 0), \mathrm{B}(0, 4)$가 있다. 곡선 C위의 점 T에 대하여 $\angle \mathrm{TOA}=\theta$라 하자. (단, O는 원점이다.)
$0 \leq \theta \leq a$인 모든 실수 θ에 대하여 $\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PA}}$를 만족하는 반직선 OT 위의 점 P가 존재하고, $b<\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$인 모든 실수 θ에 대하여 $\overline{\mathrm{QT}}=\overline{\mathrm{QB}}$를 만족하는 반직선 OT 위의 점 Q가 존재한다. 두 점 P와 Q가 나타내는 곡선을 각각 C_1, C_2라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1] a의 최댓값과 b의 최솟값을 구하시오.

김진성

[2] 두 곡선 C_1, C_2가 만나는 점을 R라 하자. 점 R에서 곡선 C_1의 접선과 곡선 C_2의 접선이 이루는 예각의 크기를 α라 할 때, $\tan\alpha$의 값을 구하시오.

23번 문항 (2020학년도 시립대학교 논술기출)

좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 제1사분면에 있는 임의의 점을 P라 하고, $\theta=\angle \mathrm{OFP}$라 하자. 두 선분 FO, FP와 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

김진성

24번 문항 (2019학년도 경북대학교 논술기출)

(가) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}(-c, 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

이다.

(나) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다.

(다) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_0, y_0)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

이다.

김진성

(라) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[1] 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2-px-qy+1=0$이 x축에 접하고 단축의 길이가 6일 때, 두 초점의 좌표를 구하시오. (단, $p\geq 0$, $q\geq 0$이고 $p^2+\frac{q^2}{4}>1$이다.)

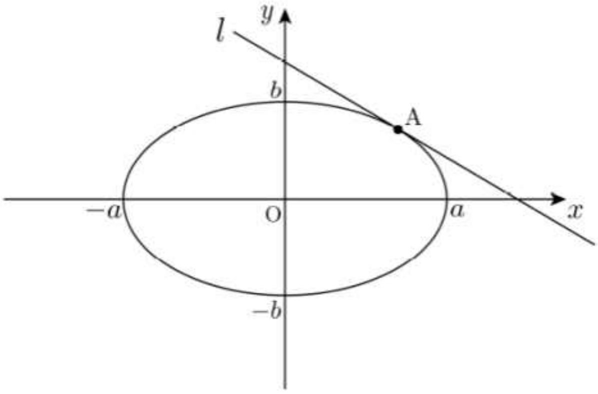
[2] 타원 $\frac{x^2}{4R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$ 과 직선 $l_1 : y=mx$의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 타원에 접하는 직선을 l_2라 하자. (단, $R>0$, $m>0$이다.)

(1) 직선 l_2이 기울기를 $f(m)$이라 할 때, $mf(m)$을 구하시오.

(2) 직선 l_1과 직선 l_2가 이루는 예각의 크기를 $\theta(m)$이라 할 때, $\theta(m)$이 최소가 되도록 하는 m의 값을 구하시오.

25번 문항 (2019학년도 경희대학교 논술기출)

[I] 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 위의 점 A에서의 접선 l에 대하여 다음 질문에 답하시오. (단, O는 원점)



[1] $a=2$, $b=1$이라 하자. 중심이 원점이고 접선 l에 접하는 원의 넓이가 2π일 때 제1사분면에 있는 점 A의 좌표를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

김진성

[2] $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}a$일 때, 타원 위의 점 $\mathrm{A(x,\,y)}$와 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 $\mathrm{A'(x,\,0)}$, 점 $\mathrm{B}(-a,\,0)$으로 만들어지는 삼각형 $\mathrm{AA'B}$의 넓이를 $S(x)$라 하자. 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$의 임의의 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

[3] $0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, 타원 위의 점 $\mathrm{A}(a\cos t,\,b\sin t)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 C, y축과 만나는 점을 D라 하자. 이때, 선분 CD의 길이가 최소가 되는 t에 대하여 $\sin t$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

[4]

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$일 때, 타원 위의 점 $\mathrm{A}(a\cos t, b\sin t)$를 지나고 접선 l과 수직인 직선을 l'이라 하자. 직선 l'과 선분 OA가 이루는 각 중 예각을 θ라 할 때, 다음 질문에 답하시오.

(1) $\tan\theta$를 t에 관한 함수로 나타낼 수 있고 이 함수를 $f(t)$라 하자. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) $x = a\cos t$라 두면, $\tan\theta$를 x에 관한 함수로 나타낼 수 있고 이 함수를 $g(x)$라 하자. $\displaystyle\int_0^{a} g(x)\,dx$를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

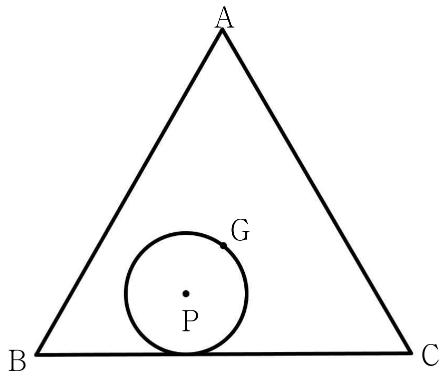
김진성

26번 문항 (2019학년도 부산대학교 모의논술)

(가) 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1 = m(x-x_1)$이다. (나) 초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ (단, $p \neq 0$) 초점이 $F(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ (단, $p \neq 0$) (다) 방정식 $f(x, y) = 0$으로 주어지는 음함수 y의 x에 대한 도함수는 y를 x의 함수로 보고 방정식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

[1] 초점이 $F(p, 0)\,(p \neq 0)$인 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 원점이 아닌 점 $P(x_1, y_1)$에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 P'이라 할 때, 삼각형 FPP'이 이등변삼각형임을 보이시오.

[2] 한 변의 길이가 $8\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 점 G를 지나고 삼각형 ABC의 세 변 중에서 적어도 한 변에 접하는 원을 C라 하자. 원 C위의 모든 점이 삼각형 ABC의 변 또는 내부에 있을 때, 원 C의 중심 P가 나타내는 도형의 내부의 넓이를 구하시오.



[3] 위 [2]의 점 B에서 점 P가 나타내는 도형에 그은 접선 중 점 C와의 거리가 가까운 직선을 l이라 하자. 직선 l이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 할 때, 위 [1-1]의 결과를 이용하여 $\overline{CQ}$의 길이를 구하시오.

27번 문항 (2019학년도 부산대학교 논술기출)

실수 $t\,(t>2)$에 대하여 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(0,\,t)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 그은 두 접선의 방정식을 t에 관한 식으로 나타내시오.

김진성

28번 문항 (2019학년도 한양대학교 모의논술)

[1] 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$에서 타원에 접하는 직선의 기울기를 구하시오.

[2] 점 $(-3,\ 1)$에서 포물선 $x=y^2$에 접하는 직선을 두 개 그었을 때, 두 접선이 이루는 각을 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하자. 이때 $\cos\theta$의 값을 구하시오.
(단, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$이다.)

김진성

[3] 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 지나고, 기울기가 양수 m인 직선의 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$과 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$과 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라고 하자. (단, $x_1<x_2$이다.) 두 점 $\mathrm{D}(-2,\ 0)$, $\mathrm{E}(2,\ 0)$에 대하여 삼각형 ACD의 넓이를 S_1, 삼각형 BCE의 넓이를 S_2라 할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{m\to0}\frac{S_1}{S_2}$을 구하시오.

29번 문항 (2017학년도 부산대학교 논술기출)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 에 대하여 다음 논제에 답하시오.

타원 $\dfrac{x^2}{4k}+\dfrac{y^2}{k}=1$ $(k>0)$과 곡선 $y=f(x)$의 교점이 4개일 때, 타원과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역 중 원점을 포함하지 않는 영역의 넓이를 A를 사용하여 나타내시오. 여기서, $A=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{7-x^2}\,dx$ 이다.

김진성

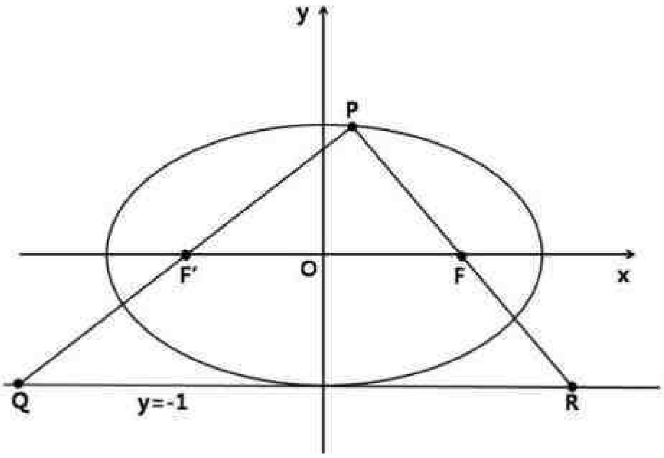
30번 문항 (2017학년도 성균관대학교 논술기출)

<제시문 1>

아래 그림과 같이 타원 $E : \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$

(단, $-1 \le a \le 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le b \le 1$)를 잡고, 점 P와 타원 E의 두 초점 F', F를

연결한 직선이 직선 $y=-1$과 만나는 점을 각각 Q, R이라 한다.



김진성

[1] 선분 QR의 길이를 a에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[2] 삼각형 PQR의 넓이를 b에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[3] 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

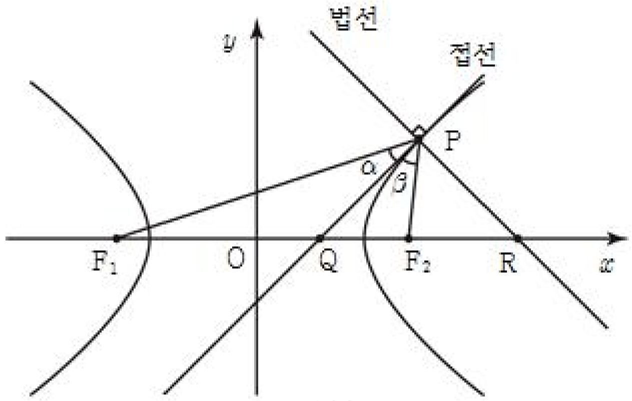
31번 문항 (20218년도 서울과학기술대학교 논술기출)

(가) 두 초점 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } 0<a<c,\ b^2=c^2-a^2)$$

(나) 쌍곡선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에 대하여 α와 β를 그림과 같이 $\angle F_1PQ=\alpha$, $\angle F_2PQ=\beta$라고 하자.

(단, $y_1 \neq 0$)이다.)



[1] 점 P에서 법선의 방정식을 구하시오.

[2] $\alpha=\beta$임을 보이시오.

[3] F_2에서 발사된 빛이 쌍곡선 위의 점 P에서 반사된다. 반사된 후 빛의 경로를 나타내는 직선의 방정식을 구하시오.

[4] 기울기 m인 쌍곡선의 두 접선 사이의 거리를 m에 관한 식으로 나타내시오.

32번 문항 (20218년도 단국대학교 논술기출)

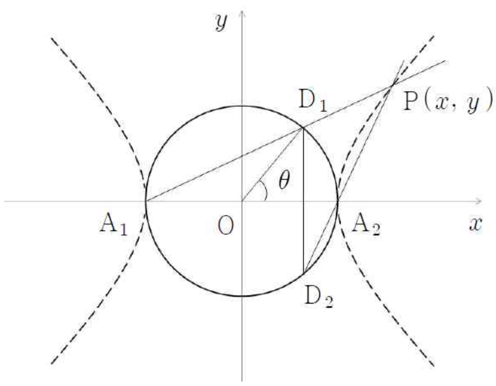
[1] 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 준선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, A의 좌표를 구하시오. (단, $b>0$)

[2] 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 D에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 43°라 하자.포물선의 초점 F와 점 D를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하시오.

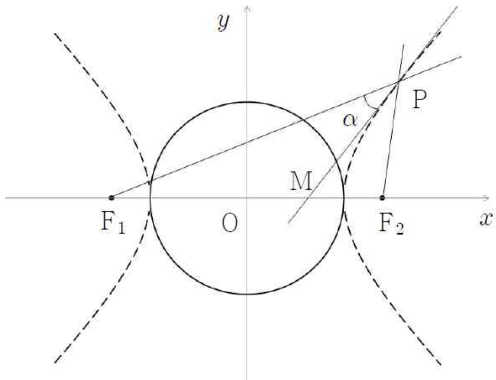
김진성

33번 문항 (2018년도 한양대 에리카 논술기출)

<가> 아래 [그림 1]과 같이 반지름의 길이가 r인 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 임의의 점 D_1에서 y축에 평행하게 그은 직선이 원과 만나는 다른 점을 D_2라 하자. 원과 x축과의 두 교점을 $\mathrm{A}_1(-\mathrm{r}, 0)$과 $\mathrm{A}_2(\mathrm{r}, 0)$이라 하고, 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$과 $\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$가 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 만난다. 이때, $\angle \mathrm{D}_1\mathrm{OA}_2=\theta$이다. 점 $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$가 그리는 곡선은 [그림 2]와 같이 초점이 $\mathrm{F}_1(-\mathrm{c}, 0)$과 $\mathrm{F}_2(\mathrm{c}, 0)$인 쌍곡선이다. 점 P에서 쌍곡선에 접하는 접선이 x축과 만나는 점을 M이라 하고, $\angle \mathrm{F}_1\mathrm{PM}=\alpha$라 하자. (단, $c=\sqrt{2}r$)



[그림 1]



[그림 2]

김진성

<나> 탄젠트함수의 덧셈정리

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},\quad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

[1] 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$의 방정식, $\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$의 방정식, 점 $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$를 각각 [그림 1]의 θ로 나타내어라.

[2] [그림 2]의 직선 PF_1, PM의 기울기를 각각 [그림 1]의 θ로 나타내어라.

[3] [그림 2]의 $\tan\alpha$를 [그림 1]의 θ로 나타내어라.

34번 문항 (2023년도 동국대 논술기출)

[가] 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않은 한 직선 k가 주어질 때 점 F에 이르는 거리와 직선 k에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라고 한다. 이때 점 F를 포물선의 초점, 직선 k를 포물선의 준선이라고 한다. 또, 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 축과 포물선의 교점을 포물선의 꼭지점이라고 한다.

-『고등학교 기하』

[나] 위성 방송 안테나는 포물선의 축에 평행하게 들어오는 전파가 포물선의 초점에 모이는 성질을 이용하여 약한 전파를 증포갈여 수신할 수 있게 한다. 또한, 자동차의 전조등이나 무대의 조명등은 포물선의 이런 성질을 거꾸로 적용한 것이다.
이제 포물선이 갖는 이와 같은 성질을 다음과 같이 증명해 보자.
(중략)
전파가 곡선 위의 한 점에서 반사된다는 것은, 그 점을 지나는 곡선의 접선에 대하여 입사각과 반사각의 크기가 같게 된다는 뜻이다. 따라서 포물선의 축에 평행하게 들어온 전파는 포물선에 반사되어 초점에 모이게 됨을 알 수 있다.

