2025학년도 6월 SEL:ON 모의고사

정답 및 해설

SEOL:NAME

정 답 표

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
1	④	2	9	①	4	17	5	3
2	②	2	10	③	4	18	60	3
3	①	3	11	⑤	4	19	150	3
4	⑤	3	12	①	4	20	55	4
5	③	3	13	②	4	21	16	4
6	⑤	3	14	②	4	22	256	4
7	⑤	3	15	④	4			
8	④	3	16	12	3			

출제 및 검토

이경민 서울대 수학교육과 23
윤석민 서울대 수학교육과 23
김시현 서울대 수학교육과 24

검토에 도움을 주신
팔차선 무단횡단, 치이카와 한입컷, OOO
님께 다시금 감사드립니다.

등급컷 (참조로만 활용)

[1등급] -12점 **[2등급]** -21점 **[3등급]** -30점

대표 문항

〈 검토진이 뽑은 BEST 문항 〉

12, 13, 15, 21, 22

〈 맞혔더라도 해설을 꼭 봐야 하는 문항 〉

7, 13, 14, 20, 22

※ 모든 문항의 해설에서 중요한 부분, 강조할 부분은 **진한 글씨**로 표시하였습니다. 해설 보실 때 참조하시기 바랍니다.

공통과목 해설

1 정답 ④

$$\frac{\log_3 5\times\log_5 4}{\log_9 8}=\frac{\log_3 4}{\log_9 8}=\frac{2\log_3 2}{\frac{3}{2}\log_3 2}=\frac{4}{3}$$

2 정답 ②

구하는 값은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{6-0}{2}=3$$

3 정답 ①

$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$ 이므로

$$\cos\theta=-\frac{3}{5},\ \sin\theta=\frac{4}{5}\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

이고, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$이다.

4 정답 ⑤

그림에서 $\lim_{x\to1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to2+}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=2$$

5 정답 ③

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 임에 주목하자.

$$a_2-a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\cdots$$

$$a_7-a_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$

이 식들을 전부 더하면

$$a_7-a_1=1-\frac{1}{7}$$

$$a_7=\frac{20}{7}\ (\because\ a_1=2)$$

6 정답 ⑤

$$f'(1)=(1-2)(1-k),\ f'(2)=(2-1)(2-k)$$

에서 $f'(1)=2f'(2)$이므로

$$-1+k=2(2-k) \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

[2025학년도 6월 6번 변형]

7 정답 ⑤

$x<0$에서 $f(x)\le 2$, $x>0$에서 $f(x)>2$이므로
$x=0$일 때 $f(x)=2$, 곧, $b=2$이다.
$f(x)=x(x^2+px+q)+2$라고 두자. (p, q는 상수)
이때, $x>0$이면 $f(x)>2$이므로 $f(x)=2$를 만족시키는 양수 x는 존재하지 않는다.
따라서 $f(k+2)=2$에서 $k+2\le 0$이므로 $k\le -2$이고,
$f(k)=2$이므로 $f'(k)=0$이다.
곧, $f(x)-2=x(x-k)^2$로 둘 수 있고, 방정식 $f(x)=2$의 해는 $x=k$, $x=0$만 존재함을 알 수 있다.
따라서 $k+2=0$이고, $k=-2$이 된다.
$f(x)=x(x+2)^2+2$이므로

$$f(1)=1\times 3^2+2=11$$
$$k+f(1)=(-2)+11=9$$

[SEOL:NAME 자작]

8 정답 ④

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$2a_6=a_4+2a_9$에서 등차중항의 성질에 의해 $2a_6=a_4+a_8$이므로

$$2a_9=a_8$$

$a_9-a_8=d$이므로 연립하면

$$a_9=-d,\ a_8=-2d$$

곧, $a_4=-6d$이므로 $a_4=(a_8)^2$에서

$$-6d=4d^2$$
$$d=-\frac{3}{2}\quad (\because\ d\ne 0)$$

따라서 $a_6=-4d$, $a_{12}=2d$에서 $a_6+a_{12}=-2d=3$

[2025학년도 6월 8번 변형]

9 정답 ①

함수 $f(x)$는 $x\ne a$에서 항상 연속이다.
따라서 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$를 만족시키려면
$a^2-2a+k=-a^2+4a$이고, 이 방정식을 만족시키는 실수 a의 개수가 1이어야 한다.
방정식을 정리하면

$$2a^2-6a+k=0$$
$$D=(-6)^2-4\times 2\times k=36-8k=0$$

따라서 $k=\frac{9}{2}$

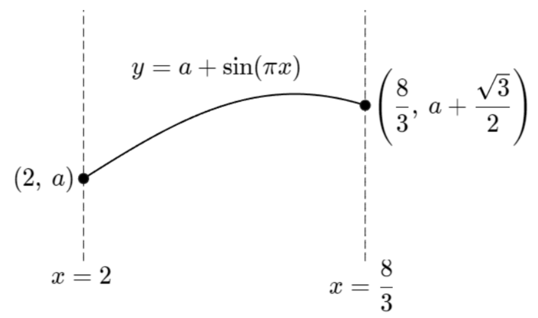
[2025학년도 6월 9번 변형]

10 정답 ③

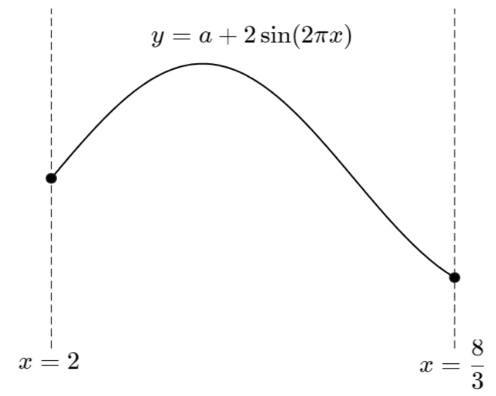
함수 $y=\sin b\pi x$의 주기가 $\frac{2}{b}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f\left(x+\frac{2}{b}\right)$가 성립한다. $2\le x\le\frac{8}{3}$의 구간의 길이가 $\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$이므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(ⅰ) $\frac{2}{b}>\frac{2}{3}$인 경우

$b<3$이므로 가능한 자연수 b의 값은 1 또는 2이다.
$b=1$일 때 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



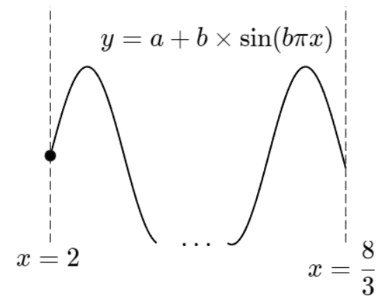
곧, $f(x)$의 최솟값은 $a\,(=2)$이므로 $(a,\ b)=(2,\ 1)$
$b=2$일 때 $f(x)$의 최솟값은 $a+2\times\sin\left(2\pi\times\frac{8}{3}\right)=a-\sqrt{3}$



이때, $a-\sqrt{3}=2$이므로 a가 자연수가 아니게 되어 모순

(ⅱ) $\frac{2}{b}\le\frac{2}{3}$인 경우

$2\le x\le\frac{8}{3}$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 한 주기 이상을 포함하게 된다.

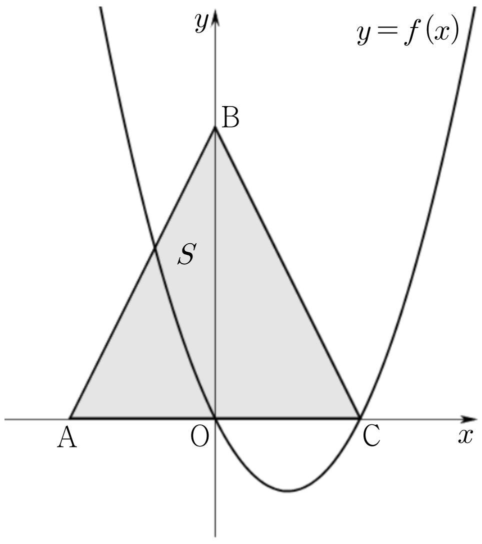


곧, $f(x)$의 최솟값은 $a-b$이므로 $2\le x\le\frac{8}{3}$에서
$f(x)$의 최솟값은 $a-b=2$이다.
$\frac{2}{b}\le\frac{2}{3}$에서 $b\ge 3$이므로 가능한 순서쌍은 $(5,\ 3)$, $(6,\ 4)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 1)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 4)$의 3개

[2025학년도 6월 20번 변형]

11 정답 ⑤



두 선분 AB, BO 및 곡선 $y=f(x)$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하고, **삼각형 ABO와 삼각형 CBO의 넓이가 같음에 주목하자.**

$$A=\triangle \mathrm{CBO}+S,\quad B=\triangle \mathrm{ABO}-S$$

이므로

$$A-B=\triangle \mathrm{CBO}-\triangle \mathrm{ABO}+2S=2S$$

이 값이 2이므로 $S=1$이다.

한편, $f(-1)=a$에서 점 B의 y좌표가 $2a$이고, 점 A의 x좌표가 -1이므로 **점 $(-1, a)$는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이면서 곡선 $y=f(x)$와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점이다.**

한편, $f(x)$는 두 점 O, C를 지나므로

$$f(x)=px(x-2)\ (p>0)$$

으로 둘 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(-1, a)$를 지나므로 좌표를 대입하면

$p=\frac{a}{3}$ 임을 얻는다.

이때, 직선 AB는 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2a)$를 지나므로

직선의 방정식은 $y=ax+2a$이다.

따라서 S의 값은

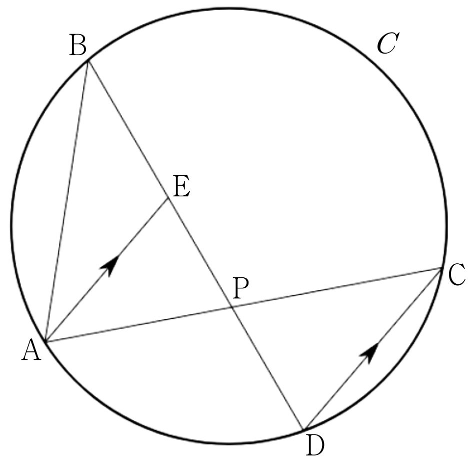
$$S=\int_{-1}^{0}\left\{(ax+2a)-\frac{a}{3}x(x-2)\right\}dx=1$$

$$\left[-\frac{a}{9}x^3+\frac{5}{6}ax^2+2ax\right]_{-1}^{0}=\frac{19}{18}a=1$$

$$\therefore\ a=\frac{18}{19}$$

[2025학년도 6월 13번 변형]

12 정답 ①



① 닮음이 되는 도형을 찾고, 이를 분석하자.