-『고등학교 기하』

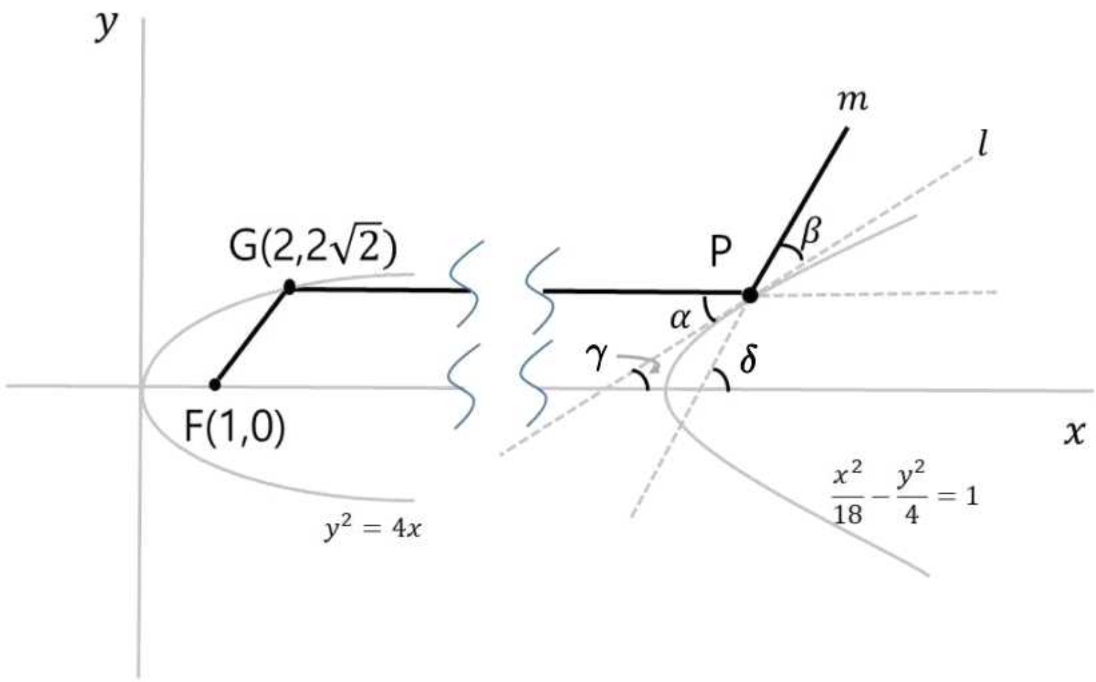
[다] 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다.

-『고등학교 기하』

[문제1] 그림과 같이 단면이 포물선 모양인 거울 $y^2=4x\,(0\le x\le 4)$의 초점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$에서 쏜 빛이 포물선 위의 점 $\mathrm{G}(2,\ 2\sqrt{2})$에 반사되어 직진한다. 또한 이 빛은 단면이 쌍곡선 모양인 거울 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1\ \ (3\sqrt{2}\le x\le 9)$ 위의 점 P에 반사되어 직진한다. 이때, 직선 l은 단면이 쌍곡선 모양인 거울 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P에서의 접선이고, 빛이 점 P에서 반사되기 전과 후 직선 l과 이루는 각의 크기 α와 β는 같다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 직선 l의 x절편을 구하시오.

(2) 직선 l과 x축이 이루는 예각 γ의 크기를 구하시오.

(3) 반사된 후 빛이 지나가는 반직선의 연장선 m이 x축과 이루는 예각 δ의 크기를 구하시오.

35번 문항 (2022년도 동국대 논술기출)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 평면위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 하고, 점 F'를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라고 한다.

- 고등학교 『기하』

[나] 초점이 점 $F(p,\,0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2=4px \quad (\text{단, } p\neq 0)$$

- 고등학교 『기하』

[다] 포물선 $y^2=4px$위의 점 $(x_{1,}\,y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

- 고등학교 『기하』

[라] 두 실수 $a>0$, $b>0$에 대하여 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$이다. 여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

- 고등학교 『수학』

김진성

[문제1] 상수 $p\neq 0$ 에 대하여 초점이 점 $F(p,\,0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선이 주어졌다. 포물선 위의 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하고 점 P에서의 포물선의 접선과 포물선의 준선의 교점을 Q라고 하자.

1) 점 H와 점 Q사이의 거리와 초점 F와 점 Q사이의 거리를 구하시오.

2) 점 H와 점 Q사이의 거리의 최솟값을 구하고 최솟값을 가질 때의 점 P의 좌표를 구하시오.

<15줄 이내> [30점]

36번 문항 (2020학년도 서울과학기술대 논술기출)

점 P는 포물선 $y^2=2x+1$ 위를 움직이고 제1사분면에 있다. 원점 O, 점 A$(2,\ \sqrt{3}\ )$, 점 P로 만든 삼각형 OAP 둘레의 길이가 최소가 될 때, 점 P에서의 접선을 l이라고 하자. 그리고 중심이 $(t\,,\,0\,)(t>0)$이고 포물선 $y^2=2x+1$에 접하는 원을 C라고 하자. 원 C 위의 점과 접선 l 사이의 거리의 최솟값이 1일 때, t의 값을 구하시오.

김진성

37번 문항 (2024학년도 경희대 모의논술)

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$위에 한 점 $\mathrm{P}(p,q)$와 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$이 있다. (단 p, $q>0$이고 $a>b>0$이다.)

(1) 삼각형 PFF'의 외접원의 중심을 $\mathrm{A}(k,l)$라고 할 때, A의 y좌표 l이 양수인 q의 범위를 구하시오.

(2) $\angle\mathrm{PF}'\mathrm{F}=\alpha$, $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}=\beta$라 할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{q\to\infty}\cos(2\alpha+\beta)$를 $t=\dfrac{a}{b}$에 대한 함수 $f(t)$로 나타내고, 부정적분 $\displaystyle\int tf(t)dt$을 구하시오.

김진성

1번 문항 해설.

정답 : (1) $a^2=1-2b\left(0<a<1,\ 0<b<\dfrac{1}{2}\right)$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (3) $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}$

(1)

$$\begin{cases} y=-x+1\ (x>0,\ y>0) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow x=1-y$$

$$\frac{(1-y)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$

$$b^2(1-y)^2+a^2(y-b)^2=a^2b^2$$

$$\left(a^2+b^2\right)y^2-2\left(b^2+ba^2\right)y+b^2=0$$

$by\ \ D'=b^2\left(b+a^2\right)^2-b^2\left(a^2+b^2\right)=0,$

$$b^2+2a^2b+a^4=a^2+b^2$$

$$\therefore\ a^2=1-2b\left(0<a<1,\ 0<b<\frac{1}{2}\right)$$

(2) $a^2=1-2b \Rightarrow b=\dfrac{1-a^2}{2}$

$$\pi ab=\pi a\cdot\frac{1-a^2}{2}=-\frac{\pi}{2}a(a-1)(a+1)$$

$$S(a)=-\frac{\pi}{2}\left(a^3-a\right) \Rightarrow S'(a)=-\frac{\pi}{2}\left(3a^2-1\right)$$

$$\therefore\ S(a)\le S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow b=\frac{1-\dfrac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

위와 같이 a와 b의 관계식으로부터 b를 소거하고 a에 관한 삼차함수를 이끌어서 미분으로 $a>0$ 범위에서 극대, 최대가 되는 a 값을 얻은 후 b를 구해도 되고, 아래와 같이 a를 소거하고 곧바로 b에 관한 식을 이끌어도 됩니다. (이때는 근호 안쪽만을 미분하는 것으로 충분)

$$a^2=1-2b \Rightarrow a=\sqrt{1-2b}\ \ (\because a>0)$$

$$\pi ab=\pi\sqrt{1-2b}\cdot b=\pi\sqrt{b^2-2b^3}$$

$$T(b)=b^2-2b^3 \Rightarrow T'(b)=2b-6b^2=-2b(3b-1)$$

$$\therefore\ T(b)\le T\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \therefore\ b=\frac{1}{3}$$

넓이가 최대가 될 때의 넓이를 계산하면

$$\pi ab\ \le\ \pi\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi\ \left(a=\frac{\sqrt{3}}{3},\ b=\frac{1}{3}\right)$$

김진성

(3) $\pi ab = \frac{3}{16}\pi \le \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \left(a = \frac{\sqrt{3}}{3},\ b = \frac{1}{3}\right)$

(2)번의 삼차함수 $S(a)$의 그래프가 a의 구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록함을 생각하면, 이 문제를 만족하는 답은 두 개일 것이라고 예상해볼 수 있다.

$a^2 = 1-2b \Rightarrow b = \frac{1-a^2}{2} \Rightarrow \pi ab = \pi a \cdot \frac{1-a^2}{2} = \frac{3}{16}\pi$

$\therefore\ 8a(1-a^2) = 3 \Rightarrow 8a^3 - 8a + 3 = 0$

$\therefore\ (2a-1)(4a^2+2a-3) = 0$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$ or $a = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}$ $(\because a > 0)$

김진성

2번 문항 해설

정답 : $a=2$인 모든 $(a,\ b)$

포물선의 방정식을 정리하면 $(y-1)^2=4(x-3)$

$(y-1)^2=4(x-3)$을 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하여 얻는 새로운 포물선 $y^2=4x$를 고려

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x-\frac{{y_0}^2}{4}=x-x_0=\frac{y_0}{2}(y-y_0)$,

즉, $x=\frac{y_0}{2}(y-y_0)+\frac{{y_0}^2}{4}$ $\cdots$ ①

이 접선이 $(a,\ b)$를 지난다면 $a=\frac{y_0}{2}(b-y_0)+\frac{{y_0}^2}{4}$이고 정리하면 y_0에 대한 이차방정식 ${y_0}^2-2by_0+4a=0$을 얻는다. 이를 ②라 하자.

점 $(a,\ b)$에서 포물선 $y^2=4x$에 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 접선과 포물선의 접점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$라 하면 y_1과 y_2는 ②의 해이고 근과 계수와의 관계에 의해

$y_1y_2=4a$ $\cdots$ ③

한편, 두 접선이 수직으로 만나면 $y_1y_2\neq0$이고, 점 P, Q에서의 접선의 기울기는 ①에 의해 각각 $\frac{2}{y_1}$, $\frac{2}{y^2}$이다. 따라서 $\frac{4}{y_1y_2}=-1$, 즉, $y_1y_2=-4$ $\cdots$ ④

③과 ④을 연립하면 $a=-1$을 얻는다.

이제 원래의 포물선을 다루기 위해 $a=-1$를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동하면 $a=2$ (b는 임의의 실수)가 우리가 원하는 점 $(a,\ b)$의 집합이 됨을 알 수 있다.

3번 문항 해설

정답 : $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{s^2+27}}{s^2-6}$ $\left(s > \sqrt{6}\right)$

타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x_0x+\dfrac{y_0y}{9}=1$

$y_0 \neq 0$이면 $y=-\dfrac{9x_0}{y_0}x+\dfrac{9}{y_0}$

(점 $(-2,\ s)$에서 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$에 그은 접선의 접점 $(x_0,\ y_0)$은 $y_0 \neq 0$을 만족한다.)

$m=-\dfrac{9x_0}{y_0}$라 하자. $81{x_0}^2+9{y_0}^2=81$의 양변을 ${y_0}^2$으로 나누면

$m^2+9=\dfrac{81{x_0}^2}{{y_0}^2}+9=\dfrac{81}{{y_0}^2}$가 되므로 $\dfrac{9}{y_0}=\pm\sqrt{m^2+9}$

따라서 기울기가 m인 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{m^2+9}$$

이 식이 점 $(-2,\ s)$를 지나면 $s=-2m\pm\sqrt{m^2+9}$이고, 이를 정리하면

$$3m^2+4sm+\left(s^2-9\right)=0$$

김진성

점 $(-2,\ s)$를 지나는 접선의 방정식의 기울기를 $m_1,\ m_2$라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\dfrac{4s}{3},\ m_1m_2=\dfrac{s^2-9}{3}$이고,

이로부터 $\left|m_1-m_2\right|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{s^2+27}$을 얻는다.

기울기가 $m_1,\ m_2$인 두 직선이 이루는 각을 θ라 하면 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{s^2+27}}{s^2-6}$ $\left(s>\sqrt{6}\right)$

4번 문항 해설

정답 : 2

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x_0x-\frac{y_0y}{9}=1$

이 접선이 점 $(t,\ 6)$을 지나면 $tx_0-\frac{2y_0}{3}=1$ … ⑤

이를 ${x_0}^2-\frac{{y_0}^2}{9}=1$과 연립하면 $(t^2-4){x_0}^2-2tx_0+5=0$ … ⑥

점 $(t,\ 6)$에서 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이기 위해서는 ⑥이 x_0에 대한 이차방정식으로써 두 개의 실근을 가져야 한다. 이때, y_0는 ⑤에 의해 유일하게 결정되며 x_0는 $x_0\le-1$ 또는 $x_0\ge 1$을 만족한다.

경우 1) $t=\pm2$일 때 ⑥은 x_0에 대한 일차방정식이고 하나의 실근만을 갖는다.

경우 2) $t\ne\pm2$이라 가정하자. ⑥의 판별식이 양수이면, 즉

$\frac{D}{4}=t^2-5(t^2-4)=4(5-t^2)>0$이면 두 개의 실근을 갖는다.

따라서 $-\sqrt{5}<t<-2,\ -2<t<2,\ 2<t<\sqrt{5}$일 때, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이다.

김진성

5번 문항 해설

정답 : $\alpha=\beta$

$$\tan\alpha=\tan(\theta-\theta_1)$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\theta_1}{1+\tan\theta\tan\theta_1}$$

$$=\frac{-\frac{16}{15}-\frac{12}{5}}{1-\frac{16}{15}\cdot\frac{12}{5}}=\frac{-5\cdot16-15\cdot12}{5\cdot15-16\cdot12}=\frac{260}{117}=\frac{20}{9}$$

$$\tan\beta=\tan(\theta_2+\pi-\theta)=\tan(\theta_2-\theta)$$

$$=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta}{1+\tan\theta_2\tan\theta}$$

$$=\frac{\frac{12}{35}+\frac{16}{15}}{1-\frac{12}{35}\cdot\frac{16}{15}}=\frac{15\cdot12+35\cdot16}{35\cdot15-12\cdot16}=\frac{740}{333}=\frac{20}{9}$$

$\therefore\ \tan\alpha=\tan\beta$

α, β가 예각이므로 $\alpha=\beta$

김진성

6번 문항 해설

정답 : (1) $\left(\sqrt{1-p^4},\ 0\right)$, $\left(-\sqrt{1-p^4},\ 0\right)$ (2) $n<b$

(1) 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{1+p^2}$ 이므로 A의 좌표는 $\left(\sqrt{1+p^2},\ 0\right)$이다.