원주각의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{ABP}=\angle \mathrm{DCP}$

엇각의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{DCP}=\angle \mathrm{EAP}$

따라서 **두 삼각형 ABP, EAP에서**

$$\angle \mathrm{ABP}=\angle \mathrm{EAP},\ \angle P \text{는 공통}$$

이므로 두 삼각형은 닮음이다.

따라서 $\angle \mathrm{AEP}=\angle \mathrm{BAP}$에서

$$\frac{\sin(\angle \mathrm{ABP})}{\sin(\angle \mathrm{AEP})}=\frac{\sin(\angle \mathrm{ABP})}{\sin(\angle \mathrm{BAP})}=\frac{2}{3}$$

이므로 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:3$이다.

이때, $\cos(\angle \mathrm{APB})=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2k$, $\overline{\mathrm{BP}}=3k\ (k>0)$라 두면

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos(\angle \mathrm{APB})}\\&=\sqrt{4k^2+9k^2-2\times 2k\times 3k\times\frac{1}{3}}\\&=3k\end{aligned}$$

② 삼각형 ABP, AEP가 이등변삼각형이 됨을 이용하자.

따라서 삼각형 ABP는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PB}}$인 이등변삼각형이고,

삼각형 ABP와 삼각형 EAP가 닮음이기 때문에

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AP}}$ 임도 보장된다.

곧, $\overline{\mathrm{AE}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=4$이고

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\cos(\angle \mathrm{APD})}\\&=\sqrt{4^2+3^2-2\times 4\times 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\\&=\sqrt{33}\end{aligned}$$

한편, 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle \mathrm{ABP})=\frac{6^2+6^2-4^2}{2\times 6\times 6}=\frac{7}{9}$$

이므로

$$\sin(\angle \mathrm{ABP})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{ABP})}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의해

$$R=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{2\times\sin(\angle \mathrm{ABP})}=\frac{\sqrt{33}}{2\times\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\frac{9}{16}\sqrt{66}$$

[SEOL:NAME 자작]

13 정답 ②

두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)(|t+1|+t+1)dt$$

$$h(x)=\int_3^x f(t)(|t|-t)dt$$

라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① 주어진 $g(x)$에 대한 부등식을 통해 $f(x)$의 일부를 확정짓자.

한편, $g(0)=0$인데, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로 $g'(0)=0$이다.

따라서 $g'(x)=f(x)(|x+1|+x+1)$이므로 $f(0)=0$이다.

곧, $f(x)=ax(x-b)\ (a>0)$라 둘 수 있다.

이때, **함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $g'(x)$의 부호는 $(-)$에서 $(+)$로 변해야 한다.**

이를 만족시키려면 $b<0$이다.

② 함수 $g(x)$의 극대/극소점을 파악하여 부등식을 만족시킬 조건을 분석하자.

함수 $g(x)$는 $x<-1$에서 $g'(x)=0$이고,

$x\geq -1$에서 $g'(x)=2ax(x-b)(x+1)$이다.

$a>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서 극소이고,

$x=b$에서 극대임을 안다.

이때, $g(x)\geq 0$이기 위해서는 **두 극솟값이 모두 0 이상이어야 한다. $g(0)=0$이므로 $g(-1)\geq 0$이면 충분하다.**

$$\begin{aligned}g(-1)&=\int_0^{-1}2ax(x-b)(x+1)dx\\&=2a\times\int_0^{-1}\{x^3+(1-b)x^2-bx\}dx\\&=2a\times\left[\frac{x^4}{4}+\frac{1-b}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2\right]_0^{-1}\\&=2a\left(-\frac{1}{12}-\frac{b}{6}\right)\geq 0\end{aligned}$$

에서 부등식을 풀면 $b\leq -\frac{1}{2}$이다. ($\because\ a>0$)

③ 함수 $h(x)$의 극대/극소점을 파악하여 부등식을 만족시킬 조건을 분석하자.

$h'(x)=f(t)(|x|-x)$이므로 $x>0$일 때 $h'(x)=0$

$x\leq 0$이면 $h'(x)=-2ax^2(x-b)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극대이다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\leq 2$를 보이면 되므로 $x=b$에서 $h(x)\leq 2$를 보이면 된다.

$$\begin{aligned}\int_3^b f(t)(|t|-t)dt&=\int_0^b f(t)(|t|-t)dt\\&=\int_0^b -2at^2(t-b)dt\\&=-2a\times\left[\frac{t^4}{4}-\frac{b}{3}t^3\right]_0^b\\&=\frac{ab^4}{6}\leq\frac{1}{4}\quad\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

④ 앞에서 얻은 두 부등식을 통해 $f(1)+f(-1)$의 최댓값을 구하자.

이때, $f(1)+f(-1)=a(1-b)-a(-1-b)=2a$이므로

$2a$의 최댓값을 구하면 된다.

㉠에서 $a\leq\frac{3}{2b^4}$이므로 a의 최댓값은 $\frac{3}{2b^4}$이다.

또한, $b\leq -\frac{1}{2}$에서 $b^4\geq\frac{1}{16}$이므로

$$\frac{3}{2b^4}\leq\frac{3}{2}\times 16=24$$

곧, a의 최댓값은 24이며,

구하는 최댓값은 $2a$의 최댓값이므로 그 값은 48이다.

[2025학년도 6월 15번 변형]

14 정답 ②

$a_n<0$이면 항상 $a_{n+1}=-a_n+4>0$임에 주목하자.

$a_3\times a_4\times a_5<0$이 성립하려면 a_3, a_4, a_5가 모두 음수이거나 이 중 하나만 음수여야 한다.

이때, 세 항이 모두 음수인 경우는 $a_n<0$일 때 $a_{n+1}>0$이라는 사실에 위배되므로 위의 세 항 중 하나만이 음수이다.

다음 사실을 상기하자.

$a_n<2$이면 $a_{n+1}=-a_n+4>2$이고,
$a_n\geq 2$이면 $a_{n+1}=\sqrt{a_n}-3\geq\sqrt{2}-3$이므로
a_1이 아닌 $\{a_n\}$의 모든 항은 $\sqrt{2}-3$ 이상이다. $\cdots$ ㉠

$a_{n+1}<0$이면 $a_n\geq 2$이다.
이는 $a_n<2$이면 $a_{n+1}=-a_n+4>0$이기 때문이다. $\cdots$ ㉡

이를 바탕으로 다음과 같이 경우를 나누어 분석하자.

(i) $a_3<0$이면 :

$a_4=-a_3+4$이므로 $a_4>4$이고,

$a_5=\sqrt{a_4}-3>0$이려면 $a_4>9$이다.

곧, $a_3<-5$이거나 $a_3>84$이다.

한편, $a_3<-5$이면 ㉠에 위배된다.

따라서 $a_3>84$인데, 같은 방식으로 $a_3=-a_2+4$이면 ㉠에 위배되기 때문에 $a_3=\sqrt{a_2}-3$이 된다.

같은 방식으로 a_1의 값을 찾아나가면 200보다 매우 큰 수의 범위로 나오기 때문에 이 경우는 불가능하다.

(ii) $a_4<0$인 경우

$a_4<0$일 때 $a_5>0$인 것은 자명하다.

그러면 $a_3>0$이므로 ㉡에 의해 $a_3\ge 2$이고,

곧, $2\le a_3<9$이다.

따라서 $25\le a_2<144$이거나 $-5\le a_2<2$이다.

(ii-1) $25\le a_2<144$인 경우 :

주어진 조건에서 $a_1\ge 2$이면 $a_2=\sqrt{a_1}-3$인데 이를 만족시키면서 $25\le a_2<144$가 되려면 양수인 a_1의 값은 200보다 매우 커야 하기 때문에 이 경우는 불가능하다.

(ii-2) $-5\le a_2<2$인 경우 :

$a_3<2$이므로 ㉡에 의해 $a_2\ge 2$이다.

곧, $a_2=\sqrt{a_1}-3$이므로 $2\le a_1<25$이다.

(iii) $a_5<0$인 경우

$a_4>0$이면서 $a_5<0$이려면 ㉡에 의해 $2\le a_4<9$이다.

이때, $a_3>0$이므로

$a_3<2$이면 $0<a_3<2$, $a_3\ge 2$이면 $25<a_3<144$

이 중 $25<a_3<144$인 경우 $a_2\ge 2$이면 $a_3=\sqrt{a_2}-3$이 되어 a_2의 값이 200에 비해 매우 커지고, (i)에서와 같은 방식으로 a_1의 값도 200에 비해 매우 커진다.

반면, $a_2<2$인 경우는 $-140<a_3<-21$이므로 ㉠에 위배된다.

따라서 $25<a_3<144$인 경우가 불가능하므로 $0<a_3<2$이고, $9<a_2<25$이다.

a_1이 2 이상의 자연수이므로 $a_2=\sqrt{a_1}-3$

$a_1\le 200$이므로 $144<a_1\le 200$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $2\le a_1<25$, $144<a_1\le 200$이므로

가능한 정수 a_1의 개수는 $23+56=79$(개)

[SEOL:NAME 자작]

15 정답 ④

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 열린구간 $(k,\,k+1)$에서 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 이 구간에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하고, 열린구간 $(k+1,\,k+2)$에서 함수 $f(x)-8|x|$가 역함수를 가지려면 이 구간에서 $f'(x)-8|x|$의 증감이 유지되어야 한다. 곧, 주어진 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

> ㉠ **<u>열린구간 $(k,\,k+1)$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않도록 하는 모든 실수 k의 집합</u>**과
> ㉡ **<u>열린구간 $(k+1,\,k+2)$에서 함수 $f(x)-8|x|$의 증감이 바뀌지 않도록 하는 모든 실수 k의 집합</u>**이 같다.