또한 삼각형 ABC와 삼각형 AOE가 닮았으므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{OE}}$이다.

$2:2p=\sqrt{1+p^2}:\overline{\mathrm{OE}}$에 의하여 $\overline{\mathrm{OE}}=p\sqrt{1+p^2}$이고, E의 좌표는 $\left(0,\ p\sqrt{1+p^2}\right)$이다.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 $\left(\sqrt{1+p^2},\ 0\right)$을 대입하면 $\dfrac{1+p^2}{a^2}=1$이고, $a^2=1+p^2$이다.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 $\left(0,\ p\sqrt{1+p^2}\right)$을 대입하면 $\dfrac{p^2(1+p^2)}{b^2}=1$이고, $b^2=p^2(1+p^2)$이다.

$0<p<1$이므로 $a^2-b^2=1+p^2-p^2(1+p^2)=1-p^4>0$이다.

따라서 두 초점은 x축 위에 있고, 좌표는 $\left(\sqrt{1-p^4},\ 0\right)$, $\left(-\sqrt{1-p^4},\ 0\right)$이다.

(2) 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC와 삼각형 AHB가 닮았으므로 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BH}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2p$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{1+p^2}$를 이용하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+p^2}}$, $\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$이다.

따라서 B의 좌표는 $\left(\sqrt{1+p^2}-\dfrac{2}{\sqrt{1+p^2}},\ \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\left(-\dfrac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}},\ \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$이고,

M의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+p^2}-\dfrac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right),\ \dfrac{1}{2}\left(0+\dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)=\left(\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}},\ \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$

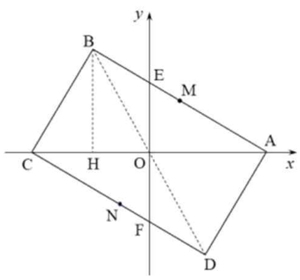
$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$에 $\left(\sqrt{1+p^2},\ 0\right)$을 대입하면 $\dfrac{1+p^2}{m^2}=1$이고, $m^2=1+p^2$이다.

$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$에 $\left(\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}},\ \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$를 대입하고 $m^2=1+p^2$을 이용하면

$\dfrac{p^4}{(1+p^2)^2}+\dfrac{p^2}{n^2(1+p^2)}=1$이고, 정리하면 $n^2=\dfrac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2}$이다.

$b^2=p^2(1+p^2)$이므로 $n^2=\dfrac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2}=\dfrac{b^2}{1+2p^2}$이고,

$0<p<1$에 대하여 $\dfrac{1}{1+2p^2}<1$이므로 $n^2<b^2$이고, 따라서 $n<b$이다.



7번 문항 해설

정답 : (1) $y=\frac{1}{4}(x-3)$ (2) 1 (3) 해설참조

(1) 문제에서 주어진 조건에 따라 B의 좌표는 $(g(x),\ g(g(x)))$가 되므로 $h(x)=g(g(x))$가 된다. 따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 점 $(3,\ h(3))$을 지나고 기울기가 $h'(3)$인 직선의 방정식인

$$y=h'(3)(x-3)+h(3)$$

이 된다. 이때, 합성함수의 미분법에 의해 $h'(x)=g'(g(x))g'(x)$로 구할 수 있다.
한편, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

가 된다. 먼저 $g(3)=p$이라고 가정하면

$$\begin{aligned} f(p)=3 &\Leftrightarrow p^3+p+1=3 \\ &\Leftrightarrow (p-1)(p^2+p+2)=0 \end{aligned}$$

이므로 $p=1$, 즉 $g(3)=1$이 된다. 다음으로 $g(1)=q$이라고 가정하면

$$\begin{aligned} f(q)=1 &\Leftrightarrow q^3+q+1=1 \\ &\Leftrightarrow q(q^2+1)=0 \end{aligned}$$

이므로 $q=0$, 즉 $g(1)=0$이 된다. 따라서

$h(3)=g(g(3))=g(1)=0$

김진성

$h'(3)=g'(g(3))g'(3)=g'(1)g'(3)=\frac{1}{f'(g(1))}\times\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(0)}\times\frac{1}{f'(1)}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

이므로 구하고자 하는 방정식은

$$y=\frac{1}{4}(x-3)$$

이 된다.

(2)

포물선의 접선 중 문제 [1-1]의 접선과 기울기가 같은 접선을 구하여, 이때 포물선과 접선의 교점과 문제 [1-1]의 접선과의 거리를 구하면 된다. 포물선의 접선의 기울기를 $m=\frac{1}{4}$, 접하는 점을 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$2sy_1m=-1 \Leftrightarrow y_1=-\frac{1}{2sm}=-\frac{2}{s},\ x_1=-sy_1{}^2+3-\frac{4}{s}-\sqrt{17}=3-\frac{8}{s}-\sqrt{17}$$

이 된다. 문제 [1-1]의 접선을 다시 적으면 $x-4y-3=0$이 되므로 점과 직선 사이의 거리의 공식을 이용하면 거리의 최솟값 d는

$$d=\frac{\left|3-\frac{8}{s}-\sqrt{17}-4\left(-\frac{2}{s}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=1$$

이 된다.

(3) 점 P_0을 중심으로 하는 원의 반지름은 $d=1$이 된다. 또한 점 D의 좌표는 쌍곡선 위의 점 $\left(3-\frac{8}{s}-\sqrt{17},\ \frac{2}{s}\right)$이 되므로 $\overline{P_0D}=\frac{4}{s}$가 된다.

1) $s<4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 외부에 위치하며, 삼각형 QCD는 이등변삼각형이 되므로 $\overline{CQ}=\overline{DQ}=k$라고 하면

$$\overline{P_0Q}=\overline{P_0C}+\overline{CQ}=1+k$$

이다. 따라서 $\overline{P_0Q}-\overline{DQ}=1$로 일정하므로 점 Q 그리는 도형은 점 P_0과 점 D로부터의 거리의 차가 1인 쌍곡선이 된다. 따라서 쌍곡선의 방정식을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\left(x-3+\frac{8}{s}+\sqrt{17}\right)^2}{\frac{4}{s^2}-\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=-1 \Leftrightarrow \frac{(sx-3s+8+s\sqrt{17})^2}{16-s^2}-y^2=-\frac{1}{4}$$

2) $s=4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 위에 위치하며, 1)과 마찬가지로 삼각형 QCD은 이등변삼각형이 된다. 또한 CD의 수직이등분선이 항상 원의 중심 P_0을 지나므로 $Q=P_0$가 된다.

김진성

3) $s>4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 내부에 위치하며, 1)과 마찬가지로 삼각형 QCD은 이등변삼각형이 되므로 $\overline{CQ}=\overline{DQ}=k$라고 하면

$$\overline{P_0Q}=\overline{P_0C}+\overline{CQ}=1+k$$

이다. 따라서 $\overline{P_0Q}+\overline{DQ}=1$로 일정하므로 점 Q 그리는 도형은 점 P_0과 점 D로부터의 거리의 합이 1인 타원이 된다. 따라서 타원의 방정식을 아래와 같이 구할 수 있다.

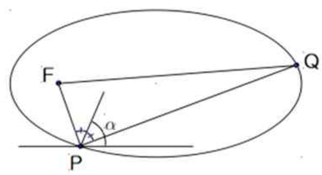
$$\frac{\left(x-3+\frac{8}{s}+\sqrt{17}\right)^2}{\frac{1}{4}-\frac{4}{s^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1 \Leftrightarrow \frac{(sx-3s+8+s\sqrt{17})^2}{s^2-16}+y^2=\frac{1}{4}$$

8번 문항 해설

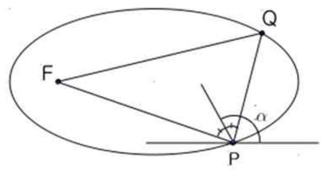
정답 : $\frac{24}{17}-\frac{4}{17}\sqrt{2}$ 또는 $\frac{24}{17}+\frac{4}{17}\sqrt{2}$

타원을 아래 그림과 같이 좌표평면에 두어 $x^2+4y^2=4$라 하자. 공이 초점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3},\ 0)$에 있고 점 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$는 x축 아래에 있다고 가정하자. 다른 초점 $\mathrm{F}'(-\sqrt{3},\ 0)$은 점 P $(x_0,\ y_0)$와 점 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$를 지나는 직선 위에 놓여 있다. 점 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$에서의 타원의 법선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 α라 하면, 이 법선의 기울기는 $\tan\alpha=\frac{4y_0}{x_0}$이다. 따라서

점 F, P를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_0-0}{x_0-(-\sqrt{3})}=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{4y_0}{x_0}+1}{1-\frac{4y_0}{x_0}}$



점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_0-0}{x_0-\sqrt{3}}=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{4y_0}{x_0}-1}{1+\frac{4y_0}{x_0}}$이다.



이로부터 점 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$는 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 또는 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이고,

김진성

점 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$의 y좌표는 각각 $y_1=\frac{\sqrt{3}}{21+12\sqrt{2}}$ 또는 $y_1=\frac{\sqrt{3}}{21-12\sqrt{2}}$이다.

따라서

(삼각형 FPQ의 넓이)=(삼각형 FPF$'$의 넓이)=(삼각형 FQF$'$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_0|+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_1|$

$=\frac{24}{17}-\frac{4}{17}\sqrt{2}$ 또는 $\frac{24}{17}+\frac{4}{17}\sqrt{2}$이다.

9번 문항 해설

정답 : $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{12}$

교점 $\mathrm{B}(x_0,\ y_0)$는 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$과 $y=(\tan 2\theta)x\ \left(\theta \neq \dfrac{\pi}{4}\right)$의 교졈이다. 연립해서 풀면

$x_0{}^2=\dfrac{4}{4+\tan^2(2\theta)}$이다.

$\mathrm{B}(x_0,\ y_0)$과 $y=(\tan\theta)x\ \left(\theta \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$와의 거리는 $\dfrac{|x_0\tan\theta - y_0|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{|x_0\tan\theta - x_0\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$이다.

따라서, 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\dfrac{|\tan\theta-\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}|x|=\dfrac{|\tan\theta-\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\dfrac{1}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}$이고

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$를 이용하여 정리하면 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}}$이다.

이 공식에 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$값을 갖고 이것은 직접 구한 삼각형의 넓이와 같다.

삼각형 AOB의 넓이를 나타내는 함수 $f(\theta)$는 아래와 같다.

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}} & \left(\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2} & \left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

f^2의 최댓값을 구하면 된다. $s=\tan^2\theta\ (s\ \geq 0)$로 쓰면

$f^2=\dfrac{s(1+s)}{4\{(1-s)^2+s\}}=\dfrac{s^2+s}{4(s^2-s+1)}$이고 미분하면 $\dfrac{-2s^2+2s+1}{4(s^2-s+1)^2}$이다.

따라서 $s=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 최댓값을 갖고 $M^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{12}$이다.

[방법2]

삼각형의 넓이를 구하는 다른 방법이다. $\mathrm{B}(x_0,\ y_0)$에서 $x_0{}^2=\dfrac{4}{4+\tan^2(2\theta)}$이고

$y_0{}^2=\dfrac{4\tan^2(2\theta)}{4+\tan^2(2\theta)}$이므로 선분 OB의 길이는 $\dfrac{2\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}$이다.

따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}\sin\theta$이다.

$\sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$와 $\tan(2\theta)=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$를 이용하여 정리하면 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{2\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}}$이다. 이 후 과정은 예시답안과 같다.

10번 문항 해설

정답 : $18\sqrt{7}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{PF_2}}}{\overline{\mathrm{PF_1}}}=\dfrac{29}{11}>1$로부터 $\overline{\mathrm{PF_2}}>\overline{\mathrm{PF_1}}$이므로 $\mathrm{F_1}(5,\ 0)$, $\mathrm{F_2}(-5,\ 0)$이다. 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF_2}}-\overline{\mathrm{PF_1}}=2\cdot3=6$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF_2}}}{\overline{\mathrm{PF_1}}}=\dfrac{29}{11}$과 연립하여 풀면 $\overline{\mathrm{PF_1}}=\dfrac{11}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{PF_1}}=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\dfrac{11}{3}$에서 $y^2=-x^2+10x-\dfrac{104}{9}$이고, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$로부터 $5x^2-18x-8=(5x+2)(x-4)=0$이다. 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $x=4$이고, $y=\dfrac{4}{3}\sqrt{7}$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(4,\ \dfrac{4}{3}\sqrt{7}\right)$이다.

세 점 P, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$를 지나는 이차함수는 $y=-\dfrac{4}{27}\sqrt{7}\left(x^2-25\right)$이므로 구하고자 하는 부분의 영역의 넓이는

$$\int_{-5}^{4}-\frac{4}{27}\sqrt{7}\left(x^2-25\right)dx-\frac{1}{2}\cdot(4-(-5))\cdot\frac{4}{3}\sqrt{7}=18\sqrt{7}$$

이다.

김진성

11번 문항 해설

정답 : $y^2=4x$에 $y=m(x-1)$을 대입하고 정리하여 얻은

이차방정식 $m^2x^2-2(m^2+2)+m^2=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=\dfrac{2(m^2+2)}{m^2}$이다.

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PP'}+\overline{QQ'}=(\alpha+1)+(\beta+1)=\dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$

점 P 에서 직선 QQ'에 내린 수선의 발을 R이라 하고 각 PQR을 θ라 하면,

$\overline{P'Q'}=\overline{PR}=\tan\theta\,\overline{QR}=m\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PR}^2}=m\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{P'Q'}^2}$ 에서

$\overline{P'Q'}=\sqrt{\dfrac{m^2}{m^2+1}}\,\overline{PQ}=4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$

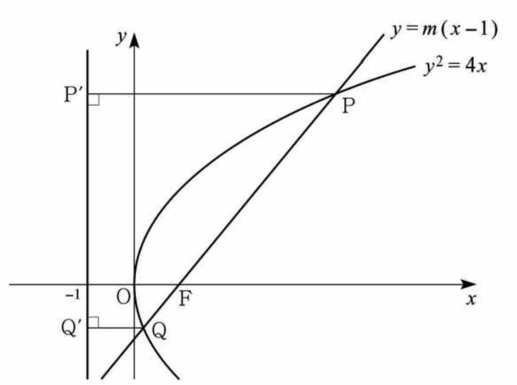
사각형 $PP'QQ'$의 둘레의 길이

$=\overline{PQ}+\overline{PP'}+\overline{QQ'}+\overline{P'Q'}=2\overline{PQ}+\overline{P'Q'}=\dfrac{8(m^2+1)}{m^2}+4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}=40$

$r=\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$라 놓아 얻은 이차방정식 $8r^2+4r=40$에서 $r>0$이므로 $r=\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}=2$

따라서 $m^2=\dfrac{1}{3}$이고 사각형 $PP'QQ'$의

넓이$=\dfrac{1}{2}\overline{P'Q'}\times(\overline{PP'}+\overline{QQ'})=\dfrac{1}{2}\overline{P'Q'}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 16=64$



12번 문항 해설

정답 : $k=\pm1$인 경우, 두 접선의 이루는 각이 45°가 아님을 쉽게 알 수 있다.