$|f'(0)|\le 8$이므로 함수 $f(x)-8|x|$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

즉, $-2<k<-1$은 ㉡의 원소가 아니다.

$k=-2+$ 일 때, 열린구간 $(-2+,\,-1+)$에서 함수 $f(x)$가 역함수를 갖지 않는다.

$k=-1-$ 일 때, 열린구간 $(-1-,\,0-)$에서 함수 $f(x)$가 역함수를 갖지 않는다.

한편, $f'(0)<0$이므로 $x<0$에서는 하나의 극값을 가진다. 위의 두 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖는다.

이때, $f'(0)<0$이므로 두 극값에서의 x좌표 차는 1보다 크다.…㉢

$f'(a)=f'(b)=0\ (a<b)$이라 하자.

이때, ㉠을 만족시키는 실수 k의 집합의 **<u>여집합</u>**은

$$\{k|a-1<k<a\}\cup\{k|b-1<k<b\}$$

한편, ㉢에서 $f(x)$가 감소하는 구간의 길이가 1보다 크므로

$$b>a+1$$

곧, 집합 $\{x|a-1\le x\le a\}$와 집합 $\{x|b-1\le x\le b\}$가 교집합을 가질 수 없다. 따라서 위의 ㉠, ㉡에 해당하는 집합의 여집합은

$$\{k|\,a-1<k<a,\ b-1<k<b\}$$

으로 쓸 수 있고, ㉡에 이를 적용하면 함수 $f(x)-8|x|$는 세 구간

$$x\le a+1,\ a+1\le x\le b+1,\ x\ge b+1$$

에서 각각 단조증가하거나 단조감소한다.

이를 만족시키려면 **함수 $f(x)-8|x|$는 $x=a+1$, $x=b+1$에서만 극값을 가져야 한다.**

앞서 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가짐을 보였으므로

$a=-1$ 또는 $b=-1$이다.

(i) $a=-1$이면

$b>a+1$에서 $b>0$이고, $f'(b)=0$, $f'(b+1)=8$이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수를 n(n은 자연수)이라 두면,

$$f'(x)=3n(x+1)(x-b)$$

$f'(b+1)=3n(b+2)=8$이므로 $n=1$, $b=\dfrac{2}{3}$

곧, $f'(x)=3(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$이고, $f'(0)<0$도 성립한다.

(ii) $b=-1$이면

$b>a+1$이므로 $a+1<-1$, 곧, $a<-2$이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수를 n(n은 자연수)이라 두면,

$$f'(x)=3n(x+1)(x-a)$$

곧, $f'(0)=-3an>0$이므로 $-8\le f'(0)<0$이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f'(x)=3(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$이고, $f'(4)=50$이다.

[SEOL:NAME 자작]

16 정답 12

방정식을 정리하면

$$2^{5+\frac{2}{3}x}=2^{x+1}\ \Rightarrow\ 5+\frac{2}{3}x=x+1$$

$$\therefore\ x=12$$

17 정답 5

주어진 극한식에서 (분모)→0이므로 극한값이 존재하려면 (분자)→0이다. 따라서 $\sqrt{1+a}-b=0$이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+a-b^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+a}+b\right)}$$

인데, $\sqrt{1+a}=b$에서

$$1+a=b^2 \;\Rightarrow\; a-b^2=1$$

따라서 위의 극한식의 값은

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+a}+b\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+a}+b}=\frac{2}{\sqrt{1+a}+b}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\sqrt{1+a}+b=4$이다.

따라서 두 식 $\sqrt{1+a}=b$, $\sqrt{1+a}+b=4$을 연립하면

$$\sqrt{1+a}=b=2 \;\Rightarrow\; a=3,\ b=2 \;\Rightarrow\; a+b=5$$

18 정답 60

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n=46$$

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}b_n=18$$

이므로 연립해서 풀면 $\sum_{n=1}^{10}a_n=32$, $\sum_{n=1}^{10}b_n=14$이다.

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{10}a_n+2\times\sum_{n=1}^{10}b_n=60$$

19 정답 150

두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

이때, 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|x_1(t)-x_2(t)|$이다.

주어진 상황은 $|x_1(t)-x_2(t)|=4$를 만족시키는 실수 $t\,(t\ge0)$의 개수가 3인 것이다.

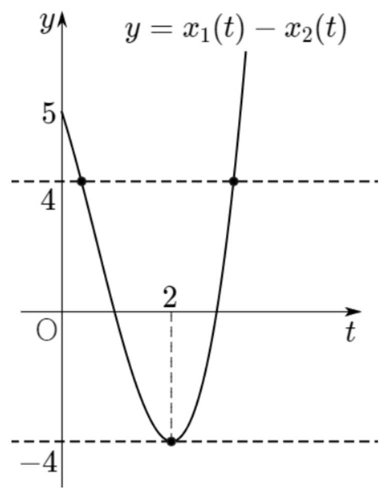
곧, 방정식 $x_1(t)-x_2(t)=4$의 양의 실근의 개수와 방정식 $x_1(t)-x_2(t)=-4$의 양의 실근의 개수의 합은 3이다. ⋯ ㉠

한편,

$$v_1(t)-v_2(t)=3t^2+(k-6)t-2k=(t-2)(3t+k)$$

인데, k가 양수이므로 함수 $v_1(t)-v_2(t)$는 $t>0$에서 $t=2$일 때 극솟값을 가진다.

따라서 ㉠을 만족시키는 상황을 그래프로 그리면 다음과 같다.



다시 말해, 함수 $x_1(2)-x_2(2)=-4$이다.

$$x_1(t)-x_2(t)=x_1(0)-x_2(0)+\int_0^t v_1(s)ds-\int_0^t v_2(s)ds$$

$$=5-0+\left(t^3+\frac{k-6}{2}t^2\right)-2kt$$

$$=t^3+\frac{k-6}{2}t^2-2kt+5$$

여기에 $t=2$를 대입하면

$$8+2k-12-4k+5=-4$$

$$\therefore\ k=\frac{5}{2}$$

따라서 $60k=150$

[SEOL:NAME 자작]

20 정답 55

$\log_2\frac{n^2+k}{n+1}$의 값을 A, $\log_4(n^2+k)$의 값을 B라 하자.

A, B가 모두 정수라면 $2B-A$도 정수이다.

곧, $2B-A=\log_2(n+1)$이며, n이 자연수이므로

자연수 p에 대하여 $n=2^p-1$으로 나타낼 수 있다.

이때, $4\le n\le10$이므로 $p=3$이고, $n=7$이다.

한편, $\log_4(n^2+k)$가 정수이면

$$A=\log_2\frac{n^2+k}{n+1}=2B-p$$

는 자연스럽게 정수가 된다.

즉, $\log_4(n^2+k)$이 정수인데 n이 홀수이고 $\frac{k}{2}$가 정수임에서 $|k|$가 0 또는 짝수이다.

곧, n^2+k의 값이 홀수이고, $\log_4(n^2+k)$가 정수이려면 $n^2+k=1$인 경우가 유일하다.

따라서 $k=1-n^2=-48$이므로

$$n-k=7-(-48)=55$$

[2025학년도 6월 14번 변형]

21 정답 16

조건 (나)에서 $f(2)<0$이므로 $f(x)$의 최솟값 m은 음수이다.

함수 $g(t)\{g(t)-9\}$가 불연속이도록 하는 모든 t의 곱이 $4m^2$이려면 함수 $g(t)\{g(t)-9\}$는 $t=0$에서 연속이다.

$g(0)$은 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수, ⋯ ㉠

$\lim_{t\to0}g(t)$는 방정식 $f(x)=0+$ 의 실근의 개수와 방정식 $f(x)=0-$ 의 실근의 개수의 합이다. ⋯ ㉡

① 함수 $g(t)$가 $t=0$에서 불연속임을 보이자.

만일 함수 $g(t)$가 $t=0$에서 연속이면 세 방정식 $f(x)=0+$ 의 실근의 개수, $f(x)=0+$ 의 실근의 개수, $f(x)=0$의 실근의 개수가 모두 같으므로 ㉡$=2\times$㉠이 된다.

이때, 함수 $g(t)\{g(t)-9\}$가 $t=0$에서 연속이기 위해서는 ㉠$=0$ 또는 ㉠$=3$이면 된다.

(ⅰ) ㉠$=0$이면 : 조건 (가)에서 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 적어도 하나 존재하기 때문에 모순이다.

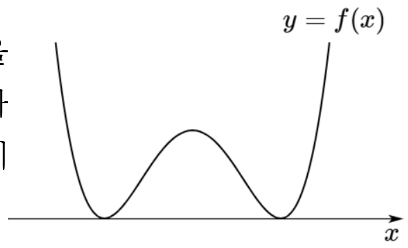
(ⅱ) ㉠$=3$이면 : 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 3이면 하나의 중근과 서로 다른 두 실근을 가지는 경우이다. 이 경우는 $g(t)$가 $t=0$에서 불연속이므로 가정에 모순된다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 불연속이다.
이는 곧, 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가져야 함을 시사한다.

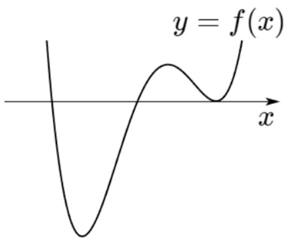
② 방정식 $f(x)=0$이 어떠한 형태의 중근을 갖는지 살피자.

$f(x)$가 음수인 최솟값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지는 경우는 불가능하다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 삼중근이 아닌 중근을 가진다.
(삼중근을 가지는 경우 함수 $g(t)$가 $t=0$에서 연속이다.)

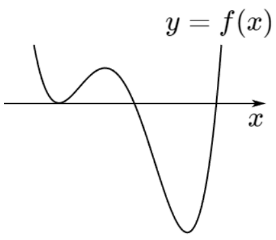
방정식 $f(x)=0$이 두 개의 중근을 가지는 경우 마찬가지로 $f(x)$가 0을 최솟값으로 가지기 때문에 모순이다.