따라서 $k\neq\pm1$이라 가정할 수 있다. 접선을 $y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$라 놓자. 접선이 점 $P(k,\sqrt{3})$을 지나므로 대입하여 정리하여 m에 대한 이차방정식

$(k^2-1)m^2-2\sqrt{3}km+1=0$을 얻는다.

아래 그림과 같이 두 접선이 x축과 이루는 각을 $\alpha,\beta(\alpha>\beta)$라 하면

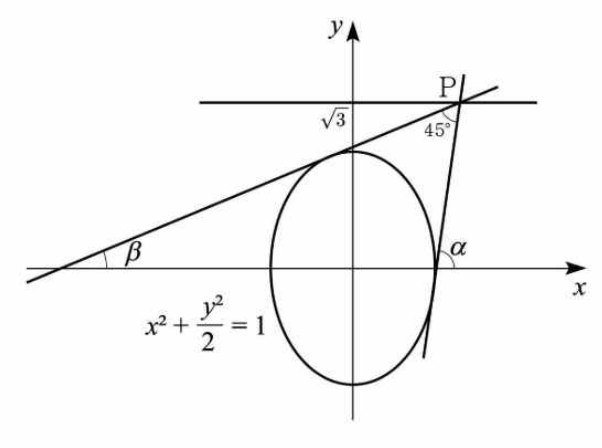
$\tan\alpha,\tan\beta$는 이 이차방정식의 두 근이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}$과 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{k^2-1}$이다.

$\alpha-\beta=45^\circ$이므로 $1=\tan^2(\alpha-\beta)=\left(\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right)^2$

$$=\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta}{(1+\tan\alpha\tan\beta)^2}=\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}\right)^2-\left(\dfrac{4}{k^2-1}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{k^2-1}\right)^2}$$

정리하여 방정식 $(k^2)^2-8k^2-4=0$을 얻는다. $k^2>0$이므로 $k^2=4+2\sqrt{5}$



13번 문항 해설

(1) 접점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 한다면, 점 P에서의 접선 l의 방정식은 $\dfrac{x_1 x}{a^2}+\dfrac{y_1 y}{b^2}=1$ 이다. 이 직선이 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나므로, $x_1=\dfrac{a^2}{k}$ 이다. 또한, P가 타원 위의 점이므로, $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 이다. 한편, y_1은 양수이므로, $y_1=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2b^2}{k^2}}=b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{k^2}}$ 이다. 따라서 접점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{a^2}{k},\ b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{k^2}}\right)$이다.

(2) $a=5,\ b=4,\ k=13$일 때, $x_1=\dfrac{25}{13},\ y_1=\dfrac{48}{13}$이다. 따라서 접선 l의 기울기는 $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\dfrac{1}{3}$ 이다. 그러므로 직선 l'은 기울기가 3이며 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{25}{13},\ \dfrac{48}{13}\right)$을 지나는 직선이고, 이 직선의 방정식은 $y=3x-\dfrac{27}{13}$ 이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{13},\ 0\right)$이다. 한편, 두 초점 $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2$의 좌표를 각각 $(-c,\ 0),\ (c,\ 0)$이라 하면, (단 $c>0$) $c=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로, $\mathrm{F}_1(-3,\ 0),\ \mathrm{F}_2(3,\ 0)$이다. 그러므로 각 선분의 길이는

$$\overline{\mathrm{PF}_1}=\sqrt{\frac{64^2+48^2}{13^2}}=\frac{80}{13},\ \overline{\mathrm{PF}_2}=\sqrt{\frac{14^2+48^2}{13^2}}=\frac{50}{13},\ \overline{\mathrm{QF}_1}=\frac{9}{13}+3=\frac{48}{13},\ \overline{\mathrm{QF}_2}=3-\frac{9}{13}=\frac{30}{13}$$

이다.

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}_1}}{\overline{\mathrm{QF}_1}}+\dfrac{\overline{\mathrm{PF}_2}}{\overline{\mathrm{QF}_2}}=\dfrac{\frac{80}{13}}{\frac{48}{13}}+\dfrac{\frac{50}{13}}{\frac{30}{13}}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$ 이다.

14번 문항 해설

(a) 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_1의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>5$, $b^2=a^2-25$), 쌍곡선 C_2의 방정식을 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$(단, $5>c>0$, $d^2=25-c^2$)이라 하자.

타원과 쌍곡선의 정의로부터 $\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$이고 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2c$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a-c$이고 $\overline{\mathrm{PF}'}=a+c$이다. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF}'}=20$이므로 $a^2=c^2+20$이다. 또한, 타원 C_1에서 $a>5$이고 쌍곡선 C_2에서 $0<c<5$이므로 $\sqrt{5}<c<5$이다. $a^2=c^2+20$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}=\frac{\overline{\mathrm{PF}}^2}{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF}'}}=\frac{(a-c)^2}{20}=\frac{\left(\sqrt{c^2+20}-c\right)^2}{20}$$

이다. $f(t)=\sqrt{t^2+20}-t$라 하면 $f(t)>0$이고 $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+20}}-1<0$이다. 따라서 $\dfrac{\{f(t)\}^2}{20}$은 감소함수이다.

$\sqrt{5}<c<5$일 때, $\dfrac{\{f(5)\}^2}{20}<\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}<\dfrac{\{f(\sqrt{5})\}^2}{20}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}$의 범위는

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}<\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

이다.

(b) $\overline{\mathrm{FF}'}=10$이므로 코사인법칙에 의하여

$$100=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2-2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF}'}\times\cos\frac{\pi}{3}=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2-20=(a-c)^2+(a+c)^2-20$$

이다. 위 식을 정리하면 $a^2+c^2=60$이다. $a^2=c^2+20$이므로 $a^2=40$, $c^2=20$이다. 따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF}'}}=\frac{a-c}{a+c}=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}}=3-2\sqrt{2}$$

이다.

이다.

15번 문항 해설

문제에 주어진 식으로부터 세 점 B, C, Q는 두 점 P, A를 초점으로 하는 쌍곡선 위에 있으며, 점 C, Q는 점 P쪽에, 점 B는 A쪽에 가까움을 알 수 있다.
문제는 도형의 위치가 아닌 크기에 관한 것이므로, $\mathrm{P}=(-c,\ 0)$, $\mathrm{A}=(c,\ 0)$로 하고, 쌍곡선은 다음 방정식을 만족하는 것으로 하고 문제를 해결하여야 무방하다.

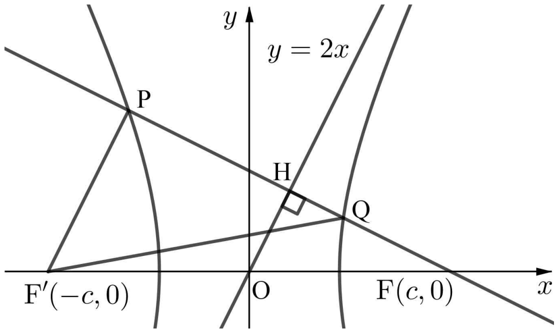
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ (\text{단},\ b^2=c^2-a^2,\ a>0)$$

이 경우 $\overline{\mathrm{BC}}=4a$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=8a$이다.
$\overline{\mathrm{AQ}}$가 최소가 되는 경우를 생각하므로 $\mathrm{Q}=(-a,\ 0)$로 하고 문제를 생각한다.
$2(\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{AB}})=\overline{\mathrm{BC}}$로부터 $\overline{\mathrm{PB}}=10a$, $2(\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{PC}})=\overline{\mathrm{BC}}$로부터 $\overline{\mathrm{PC}}=6a$가 되어
$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 성립하여 점 C가 선분 PB 위에 있음을 알 수 있는데,
선분 BC의 중점과 점 A, P는 직각삼각형을 이루므로 $\overline{\mathrm{PA}}=2a\sqrt{31}$ 임을 알 수 있다.
한편, 두 초점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PA}}=2c$ 이므로, $c=a\sqrt{31}$ 이다.
따라서, $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{a+c}{4a}=\dfrac{a+a\sqrt{31}}{4a}=\dfrac{1+\sqrt{31}}{4}$ 이다.

김진성

16번 문항 해설

[1]



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\,b>0)$이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=2x$이므로 $\dfrac{b}{a}=2$ 즉, $b=2a$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=5a^2$ … ⅰ)

삼각형 HOF에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$라 두면 $\tan(\angle\mathrm{HOF})=2$이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=2t$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+(2t)^2=5t^2$

ⅰ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a$, $\overline{\mathrm{HF}}=2a$

삼각형 HOF와 삼각형 PF′F는 닮음이고 닮음비가 $1:2$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이다.

따라서 쌍곡선의 정의에 의해서

$$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}\quad \text{즉,}\quad \overline{\mathrm{QF'}}=\frac{4}{3}+4a-2a=\frac{4}{3}+2a$$

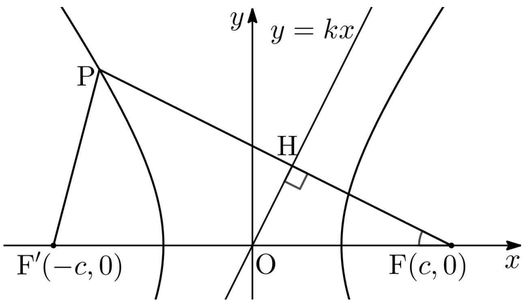
삼각형 PF′Q는 직각삼각형이므로

$$\left(\frac{4}{3}+2a\right)^2=(2a)^2+\left(4a-\frac{4}{3}\right)^2$$

$a^2=a$ 따라서 $a=1\,(a>0)$

그러므로 ⅰ)에 의해서 $c^2=5a^2=5$가 되어 $c=\sqrt{5}$이다.

[2]



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\, b>0)$이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=kx$이므로 $k=\frac{b}{a}$ 즉, $b=ak$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=a^2(1+k^2)$ … ⅱ)

원점을 O, $\angle$PFF′을 α라 하자.

삼각형 HOF에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$라 두면 $\tan(\angle \mathrm{HOF})=k$이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=tk$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+t^2k^2=t^2(1+k^2)$

ⅱ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a$, $\overline{\mathrm{HF}}=ak$이고

$$\cos\alpha=\frac{ak}{c} \quad \cdots \text{ iii)}$$

삼각형 PFF′에서 $\overline{\mathrm{PF}}=p$이면 $\overline{\mathrm{PF'}}=p-2a$이고

$$\cos\alpha=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times 2c\times p} \quad \cdots \text{ iv)}$$

ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서

$$\frac{ak}{c}=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times 2c\times p}$$

$$kp=a(1+k^2)+p-a,\ (k-1)p=ak^2$$

김진성

따라서 $p=\frac{ak^2}{k-1}$

$$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PH}}=\frac{ak^2}{k-1}:\frac{ak^2}{k-1}-ak=ak^2:ak=k:1$$

이므로 점 P는 선분 FH를 $k:1$로 외분하는 점이다.

17번 문항 해설

[1]

식 $y=x+k$를 $x^2+3y^2=3$에 대입하면 $x^2+3(x+k)^2=3$이고,

$$4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$$

을 얻는다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D가 양수여야 한다.

$$\frac{D}{4}=9k^2-4\times3(k^2-1)=-3k^2+12=3(4-k^2)>0$$

이므로 $4-k^2>0$이다. 따라서 $-2<k<2$이다.

[2]

문항 [1]의 풀이에서 $D=0$일 때 직선 $y=x+k$가 타원 $x^2+3y^2=3$에 접한다. 따라서 $k=\pm2$이고, 이때 이차방정식

$$4x^2+6kx+3(k^2-1)=4x^2\pm12x+9=(2x\pm3)^2=0$$

의 근은 $x=\mp\frac{3}{2}$이다. 이 중 양수인 경우는 $k=-2$일 때 $x=\frac{3}{2}$이며, 이때 $y=x+k=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$이다. 따라서 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다. $-2<k<2$일 때 두 점 Q, R의 x좌표의 차는 이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$의 두 근의 차와 같으며, 이는 근의 공식 혹은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$임을 알 수 있다. 두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기가 1이므로, 선분 QR의 길이는 $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가

$$\frac{\left|\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+k\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 구하는 삼각형 PQR의 넓이는

$$f(k)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}\sqrt{3(4-k^2)}}{2}\times\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3(4-k^2)}\,(2+k)}{\sqrt{2}}$$

이다. (단, $-2<k<2$)

[3]

$-2<k<2$에서 함수 $g(k)$를 $g(k)=\{f(k)\}^2=\frac{3}{16}(4-k^2)(2+k)^2$이라 하고, k에 대하여 미분하면

$$g'(k)=\frac{3}{16}\{-2k(2+k)^2+2(4-k^2)(2+k)\}=\frac{3}{4}(2+k)^2(1-k)$$

이다. $-2<k<1$ 에서 $g'(k)>0$ 이므로 $g(k)$ 가 증가하고, $1<k<2$ 에서 $g'(k)<0$ 이므로 $g(k)$ 가 감소한다. 따라서 $g(k)=\{f(k)\}^2$ 은 $k=1$ 에서 최댓값 $\frac{2(4-1)(2+1)^2}{16}=\frac{81}{16}$ 을 갖는다.

김진성

18번 문항 해설

[1]

직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=-\frac{3}{4}x+8$이다. 이 직선과 주어진 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$의 교점을 구하면 $(0,\ 8)$이다. 따라서 구하는 수선의 발은 $(0,\ 8)$이다.

[2]

[1]의 점 $(4,\ 5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발은 $(0,\ 8)$이고 이 점은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프 위에 있다. 점 $(4,\ 5)$는 점 $(0,\ 8)$과의 거리가 5이고 x축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점 $(0,\ 8)$에서 만나고 x축과 접한다. 따라서 $s=4$일 때 $f(4)=5$이다.

$s>4$일 때 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 접해야 한다. 좌표평면의 평행하지 않은 두 직선에 동시에 접하는 원의 중심은 두 직선의 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$과 $y=0$의 각을 이등분하는 직선 중 제1사분면을 지나는 직선을 구한다. [1]의 점 $(4,\ 5)$가 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$, $y=0$과 같은 거리에 있으므로, 구하려는 직선은 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$과 $y=0$의 교점 $(-6,\ 0)$과 점 $(4,\ 5)$를 지나는 직선이다. 따라서 구하는 직선은 $y=\frac{1}{2}x+3$이고, $f(s)$를 결정하는 원의 중심이 $(s,\ f(s))$이므로 $s>4$일 때 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$이다. $s=4$일 때 $\frac{1}{2}\times4+3=5$이므로 $s\geq4$일 때 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$이다.

[다른 풀이]

[1]의 점 $(4,\ 5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발은 $(0,\ 8)$이고 이 점은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프 위에 있다. 점 $(4,\ 5)$는 점 $(0,\ 8)$과의 거리가 5이고 x축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점 $(0,\ 8)$에서 만나고 x축과 접한다. 따라서 $s=4$일 때 $f(4)=5$이다.

$s>4$ 일 때 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$ 이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$ 에 접해야 한다. 따라서 조건을 성립하는 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$ 의 거리 $\dfrac{\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5}\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|$ 과 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 x 축의 거리 $|f(s)|$ 가 같으므로 $\frac{3}{5}\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|=|f(s)|$ 를 정리하면

$f(s)=\frac{1}{2}s+3\ (s>4)$ 이다. $s=4$ 일 때 $\frac{1}{2}\times 4+3=5$ 이므로 $s\geq 4$ 일 때 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$ 이다.

[3]

좌표평면에서 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$ 이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y=\frac{4}{3}x+8\ (x>0)$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+8\ (x<0)$ 에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0,\ 8)$ 을 지난다.

$-4<s<4$ 이면 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$ 이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,\ 8)$ 을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 점 $(0,\ 8)$ 의 거리 $\sqrt{(s-0)^2+(f(s)-8)^2}$ 과, 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 x 축과의 거리 $|f(s)|$ 가 같다.

$$(|f(s)|)^2=\left(\sqrt{s^2+\{f(s)-8\}^2}\right)^2=s^2+\{f(s)\}^2-16f(s)+64$$

를 정리하면 $-4<s<4$ 에서 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{16}s^2+4$ 이다.

[다른 풀이]

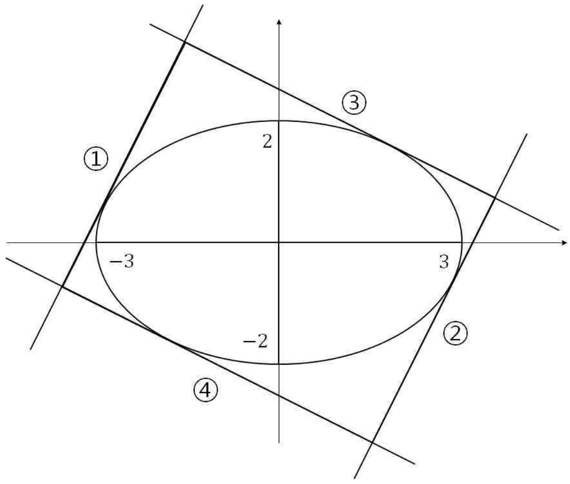
좌표평면에서 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$ 이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y=\frac{4}{3}x+8\ (x>0)$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+8\ (x<0)$ 에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0,\ 8)$ 을 지난다.

$-4<s<4$ 이면 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$ 이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,\ 8)$ 을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 점 $(0,\ 8)$ 의 거리와 원의 중심 $(s,\ f(s))$ 와 x 축과의 거리 $|f(s)|$ 가 같다. 이 조건을 만족하는 점 $(s,\ f(s))$ 는 준선이 x 축이고 초점이 점 $(0,\ 8)$ 인 포물선 위에 있다. 포물선의 정의에 따라 이 포물선은 준선 $y=-4$, 초점 $(0,\ 4)$ 인 포물선 $x^2=16y$ 를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$x^2 = 16(y-4)$, 즉 $y = \frac{1}{16}x^2 + 4$이다. 따라서 $-4 < s < 4$에서 구하는 함수는 $f(s) = \frac{1}{16}s^2 + 4$이다.

김진성

19번 문항 해설



타원을 좌표평면에 두어 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$이라 하자. 직사각형의 한 변을 포함하는 접선의 기울기를 m이라 하자.

먼저 $m=0$이면, 직사각형의 변의 길이는 6 또는 4이고 $2\sqrt{5}$가 아니므로 $m\neq 0$임을 알 수 있다. 기울기 $m(\neq 0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이므로, 직사각형의 네 변은 각각 다음의 접선에 포함된다.

① $y=mx+\sqrt{9m^2+4}$

② $y=mx-\sqrt{9m^2+4}$

③ $y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{9}{m^2}+4}$

④ $y=-\frac{1}{m}x-\sqrt{\frac{9}{m^2}+4}$

직선 ①과 ②사이의 거리를 a라고 하고, 직선 ③과 ④사이의 거리를 b라고 하면,

$$a=2\sqrt{\frac{9m^2+4}{m^2+1}}, \qquad b=2\sqrt{\frac{9+4m^2}{1+m^2}}$$

김진성

이고, a와 b 중 하나가 $2\sqrt{5}$이다.

$a=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm\frac{1}{2}$이고 따라서 $b=4\sqrt{2}$이다.

$b=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm 2$이고 따라서 $a=4\sqrt{2}$이다.

두 경우 모두 직사각형의 넓이는 $ab=8\sqrt{10}$이다.

(다른 풀이)

타원과 직사각형이 원점에 대칭이므로

(i) 원점에서 직선 ①, ②까지의 거리가 $\sqrt{5}$인 경우

$$\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}\ ,\ m^2=\frac{1}{4}$$

이므로 원점에서 직선 ③, ④까지의 거리는 $\frac{\sqrt{9+4m^2}}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=2\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 직사각형의 넓이는 $4\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}=8\sqrt{10}$ 이다.
(ⅱ) 원점에서 직선 ③, ④까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 경우는 (ⅰ)과 같은 방법으로 하면 $m^2=4$ 이고 구하는 직사각형의 넓이는 $8\sqrt{10}$ 이다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 직사각형의 넓이는 $8\sqrt{10}$ 이다.

김진성

20번 문항 해설

[1] 주어진 쌍곡선을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$로 표현하면 $a^2=\dfrac{5}{2}$, $b^2=\dfrac{27}{2}$ 이다.

따라서 초점 F의 x좌표를 양수 c라 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$이다.

또한 $p=\overline{\mathrm{AF}}$, $q=\overline{\mathrm{AF'}}$라 하면, 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙에 의하여

$$q-p=2a=\sqrt{10}, \qquad \cos(\angle \mathrm{F'AF})=\frac{7}{25}=\frac{p^2+q^2-8^2}{2pq}$$

즉, $q=p+\sqrt{10}$ 이고 $14pq=25(p^2+q^2-64)$이다.

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면

$$14p^2+14\sqrt{10}\,p=25(2p^2+2\sqrt{10}\,p-54)$$

정리하면 $2p^2+2\sqrt{10}\,p-75=0$이다.

그러므로 $p=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$ 이고 $q=\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$ 이다.

점 A의 좌표를 $(x_0,\, y_0)$이라고 하면

$$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\frac{125}{2}=(x_0+4)^2+{y_0}^2, \quad \overline{\mathrm{AF}}^2=\frac{45}{2}=(x_0-4)^2+{y_0}^2$$

이를 연립하여 풀면 $x_0=\dfrac{5}{2}$, $y_0=\dfrac{9}{2}$ 이다. 즉, A의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\, \dfrac{9}{2}\right)$이다.

유사한 방법으로 점 B의 좌표를 구하면 $\left(-\dfrac{5}{2},\, -\dfrac{9}{2}\right)$이다.

[2] 점 P의 좌표를 $(t,\, s)$라 하면 접선의 기울기는 $-\dfrac{b^2t}{a^2s}$ 이고, 접선의 방정식은

$y-s=-\dfrac{b^2t}{a^2s}(x-t)$이다. 이를 정리하면 $b^2tx+a^2sy=b^2t^2+a^2s^2$이다.

$\dfrac{t^2}{a^2}+\dfrac{s^2}{b^2}=1$이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$b^2tx+a^2sy-a^2b^2=0$$

따라서 $f(t)=\left(\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{b^4t^2+a^4s^2}}\right)^2$ 이다.

$s^2=\dfrac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}$ 이므로

$$f(t)=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4\times\dfrac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}}=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4b^2-a^2b^2t^2}$$

$$=\frac{a^4b^4}{a^4b^2+b^2(b^2-a^2)t^2}=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$$

이다. $a^2-b^2=c^2\,(b<a)$중 양수인 c를 선택하면

$$f(t)=\frac{a^4b^2}{a^4-c^2t^2}=\frac{a^4b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{a^2-ct}+\frac{1}{a^2+ct}\right)$$

이다.

$\displaystyle\int\frac{1}{a^2+ct}dt=\frac{1}{c}\ln(a^2+ct)+C_1$, $\displaystyle\int\frac{1}{a^2-ct}dt=-\frac{1}{c}\ln(a^2-ct)+C_2$ (C_1, C_2는 상수)이므로

$$\int_0^a f(t)\,dt=\frac{a^4b^2}{2a^2}\cdot\frac{1}{c}\Big[\ln(a^2+ct)-\ln(a^2-ct)\Big]_0^a=\frac{a^4b^2}{2a^2c}\ln\frac{a^2+ca}{a^2-ca}\quad\cdots\cdots\ (\mathrm{A})$$

$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 이면 $b^2=\dfrac{3}{4}a^2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{a}{2}$ 이다.

따라서 $(\mathrm{A})=\dfrac{a^2\cdot\frac{3}{4}a^2}{2\cdot\frac{a}{2}}\ln\dfrac{a^2+\frac{a^2}{2}}{a^2-\frac{a^2}{2}}=\dfrac{3}{4}a^3\ln3$ 이므로 $\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt=\dfrac{3}{4}\ln3$ 이다.

(다른 풀이)

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$라 하자.

점 P에서의 접선 l은

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1,\ (b\cos\theta)x+(a\sin\theta)y-ab=0$$

이다. $b^2=\dfrac{3}{4}a^2$ 이고, $\cos^2\theta=\dfrac{t^2}{a^2}$ 에서 $\sin^2\theta=\dfrac{a^2-t^2}{a^2}$ 이므로 구하는 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^4}{\frac{3}{4}a^2\times\frac{t^2}{a^2}+a^2\times\frac{a^2-t^2}{a^2}}=\frac{3a^4}{4a^2-t^2}$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)\,dt=3a\int_0^a\frac{1}{(2a-t)(2a+t)}\,dt=\frac{3}{4}\int_0^a\left\{\frac{1}{t+2a}-\frac{1}{t-2a}\right\}dt$$

$$=\frac{3}{4}\left[\ln\left|\frac{t+2a}{t-2a}\right|\right]_0^a=\frac{3}{4}\ln3$$

[3] 문제 2번에서 선택한 양수 c를 사용하여 초점 F_1, F_2의 좌표를

$$\mathrm{F}_1(c,\ 0)=\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F}_2(-c,\ 0)=\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$$

이라고 하자.

점 P의 좌표를 $(t,\ s)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PF}_1}^2=(c-t)^2+s^2=c^2-2ct+t^2+\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}$$
$$=\frac{a^2c^2-2cta^2+a^2t^2+a^2b^2-b^2t^2}{a^2}=\frac{a^2(b^2+c^2)+t^2(a^2-b^2)-2cta^2}{a^2}$$
$$=\frac{a^4+t^2c^2-2cta^2}{a^2}=\frac{(a^2-tc)^2}{a^2}$$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{PF}_2}^2=\dfrac{(a^2+tc)^2}{a^2}$이다.

따라서 $h(t)=\dfrac{a^4-t^2c^2}{a^2}$이다. 2번에 의해 $f(t)=\dfrac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$이다.

$$\therefore f(t)h(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\times\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}=a^2b^2$$

김진성

(다른 풀이)

타원 위의 점 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$와 점 $\mathrm{F}_1(c,\ 0)$, $\mathrm{F}_2(-c,\ 0)$에 대해

$$h(t)=\overline{\mathrm{PF}_1}\times\overline{\mathrm{PF}_2}=\sqrt{(a\cos\theta-c)^2+b^2\sin^2\theta}\times\sqrt{(a\cos\theta+c)^2+b^2\sin^2\theta}$$

이고

$$(a\cos\theta\pm c)^2+b^2\sin^2\theta=a^2\cos^2\theta\pm 2ac\cos\theta+c^2+(a^2-c^2)\sin^2\theta$$
$$=a^2\pm 2ac\cos\theta+c^2\cos^2\theta$$
$$=(a\pm c\cos\theta)^2\ (\text{단, 복부호동순})$$

이므로

$$h(t)=(a+c\cos\theta)(a-c\cos\theta)=a^2-c^2\cos^2\theta=\frac{a^4-c^2t^2}{a^2}\ (\text{단, } t=a\cos\theta)$$

이다.

따라서 $f(t)h(t)=\dfrac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\times\dfrac{a^4-c^2t^2}{a^2}=a^2b^2$ 이다.

21번 문항 해설

원 C의 방정식 $\left(x-\dfrac{k^2}{4}\right)^2+(y-k)^2=\left(\dfrac{k^2}{4}+1\right)^2$ 에 $x=\dfrac{y^2}{4}$ 를 대입하여 정리하면

$$y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)=0$$
$$r(y)=y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)$$

이라고 하자. 함수 $r(y)$의 도함수를 구하면

$$r'(y)=4y^3+4(8-k^2)y-32k=4(y-k)(y^2+ky+8) \quad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$

k의 값에 따른 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수는 다음과 같다.