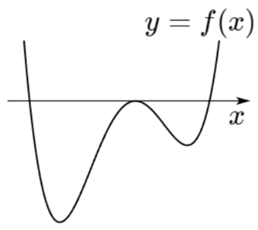
따라서 방정식 $f(x)=0$은 다음과 같이 하나의 중근을 가지고, 개형은 다음과 같다.



[개형1]



[개형2]



[개형3]

③ $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$의 위치를 잡자.

$f(x)$의 극댓값을 p라 두자. 이때, $p \neq -m$이다. ⋯ **[참조]**

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$, $f(2)<0$이므로 위의 세 개형 중 다음과 같이 개형이 **[개형2]**로 확정된다.

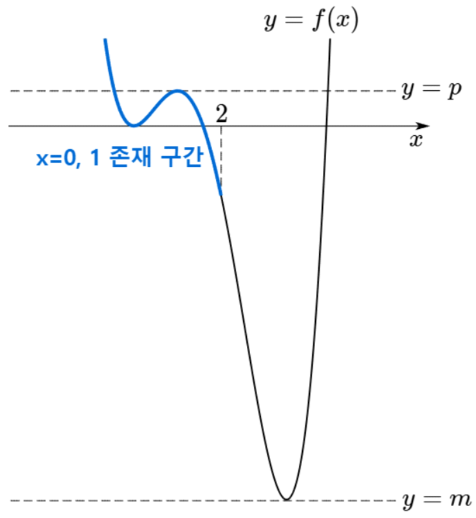
- **[개형1]**, **[개형3]**의 경우 $f(2)<0$이고, $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$이면

  $x<\frac{1}{2}$에서 $f'(x)<0$이 되어 $f(0)>f\left(\frac{1}{2}\right)$인데,

  $f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)$이 되기 때문에 $f(1)<f(0)$이다.

  즉, $f(1)>f(0)$을 만족시키는 것이 불가능하다.

따라서 **[개형2]**로 확정되며, $x=0$, $x=2$이 존재할 수 있는 위치를 파란색 실선으로 나타내면 다음과 같다.

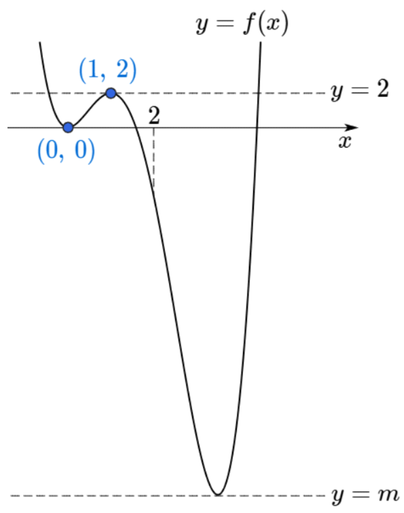


이때, 함수 $g(t)$는 $t=\pm p$, $t=\pm m$에서 불연속이므로 조건 (가)에서 $p^2m^2=4m^2$, 곧 $p=\pm 2$인데, 극댓값은 두 극솟값보다 커야 하므로 $p=2$이다.

이때, $x<2$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 2임에 주목해보자.

그러면 $f(0)$과 $f(1)$의 위치가 다음과 같이 $f(0)=0$, $f(1)=2$로 정해짐을 알 수 있다.

만일, $f(0)>0$이거나 $f(1)<2$이 되면 $f(1)=f(0)+2$를 만족시킬 수 없기 때문이다.



④ 위의 내용을 바탕으로 $f(x)$의 식을 세우고 검증하자.

곧, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 가지므로
$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$로 둘 수 있다.
이때, $f'(1)=0$, $f(1)=2$이므로 이를 대입하면
$f'(x)=2x(x^2+ax+b)+x^2(2x+a)$에서

$$f'(1)=4+3a+2b=0,\ f(1)=1+a+b=2$$

두 방정식을 연립해서 풀면 $a=-6$, $b=7$이다.
곧, $f(x)=x^4-6x^3+7x^2$이 되고,
$f'(x)=4x^3-18x^2+14x$이므로 $f(2)=16-48+28=-4$가 되어 조건 (나)를 만족시킴을 확인할 수 있다.
따라서 $\{f(2)\}^2=16$

[참조] $p \neq -m$인 이유

> $g(t)=g(-t)$이기 때문에 함수 $g(t)\{g(t)-9\}$가 $t=\alpha$에서 불연속이면 $t=-\alpha$에서도 불연속이다.
> 만일 $f(x)$의 극댓값이 $-m$인 경우 함수 $g(t)\{g(t)-9\}$는 $t=m$, $t=-m$에서 모두 불연속이므로 그 곱은 $-m^2$이다.
> 하지만 조건 (나)를 만족시키는 모든 t의 곱은 $4m^2$이고, $m \neq 0$이기 때문에 이는 성립하지 않는다.