경우 1) $0\le k<4\sqrt{2}$

열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $y^2+ky+8>0$이다. 따라서 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$-(k^2+4)^2<0$	$\nearrow$

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 2) $k=4\sqrt{2}$

$r'(y)=4(y-4\sqrt{2})(y+2\sqrt{2})^2$이므로 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	$-2\sqrt{2}\left(=-\dfrac{k}{2}\right)$	$\cdots$	$4\sqrt{2}(=k)$	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$r(-2\sqrt{2})>r(0)=240$	$\searrow$	$-1296<0$	$\nearrow$

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 3) $k>4\sqrt{2}$

㉡으로부터

$$r'(y)=0 \text{ 이면 } y=k,\ \frac{1}{2}\left(-k\pm\sqrt{k^2-32}\right)$$

$c=\dfrac{1}{2}\left(-k-\sqrt{k^2-32}\right)$, $d=\dfrac{1}{2}\left(-k+\sqrt{k^2-32}\right)<0$이라 하고, 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

김진성

y	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$r(c)$	$\nearrow$	$r(d)>r(0)$ $=8(k^2-2)>0$	$\searrow$	$-(k^2+4)^2<0$	$\nearrow$

또한 ㉡으로부터

$$c^3=8k-(8-k^2)c,\ c^2+kc+8=0$$

따라서 제시문 <라>를 이용하면

$$\begin{aligned} r(c) &= 8kc-(8-k^2)(kc+8)-32kc+8(k^2-2) \\ &= k(k^2-32)c+16(k^2-5)=-2h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

한편, $r(c)>0$이면, 즉, $h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)<0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $r(c)<0$이면, 즉, $h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)>0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

제시문 <라>에 의하여 $k<5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $k>5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

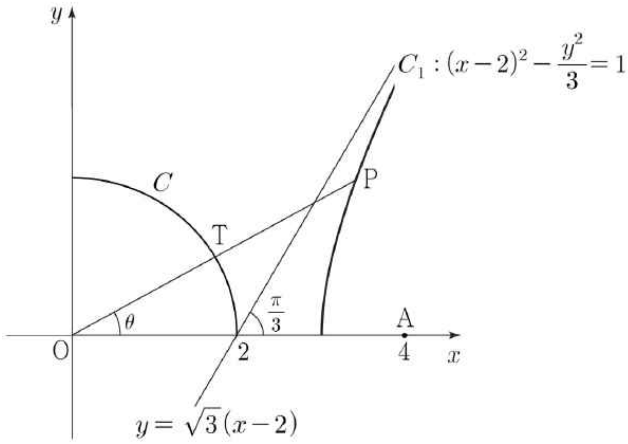
원 C와 포물선 $y^2=4x$의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수와 같으므로, 구하는 양수 k_0는 $5\sqrt{2}$이다.

김진성

22번 문항 해설

대학발표 예시답안

[1] $\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$ (일정)이므로 점 P가 나타내는 곡선 C_1은 두 점 O, A가 초점이고, 거리의 차가 2인 쌍곡선의 일부분이다. 따라서 곡선 C_1의 방정식은 $(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1\ (x \geq 2,\ y \geq 0)$이다. 이때 점근선의 방정식은 $y=\sqrt{3}(x-2)$이고, 곡선 C_1을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



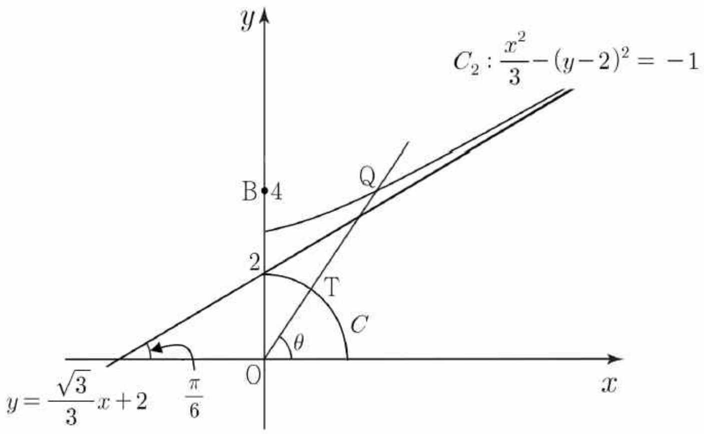
직선 OP의 기울기는 $\sqrt{3}$보다 작고, $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$ (일정)이므로 점 Q가 나타내는 곡선 C_2는 두 점 O, B가 초점이고, 거리의 차가 2인 쌍곡선의 일부분이다.

따라서 곡선 C_2의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}-(y-2)^2=-1\ (x \geq 0,\ y \geq 2)$이다.

이때 점근선의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$이고, 곡선 C_2를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



직선 OQ의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 크고, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\frac{\pi}{6}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 b의 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$이다.

[2] 두 곡선 C_1, C_2는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 C_1, C_2의 교점 R은 곡선 C_1 : $(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 $(x-2)^2-\frac{x^2}{3}=1$, $2x^2-12x+9=0$, $x=3+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 이므로 $\mathrm{R}\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$이다. 또한, C_1 : $(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$를 x에 대하여 미분하면

$$2(x-2)-\frac{2}{3}y\times\frac{dy}{dx}=0$$

이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{3(x-2)}{y}$이다. 따라서 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$$

김진성

이다.

한편 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_1, 곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_2라 하면 $\alpha=|\alpha_1-\alpha_2|$와 같다.

곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선과 곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$이다. 따라서

$$\tan\alpha_1=2\sqrt{2}-1\text{이고, }\tan\alpha_2=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)=\cot\alpha_1=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

이므로 $\tan\alpha=\tan|\alpha_1-\alpha_2|=\frac{2\sqrt{2}-1-\frac{2\sqrt{2}+1}{7}}{1+1}=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$이다.

23번 문항 해설

포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ 1)$이다. 점 P를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)(t>0)$라 하자.

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$, $\overline{\mathrm{FP}}=1+\frac{1}{4}t^2$이므로,

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{FP}}}=\frac{t}{1+\frac{1}{4}t^2}=\frac{4t}{4+t^2},\quad \cos\theta=\frac{4-t^2}{4+t^2}$$

이다. 이 식을 t에 관하여 풀면 $t=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$이고 $\frac{dt}{d\theta}=\frac{2}{1+\cos\theta}$이다.

합성함수의 미분법에 의해 $\frac{dS}{d\theta}=\frac{dS}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}$이다. $S(\theta)$를 t에 관한 식으로 나타내면

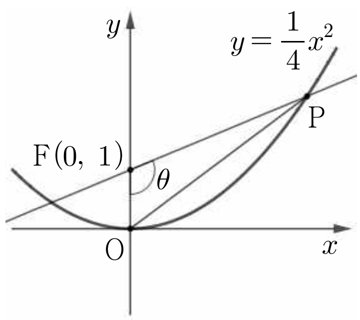
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}t^2\right)t-\int_0^t\frac{1}{4}x^2\,dx=\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{2}t$$

이므로 $\frac{dS}{dt}=\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}$이다.

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{dt}{d\theta}=\frac{4}{3}$, $\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}$이므로 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$

이다.

김진성



[나침반 풀이]

포물선의 초점 $\mathrm{F}(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\left\{\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}x+1=-(\cot\theta)x+1$$

이다. 이 직선과 $y=\frac{1}{4}x^2$이 만나는 교점 P의 x좌표는 방정식

$\frac{1}{4}x^2=-(\cot\theta)x+1$의 해이므로

$$x=-2\cot\theta+2\csc\theta=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\ (\because \text{점 P는 제1사분면에 있는 점})$$

$x=-2\cot\theta+2\csc\theta=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$ (∵점 P는 제1사분면에 있는 점)

이다.

한편, $\int_\alpha^\beta|a(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$임을 이용하여 $y=\frac{1}{4}x^2$과 $\overline{\mathrm{OP}}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3$이고, $\triangle\mathrm{OPF}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$이므로

$$S'(\theta)=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)'+\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)'=\left\{\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+1\right\}\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$

이다. 그러므로 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left\{\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right\}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}$ 이다.

김진성

24번 문항 해설

[1]

타원의 중심은 $\left(2p,\ \frac{q}{2}\right)$이다. 단축의 길이가 6이고, 타원이 x축에 접하므로 $q=6$이다. $(2p,\ 0)$은 타원 위의 점이므로 $p=1$이다. 따라서 $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$이다. 그러므로 초점의 좌표는 $(2+3\sqrt{3},\ 3)$, $(2-3\sqrt{3},\ 3)$이다.

[3]

(1) 타원과 직선 $l_1 : y=mx$의 교점을 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$이라 하자. $m=\frac{y_0}{x_0}$이고, 점 P에서의 접선 l_2의 기울기 $f(m)=-\frac{x_0}{4y_0}=-\frac{1}{4m}$이다. 따라서 $mf(m)=-\frac{1}{4}$

(2) 직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 할 때, $m=\tan\alpha$, $f(m)=\tan\beta$이다.

$\beta-\alpha=\pi-\theta(m)$ 이므로 $\tan(\theta(m))=\tan(\pi(\beta-\alpha))=\frac{m+\frac{1}{4m}}{\frac{3}{4}}=\frac{4m^2+1}{3m}$이다.

$\tan(\theta(m))$은 $m=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 가지므로 $\tan(\theta(m))\geq tan\left(\theta\left(\frac{1}{2}\right)\right)$이다. 탄젠트함수는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가함수이므로 $\theta(m)\geq\theta\left(\frac{1}{2}\right)$이다. 따라서 $\theta(m)$의 최솟값은 $m=\frac{1}{2}$일 때이다.

25번 문항 해설

[1] 대학발표 예시답안

점 A의 좌표를 $(x_1,\, y_1)$이라 하면, $\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$이고 접선 l의 방정식은 $x_1x+4y_1y-4=0$이다. 원점과 접선 l 사이의 거리는 $d=\dfrac{4}{\sqrt{{x_1}^2+16{y_1}^2}}$이고, 따라서 원의 넓이는 $\pi d^2=\dfrac{16\pi}{{x_1}^2+16{y_1}^2}$이다. 이 원의 넓이가 2π이므로 ${x_1}^2+16{y_1}^2=8$이다. 연립방정식 $\begin{cases} {x_1}^2+16{y_1}^2=8 \\ {x_1}^2+\ 4{y_1}^2=4 \end{cases}$ 을 풀면 $x_1>0$, $y_1>0$이므로 $x_1=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 따라서 A의 좌표는 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이다.

[2] 대학발표 예시답안

넓이는 $S(x)=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BA}'}\times\overline{\mathrm{AA}'}=\dfrac{1}{2}(x+a)y=\dfrac{b}{2a}(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ 이므로, 입체의 부피는

$$V=\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} S(x)\,dx=\frac{b}{2a}\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\frac{b}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

이다.

$\mathrm{I}=\dfrac{b}{2a}\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$는 $t=a^2-x^2$이라 치환하면

$\mathrm{I}=\dfrac{b}{4a}\displaystyle\int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2}\sqrt{t}\,dt=\dfrac{(4-\sqrt{2})a^2b}{24}$ 이고, $\mathrm{II}=\dfrac{b}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 를 반지름 a, 중심각 $\dfrac{\pi}{4}$인 부채꼴과 두 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$인 직각이등변삼각형으로 나누어 계산하면, $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\dfrac{\pi a^2}{8}+\dfrac{a^2}{4}$ 이고, $\mathrm{II}=\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{a^2b}{2}$ 이다. 따라서 입체도형의 부피는 $V=\left(\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{7}{24}-\dfrac{\sqrt{2}}{24}\right)a^2b$이다.

[3]

접선 l의 방정식은 $\frac{x\cos t}{a}+\frac{y\sin t}{b}=1$이므로 점 C와 D의 좌표는 각각 $\left(\frac{a}{\cos t},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{b}{\sin t}\right)$이고 $\overline{CD}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}+\frac{b^2}{\sin^2 t}}$ 이다. 함수 $y=\sqrt{x}$가 증가함수이므로, $\overline{CD}^2$이 최소일 때, $\overline{CD}$가 최소이다. $u=\sin^2 t$로 치환하면 $0<u<1$이고,

$f(u)=\overline{CD}^2=\frac{a^2}{(1-u)}+\frac{b^2}{u}$ 이다.

$$f'(u)=\frac{a^2}{(1-u)^2}-\frac{b^2}{u^2}=\left(\frac{a}{1-u}-\frac{b}{u}\right)\left(\frac{a}{1-u}+\frac{b}{u}\right)=\frac{\{(a+b)u-b\}\{(a-b)u+b\}}{(1-u)^2u^2}$$

이므로, $f'\left(\frac{b}{a+b}\right)=0$이고 $u=\frac{b}{a+b}$의 좌우에서 $f'(u)$의 부호가 음에서 양으로 변한다. 따라서 $f(u)$는 $u=\frac{b}{a+b}$에서 극솟값을 갖고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 감소하다가 증가하므로, $f(u)$는 $u=\frac{b}{a+b}$에서 최솟값을 갖는다. 이때 $\sin t=\sqrt{\frac{b}{a+b}}$ 이다.

[4]

(1) 접선 l의 기울기는 $-\frac{b}{a}\cot t$이므로 직선 l'의 기울기는 $\frac{a}{b}\tan t$이다. 선분 OA와 x축 사이의 예각을 θ_1, 직선 l'과 x축 사이의 예각을 θ_2라 하면 $\tan\theta_1=\frac{b}{a}\tan t$이고 $\tan\theta_2=\frac{a}{b}\tan t$이다. $\theta=\theta_2-\theta_1$이므로,

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\frac{\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{a^2-b^2}{ab}\sin t\cos t$$

이다. 따라서 $f(t)=\frac{a^2-b^2}{ab}\sin t\cos t$이다. 적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=\frac{a^2-b^2}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$에서 $u=\sin t$로 치환하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\int_0^1 u\,du=\frac{1}{2}$이므로, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=\frac{a^2-b^2}{2ab}$ 이다.

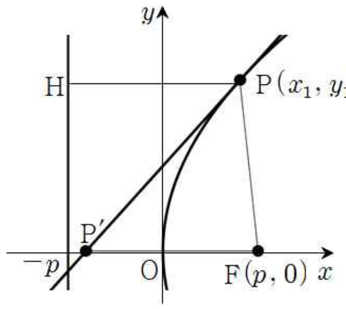
(2) $\cos t=\frac{x}{a}$, $\sin t=\frac{y}{b}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ 이므로 $\tan\theta=g(x)=\frac{a^2-b^2}{a^3b}x\sqrt{a^2-x^2}$ 이다.

$\int_0^a g(x)\,dx=\frac{a^2-b^2}{a^3b}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$에서 $u=a^2-x^2$으로 치환하면,

$\int_0^a g(x)\,dx=\frac{a^2-b^2}{2a^3b}\int_0^{a^2}\sqrt{u}\,dx=\frac{a^2-b^2}{3b}$이다.

26번 문항 해설

[1]



점 P에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해서
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=x_1+p$

이다. 또한, 포물선 $y^2=4px$을 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4p$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$가 되어

[제시문 (다)]에 의해서 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y_1}$이고 [제시문 (가)]에 의해서 P$(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1$이다.

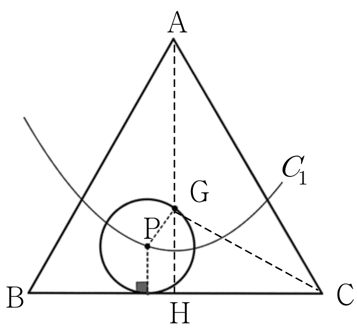
따라서 점 P′의 x좌표가 $-x_1$이므로

$$\overline{\mathrm{FP'}}=x_1+p$$

이다. 그러므로 삼각형 FPP′는 $\overline{\mathrm{FP'}}=\overline{\mathrm{FP}}$인 이등변삼각형이다.

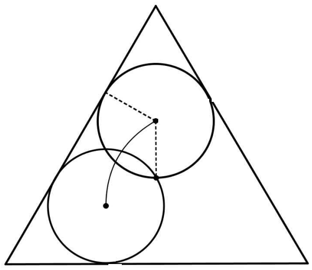
[2]

점 P가 나타내는 도형은 [그림1]과 같이 점 G와 선분 BC로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임(포물선)의 일부와 같다.

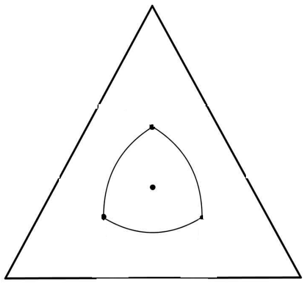


[그림1]

원 C의 모든 점이 삼각형의 변 또는 내부에 있기 위해서는 [그림2]와 같이 포물선이 각 중선과 만나는 두 점 사이를 점 P가 움직여야 한다. 즉, 점 P가 나타내는 도형은 [그림3]과 같다.

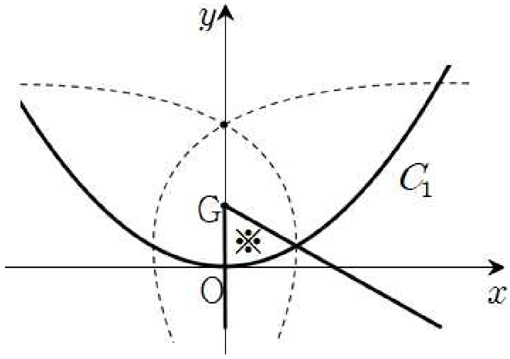


[그림2]



[그림3]

따라서 구하는 도형의 넓이는



직선 GH, 직선 GC, 포물선 C_1으로 둘러싸인 도형(※)의 넓이의 6배와 같다.

$$\overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8\sqrt{3}=4$$

이므로 점 G를 $(0, 2)$, 점 H를 $(0, -2)$, 점 C를 $(4\sqrt{3}, -2)$라 두고 주어진 도형을 좌표평면 위에 그리면

곡선 C_1은 초점이 $\mathrm{G}(0, 2)$이고, 준선이 $y=-2$인 포물선이 되어

곡선 C_1의 방정식은 $x^2=8y$ 즉, $y=\frac{1}{8}x^2$이 된다.

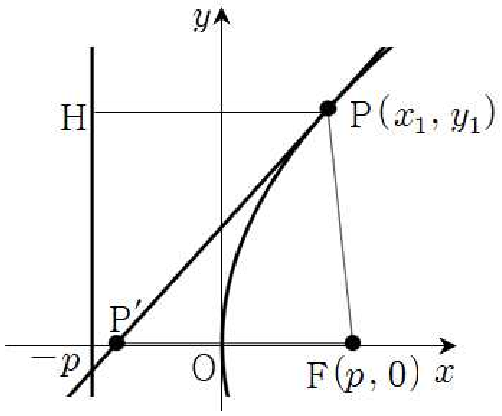
(※)의 넓이는 곡선 $y=\frac{1}{8}x^2$, $x=0$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2\ (x\geq 0)$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

두 곡선 $y=\frac{1}{8}x^2$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2\ (x\geq 0)$는 점 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$에서 만나므로

(※)의 넓이$=\int_0^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2-\frac{1}{8}x^2\right)dx=\frac{40\sqrt{3}}{27}$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 $6\times\frac{40\sqrt{3}}{27}=\frac{80\sqrt{3}}{9}$이다.

[3]



문제 [1]의 삼각형 FPP′에서 $\overline{FP'} = \overline{FP}$이므로 $\angle FP'P = \angle FPP'$이다.
또한, $\overline{PH} \,//\, \overline{FP'}$이므로 $\angle FP'P = \angle HPP'$ (엇각)이다.
그러므로 $\angle HPP' = \angle FPP'$이다. 즉, 포물선 위의 점 P에서의 접선은 $\angle FPH$를 이등분한다.

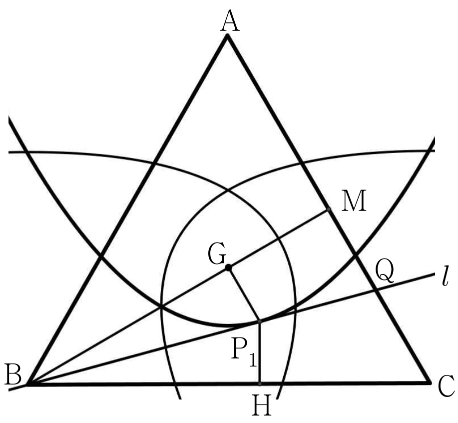
1) 점 P가 나타내는 도형과 직선 l의 접점을 P_1이라 하면 $\angle GP_1B = \angle HP_1B$

2) 포물선의 정의에 의해서 $\overline{GP_1} = \overline{HP_1}$

김진성

3) $\overline{BP_1}$은 공통이므로 두 삼각형 P_1GB, P_1HB는 합동이다.

따라서 $\overline{AC}$의 중점 M에 대하여 직선 l은 $\angle MBC$의 이등분선이므로
$\overline{BC} = 8\sqrt{3}$, $\overline{BM} = 12$에 대하여



$$\overline{BC} : \overline{BM} = 8\sqrt{3} : 12 = \overline{CQ} : \overline{QM}$$

이 성립한다, 즉 $\overline{QM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{CQ}$,

그러므로 $\overline{CM} = 4\sqrt{3} = \overline{CQ} + \overline{QM}$에 대하여 $\overline{CQ} = \overline{CM} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 16\sqrt{3} - 24$이다.

27번 문항 해설

[1]

$\dfrac{2x}{9}+\left(\dfrac{2y}{4}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\left(-\dfrac{2x}{9}\right)\left(\dfrac{4}{2y}\right)=-\dfrac{4x}{9y}$ 이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{4x_1}{9y_1}(x-x_1) \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이다. 이 직선이 $\mathrm{P}(0,\,t)$를 지나므로

$$t-y_1=-\frac{4x_1}{9y_1}(0-x_1),$$

$$t=\frac{4{x_1}^2+9{y_1}^2}{9y_1}=\frac{36}{9y_1}=\frac{4}{y_1},$$

$$y_1=\frac{4}{t}$$

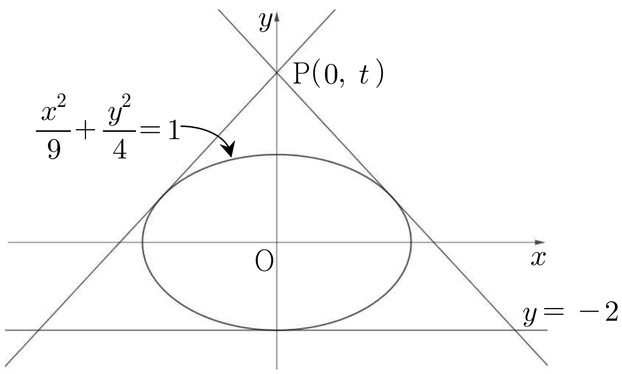
이것을 $\dfrac{{x_1}^2}{9}+\dfrac{{y_1}^2}{4}=1$에 대입하여 x_1을 구하면

$$x_1=\pm\frac{3\sqrt{t^2-4}}{t}$$

이다. 이때 구한 x_1과 y_1을 (*)에 대입하면 두 접선의 방정식은 각각

$$y=\frac{\sqrt{t^2-4}}{3}x+t,\ \ y=-\frac{\sqrt{t^2-4}}{3}x+t$$

이 된다.



28번 문항 해설

[1] 음함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\frac{dy}{dx}=0$$

이다. 즉 $y\neq 0$일 때

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$$

를 얻는다. 따라서 $\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나는 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

2. 포물선 $x=y^2$ 위의 점을 (a,b)라고 하자. 그러면 $a=b^2$이 성립한다. 원점이 아닌 점에서의 포물선에 접하는 접선의 기울기를 구하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$이므로 원점이 아닌 점 (a,b)를 지나고 포물선 $x=y^2$에 접하는 직선의 방정식은

김진성

$$y=\frac{1}{2b}(x-a)+b$$

가 된다. 평면 위의 점 $(-3,1)$이 이 직선 위에 있다고 하면 $1=\frac{1}{2b}(-3-a)+b$, 즉, $2b=-3-a+2b^2$을 만족하는데, 앞서 포물선 위의 점은 $a=b^2$을 만족하므로, $2b=-3-b^2+2b^2$이 성립한다. 따라서 $b^2-2b-3=0$을 풀면 $b=3$ 또는 $b=-1$을 만족하고, 이에 대응하는 a는 $a=9$ 또는 $a=1$이다. 따라서 포물선 $x=y^2$에 접하고 점 $(-3,1)$을 지나는 직선은 점 $(9,3)$에서 접하는 $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$과 점 $(1,\ -1)$에서 접하는 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다.

두 직선이 x축과 이루는 각을 각각 α와 β라고 하자. (단, $0<\alpha,\beta\leq\frac{\pi}{2}$로 잡는다.) 이때, $\tan\alpha=\frac{1}{6}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$이다. 이를 이용하면

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}},\ \cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}},\ \sin\beta=\frac{1}{5},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

를 얻을 수 있고,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{\sqrt{185}}-\frac{1}{\sqrt{185}}=\frac{11}{\sqrt{185}}$$

를 얻는다. 이때 $\cos(\alpha+\beta)$가 양수이므로 $0\le\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}$임을 확인할 수 있다. 따라서

$\theta=\alpha+\beta$가 되고, $\cos\theta=\frac{11}{\sqrt{185}}$이다.

(다른 풀이)

[2] 포물선 $x=y^2$ 위의 점을 (a, b)라고 하자. 그러면 $a=b^2$이 성립한다. 원점이 아닌 점에서의 포물선에 접하는 접선의 기울기를 구하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$이므로 원점이 아닌 점 (a, b)를 지나고 포물선 $x=y^2$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2b}(x-a)+b$$

가 된다. 평면 위의 점 $(-3, 1)$이 이 직선 위에 있다고 하면 $1=\frac{1}{2b}(-3-a)+b$, 즉, $2b=-3-a+2b^2$이고, $a=b^2$이므로, $2b=-3-b^2+2b^2$이 성립한다. 따라서 $b^2-2b-3=0$을 풀면 $b=3$ 또는 $b=-1$이고 포물선 $x=y^2$에 접하고 점 $(-3, 1)$을 지나는 두 직선의 기울기는 $b=3$일 때 $\frac{1}{6}$, $b=-1$일 때 $-\frac{1}{2}$이다. 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{6},\ \tan\beta=-\frac{1}{2}$$

이다. 따라서

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{8}{11}$$

이고 $\cos\theta=\frac{11}{\sqrt{11^2+8^2}}=\frac{11}{\sqrt{185}}$이다.

3. 초점 C$(1,0)$을 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-1)$이다. 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 점 A와 점 B의 y좌표값을 알아야 한다. $x=\frac{y}{m}+1$을 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{4}\left(\frac{y}{m}+1\right)^2+\frac{y^2}{3}=1$이 되고, 정리하면 $\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)y^2+\frac{2}{m}y-3=0$이 된다. 따라서

$$y_1=\frac{-\frac{1}{m}-\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}}=-\frac{3m\left(1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{4m^2+3},$$

$$y_2=\frac{-\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}}=\frac{3m\left(-1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{4m^2+3}$$

를 얻을 수 있다. 삼각형의 넓이는 $S_1=-\frac{3}{2}y_1$, $S_2=\frac{1}{2}y_2$이므로,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{2}\frac{3m\left(1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{4m^2+3}}{\frac{1}{2}\frac{3m\left(-1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{4m^2+3}}=\frac{3\left(1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{-1+2\sqrt{m^2+1}}$$

이다. 따라서 $\lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{m\to 0}\frac{3\left(1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{-1+2\sqrt{m^2+1}}=9$를 얻는다.

(다른 풀이)

[3] 점 C$(1,0)$을 지나고, 기울기가 양수 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-1)$이므로 이것을 타원의 방정식과 연립하면

$$3x^2+4m^2(x-1)^2=12$$
$$(3+4m^2)x^2-8m^2x+4m^2-12=0$$
$$x=\frac{4m^2\pm\sqrt{16m^4-(3+4m^2)(4m^2-12)}}{3+4m^2}=\frac{4m^2\pm 6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}$$

을 얻을 수 있고

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\times 3\times\{-m(x_1-1)\}}{\frac{1}{2}\times 1\times m(x_2-1)}=\frac{-3(x_1-1)}{x_2-1}$$

$$=\frac{-3\left(\frac{4m^2-6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}\right)-1}{\frac{4m^2+6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}-1}=\frac{-3(4m^2-6\sqrt{m^2+1}-3-4m^2)}{4m^2+6\sqrt{m^2+1}-3-4m^2}$$

이므로

$$\lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2}=\frac{18+9}{6-3}=9$$

이다.

김진성

29번 문항 해설

타원 $\dfrac{x^2}{4k}+\dfrac{y^2}{k}=1$과 곡선 $y=f(x)$의 교점이 4개 중 2개의 교점에서 공통인 접선을 가질 때이다. 공통인 접선을 가지는 교점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{1}{t^2-4}\right)$라고 두자. 음함수 미분법에 의하여 타원 $\dfrac{x^2}{4k}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{x}{4y}$이다.

그러므로 제시문 (가)에 의하여 $\left(t^2-4\right)^3=8$, $t^2-4=2$를 얻는다. 따라서 $t=\pm\sqrt{6}$이다. 이 경우 $k=\dfrac{7}{4}$이다. 이 경우, 타원 $x^2+4y^2=7$과 곡선 $y=f(x)$의 접점 이외의 두 교점의 x 좌표는 $x=\pm\sqrt{3}$이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 주어진 영역의 넓이를 구하면 아래와 같다.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{\sqrt{7-x^2}}{2}\right)dx=\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+A$$

김진성

30번 문항 해설

[1]

점 P에서 직선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 x축과의 교점을 G라 하자.

삼각형의 닮음에 의해 $\overline{\mathrm{PG}} : \overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{F'F}} : \overline{\mathrm{QR}}$

즉 $\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}} : 1+\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}} = 2 : \overline{\mathrm{QR}}$가 성립한다.

이를 풀면 $\overline{\mathrm{QR}}=2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}\right)$

[다른 풀이]

$\mathrm{P}\left(a,\ \sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}\right)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$, $\mathrm{F}(1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}$의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}-0}{a+1}(x+1)-0=\frac{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}{a+1}(x+1)$$

이를 $y=-1$과 연립하면 Q의 x좌표는 $-1-\dfrac{a+1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$임을 알 수 있다.

마찬가지로 하면 R의 x좌표는 $1-\dfrac{a-1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$

따라서 $$\overline{\mathrm{QR}}=1-\frac{a-1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}-\left(-1-\frac{a+1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}\right)$$
$$=2+\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$$

[2] (대학발표 예시답안)

$b=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}$ 이므로 [2-ii]에 의해 $\overline{\mathrm{QR}}=2=\dfrac{2}{b}$가 된다.

또한, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PG}}+\overline{\mathrm{GH}}=b+1$이므로 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{QR}}$$
$$=\frac{1}{2}(1+b)\times 2\left(1+\frac{1}{b}\right)$$
$$=2+b+\frac{1}{b}$$

[3]
산술 기하 평균에 의해
$S=2+b+\frac{1}{b}\geq 2+2\sqrt{b\times\frac{1}{b}}=4$ 이 됨을 알 수 있고 우변의 등호는 $b=\frac{1}{b}$ 일 때, 즉 $=1$ 일 때 성립하며 이때 P의 좌표는 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ 가 되어 문제의 조건을 만족한다.

김진성

31번 문항 해설

[1] 음함수의 미분법에서 $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$이므로

점 $\mathrm{P}(x_1,\, y_1)$에서 접선의 기울기는 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고, 법선의 기울기는 $-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$이다.

따라서 점 P에서 법선의 방정식은 $y=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)+y_1$ 이다.

[2] 직선 $\mathrm{PF_1}$의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1+c}$이므로 $\tan\alpha=\dfrac{\frac{b^2x_1}{a^2y_1}-\frac{y_1}{x_1+c}}{1+\frac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1+c)}}=\frac{b^2}{cy_1}$

직선 $\mathrm{PF_2}$의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1-c}$이므로 $\tan\beta=\dfrac{\frac{y_1}{x_1-c}-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1+\frac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1-c)}}=\frac{b^2}{cy_1}$

$\tan\alpha=\tan\beta$이므로 $\alpha=\beta$ 이다.

김진성

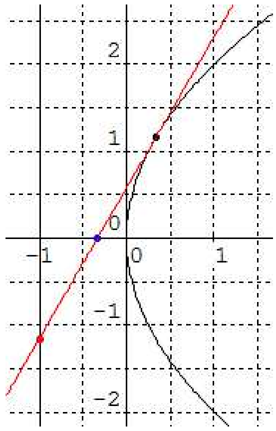
[3] 빛의 성질에 의하여 입사각과 반사각의 크기가 같으므로 반사된 빛은 직선 $\mathrm{PF_1}$이다.

따라서 빛의 경로를 나타내는 직선의 방정식은 $y=\frac{y_1}{x_1+c}(x-x_1)+y_1$ 이다.

[4] 기울기가 m인 쌍곡선의 접선은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이므로 두 접선 사이의 거리는

원점에서 한 접선에 이르는 거리의 두 배이므로 $\frac{2\sqrt{a^2m^2-b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$ 이다.

32번 문항 해설



[1] A(a, b)에서 접선의 방정식은 $by=2(x+a)$이다.

따라서 B$(-a, 0)$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이면 B는 선분 AC의 중점이다.

그러므로 $-a=\dfrac{a-1}{2}$, 즉 $a=\dfrac{1}{3}$

$b^2=4a=\dfrac{4}{3}$, 즉 $b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ A$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

[2] D(a, b)에서 접선의 방정식은

$$by=2(x+a),\ b^2=4a$$

x축과 교점 E의 x좌표는 $x=-a$ 이므로, 초점 F까지의 거리는 $1+a$

한편 $\overline{\mathrm{DF}}^{\,2}=(a-1)^2+b^2=(a-1)^2+4a=(a+1)^2$, $\overline{\mathrm{DF}}=1+a$

따라서 삼각형 DEF 는 $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{DE}}$인 이등변삼각형이므로

구하려는 각의 크기는 86° 이다.

* tan의 덧셈정리를 이용하려면

접선이 x축과 이루는 각의 tan값, 즉 접선의 기울기와

직선 DF 가 x축과 이루는 각의 tan 값을 비교하면 배각임을 바로 확인 할 수 있다.

33번 문항 해설

[1] $A_1(-r, 0)$, $A_2(r, 0)$, $D_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $D_2(r\cos\theta, -r\sin\theta)$ 이므로

$$A_1D_1 : y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(x+r), \qquad A_2D_2 : y = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(x-r)$$

두 직선의 교점이 $P(x, y)$이므로

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(x+r) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(x-r)$$

$$x = r\sec\theta, \ y = r\tan\theta$$

* $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$이므로 $x^2 - y^2 = r^2$ (쌍곡선이다)

[2] [1]에 의하면 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - y^2 = r^2$ 이므로 $F_1(-\sqrt{2}r, 0)$

따라서 직선 PF_1의 기울기는 $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + \sqrt{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$

접선의 기울기는 $2x - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$에서 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

[3] 두 직선 PF_1, PM이 이루는 각의 크기가 α 이므로

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}}{1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}\tan\theta}$$

[4]

(1) 장축의 길이 $2a = \overline{AB} = 20$, 초점에서 $c = 8$이므로 $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$

$\therefore \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

(2) $x = 10\cos\theta$, $y = 6\sin\theta$이므로 $a = 10$, $b = 6$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$이면 $x = 5$, $y = 3\sqrt{3}$이므로 접선은 $\dfrac{1}{20}x + \dfrac{\sqrt{3}}{12}y = 1$

(3) $S(-8, 0)$이므로

$$l(\theta) = \sqrt{(10\cos\theta + 8)^2 + 36\sin^2\theta} = \sqrt{64\cos^2\theta + 160\cos\theta + 100}$$
$$= \sqrt{(8\cos\theta + 10)^2} = |8\cos\theta + 10|$$

$\theta = \pi$, 즉 $E(-10, 0)$일 때 최솟값 2이다.

(4) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$에서 $y=6\sqrt{1-\dfrac{x^2}{100}}$ 이고, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이면 $x=5\sqrt{2}$, $y=3\sqrt{2}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times3\sqrt{3}+\int_{5\sqrt{2}}^{10}6\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}\,dx$$

$x=10\cos\theta$로 치환하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=-10\sin\theta$이므로

$$\int_{5\sqrt{2}}^{10}6\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}\,dx=-60\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^2\theta d\theta=30\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)d\theta$$ (배각 또는 반각의 공식)

$$=30\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{15}{2}\pi-15$$

$$\therefore\ S=15+\frac{15}{2}\pi-15=\frac{15}{2}\pi$$

김진성

34번 문항 해설

포물선의 초점 F$(1,0)$에서 점 G$(2,2\sqrt{2})$에 부딪쳐 진행하는 빛은 제시문 [나]에 의해 x축과 평행하게 진행한다. 따라서, 이 빛이 쌍곡선과 만나는 점 P는 $(3\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$이다.
이 점에서 쌍곡선의 접선 l은 제시문 [다]에 의해

$$\frac{3\sqrt{6}x}{18} - \frac{2\sqrt{2}y}{4} = 1$$

이고, l의 x절편은 $\sqrt{6}$이다.

접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{2}$$

이고, $\tan\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\gamma = \frac{\pi}{6}$이다.

점 P에 반사되기 전 빛의 직진방향은 x축과 평행하고, 이 빛의 방향과 접선 l이 이루는 각 α는 접선 l이 x축과 이루는 각 γ와 엇각 $\frac{\pi}{6}$로 같다.
또한, 각 α는 각 β와 같으므로 이 각 β는 $\frac{\pi}{6}$이다.
그런데, 반사되기 전 빛과 x축이 평행하므로 직선 m과 이루는 각 δ는 각 $\beta + \gamma$와 동위각으로 같다.
따라서, 점 P에 반사된 빛의 직진방향이 x축과 이루는 각 δ는 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$이다.

김진영

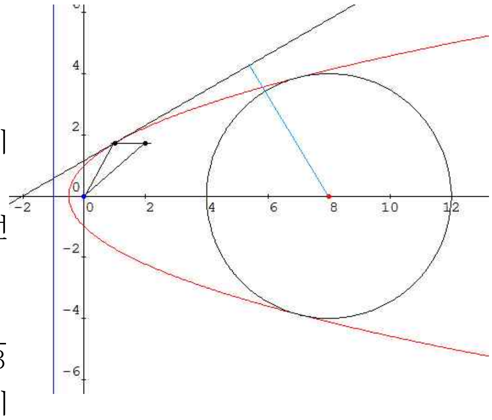
35번 문항 해설

1) 주어진 포물선의 초점이 $F(p,0)$이고 준선이 $x=-p$이므로 제시문 [나]에서와 같이 포물선의 방정식은 $y^2=4px$이다. 포물선 위의 점 $P(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은 제시문 [다]에서 주어진 것과 같이 $y_1y=2p(x+x_1)$이다. 이 접선과 준선 $x=-p$와의 교점을 구하기 위하여 준선의 식을 접선의 식에 대입하면 $y_1y=2p(-p+x_1)$가 되고 따라서 $y=\dfrac{2p(x_1-p)}{y_1}$을 얻는다. 즉 접선과 준선의 교점 Q의 좌표는 $\left(-p,\dfrac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)$이다. 점 $P(x_1,y_1)$는 포물선 위의 점이므로 $y_1^2=4px_1$을 만족하므로 교점 Q의 좌표는 $\left(-p,\dfrac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)=\left(-p,\dfrac{y_1}{2}-\dfrac{2p^2}{y_1}\right)$이다. 점 $P(x_1,y_1)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(-p,y_1)$이므로 점 Q와 점 H사이의 거리는 $\left|\dfrac{y_1}{2}-\left(\dfrac{y_1}{2}-\dfrac{2p^2}{y_1}\right)\right|=\dfrac{|y_1|}{2}+\dfrac{2p^2}{|y_1|}$이다. 또한 포물선의 초점 F와 점 Q사이의 거리의 제곱은 $4p^2+\left(\dfrac{y_1}{2}-\dfrac{2p^2}{y_1}\right)^2=\left(\dfrac{y_1}{2}+\dfrac{2p^2}{y_1}\right)^2$이므로 초점 F와 점 Q사이의 거리는 $\dfrac{|y_1|}{2}+\dfrac{2p^2}{|y_1|}$으로 점 Q와 점 H사이의 거리와 같다.

2) 제시문 [라]에서 주어진 것과 같이 점 Q와 점 H사이 거리는 $|y_1|=2|p|$일 때, $2\sqrt{p^2}=2|p|$를 최솟값으로 가진다. 이때 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}=p$ 이므로 점 Q와 점 H사이 거리가 최솟값을 가질 때의 점 P의 좌표는 $(p,2p)$ 또는 $(p,-2p)$이다.

김진성

36번 문항 해설



포물선 $y^2=2x+1$은 $y^2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$이므로

초점은 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, 준선은 $x=-1$이다.

삼각형 OAP의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$인데.

포물선의 정의에서 초점에 이르는 거리와 준선에 이르는 거리는

같다. 따라서 포물선 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H,

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 B라 하면

$$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{HP}}+\overline{\mathrm{AP}}\ge\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$$

즉, $\mathrm{B}=\mathrm{H}$일 때 삼각형 OAP의 둘레의 길이는 최소이다.

따라서 P는 $(1,\ \sqrt{3})$이다.

한편 P에서 접선의 방정식 l은 $2y\dfrac{dy}{dx}=2$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\sqrt{3},\ \text{즉}\ x-\sqrt{3}y+2=0$$

원 C의 중심 $(t,0)$에서 직선 l에 이르는 거리는 $\dfrac{t+2}{2}$인데,

접선 원 C와 접선 l 사이의 거리의 최솟값이 1이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{t+2}{2}=r+1,\ \text{즉}\ \frac{t}{2}=r$$

원 C의 방정식은 $(x-t)^2+y^2=\dfrac{t^2}{4}$이고, 포물선 $y^2=2x+1$에 접하려면

$$(x-t)^2+(2x+1)=\frac{t^2}{4},\ x^2-2(t-1)x+1+\frac{3}{4}t^2=0$$

$$D/4=(t-1)^2-1-\frac{3}{4}t^2=\frac{1}{4}t^2-2t=0,\ \therefore\ t=8$$

37번 문항 해설

이다. 따라서 $\lim_{q\to\infty}\cos(2\alpha+\beta)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-1}{\dfrac{a^2}{b^2}+1}$ 이고,

$$f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

이다. 그러므로, 구하고자 하는 부정적분은

$$\int tf(t)\,dt=\int t\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int t\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\log(1+t^2)+C$$

이다.

(1) 삼각형 PF′F의 외접원의 중심 A는 점 F와 점 F′에서 부터의 거리가 같아야 하므로, 선분 F′F의 수직이등분선, 즉 y축 위에 있어야 한다. 따라서 $k=0$이고, $\mathrm{A}(0,l)$로 둘 수 있다. 한편, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로,

$$\sqrt{c^2+l^2}=\sqrt{(l-q)^2+p^2}$$

이다. 이를 풀면, $l=\dfrac{p^2+q^2-c^2}{2q}=\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}q^2+a^2+q^2-c^2}{2q}=\dfrac{c^2q^2-b^4}{2b^2q}$가 된다.

따라서, $q>0$이므로, A의 y좌표 l이 양수이기 위한 q의 조건은 $q>\dfrac{b^2}{c}$가 된다.

(2) q가 양의 무한대로 발산하는 극한을 구해야 하므로, 일반성을 잃지 않고, $q>\dfrac{b^2}{c}$인 경우를 생각해도 충분하다. 이때, 원점을 O라 하면, 원주각과 중심각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{FAO}=\beta$, $\angle\mathrm{PAF}=2\alpha$이므로 $\angle\mathrm{PAO}=2\alpha+\beta$가 된다. 따라서, 구하고자 하는 극한은

$$\lim_{y\to\infty}\cos(\angle\mathrm{PAO})$$

이다. 그런데, 점 P의 y좌표와 점 A의 y좌표의 차이를 계산해보면,

$$q-\frac{c^2q^2-b^4}{2b^2q}=\frac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}$$

이다. 따라서, 주어진 조건대로 $a>b>0$이면, $q>\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$일 때 A의 y좌표가 P의 y좌표보다 크다. 따라서, 충분히 큰 q에 대해 $\angle\mathrm{PAO}$는 예각이다. 따라서 이 경우에는

$$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{\text{A의 }y\text{좌표}-\text{P의 }y\text{좌표}}{\overline{\mathrm{AP}}}$$

이므로,

$$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{(a^2-b^2)q^2-b^4}{2b^2q}}{\sqrt{p^2+\left(\dfrac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}\right)^2}}=\frac{\dfrac{(a^2-b^2)q^2-b^4}{2b^2q}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}q^2+a^2+\left(\dfrac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}\right)^2}}$$

김진성