[2025학년도 6월 21번 변형]

22 정답 256

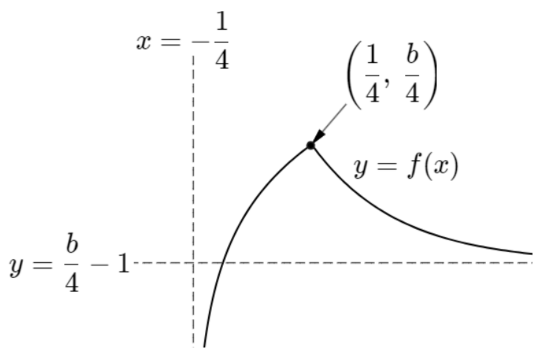
①-1 함수 $f(x)$의 개략적인 개형을 그리자.

함수 $f(x)$가 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$에서 정의된 식에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하고,

$x \geq \frac{1}{4}$에서 정의된 식에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$a^0+\frac{b}{4}-1=\frac{b}{4},\ \ \frac{b}{4}+\log_a 1=\frac{b}{4}$$

이때, $a>1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



함수 $f(x)$의 정의역은 $x>-\frac{1}{4}$이므로 함수 $f(f(x))$의

값이 존재하도록 하는 실수 x의 집합은 부등식 $f(x)>-\frac{1}{4}$을

만족시키는 실수 x의 집합이다.

①-2 A와 B가 공집합이 아님을 보이자.

한편, $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 최댓값 $\frac{b}{4}$를 갖는데,

b가 자연수이므로 이 값이 양수이다.

따라서 예를 들어, $x=\frac{1}{4}$일 때, $f(f(x))$이 정의되고 값이

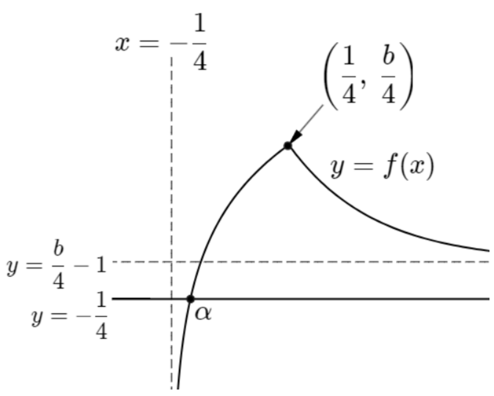
존재하므로 A와 B는 공집합이 아니다.

② 합성함수의 $f(f(x))$의 정의역과 치역을 분석하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{4}$의 교점의 x좌표의 최솟값을 α라

하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{4}$이 $x=\alpha$에서만 만나면

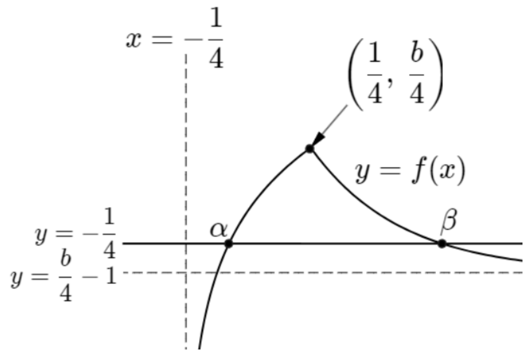
$A=\{x|x>\alpha\}$이고, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 두 가지의 경우로 나눌 수 있다.



[케이스 1]

만일 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{4}$이 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\beta>\alpha)$에서

만나면 $A=\{x|\alpha<x<\beta\}$이고, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[케이스 2]

한편, 위의 그림에서 $x\in A$이면 함수 $f(x)$는 $-\frac{1}{4}<y\leq\frac{b}{4}$를

함숫값으로 가지는데, b가 자연수이므로 $f(x)$의 최댓값은

$\frac{1}{4}$ 이상이고, 다시 말해 $-\frac{1}{4}<y\leq\frac{b}{4}$에서 $f(x)=\frac{1}{4}$인 $x=k$가

존재한다. (단, k는 상수)

이때, $f(f(k))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{4}$이고, 함수 $f(x)$의 최댓값도 $\frac{b}{4}$이기

때문에 $B=\left\{x|x\leq f\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$라고 할 수 있다.

곧, $A\subset B$이려면 **[케이스2]**의 상황이 되어 $\beta\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{4}$이다.

위의 그래프에서 $\beta>\frac{1}{4}$이므로 열린구간 $\left(\frac{b}{4}, \beta\right)$에서 함수

$f(x)$는 감소함수이다.

따라서 $\beta\leq\frac{b}{4}$이면 $f(\beta)\geq f\left(\frac{b}{4}\right)$이다.

또한, **[케이스2]**의 상황은 $y=f(x)$의 점근선과 $y=-\frac{1}{4}$의 위치

비교를 통해 $-\frac{1}{4}\geq\frac{b}{4}-1$로 식을 세울 수 있으므로 $b\leq 3$이다.

③ 구한 내용을 바탕으로 a, b의 값을 구하자.

$$f(\beta)\geq f\left(\frac{b}{4}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{b}{4}\right)\leq-\frac{1}{4}$$

따라서

$$a^{\frac{1}{4}-\frac{b}{4}}+\frac{b}{4}-1\leq-\frac{1}{4}\ \ \left(\because\ \frac{b}{4}\geq\frac{1}{4}\right)$$

$$a^{\frac{1}{4}-\frac{b}{4}}\leq\frac{3-b}{4}$$

임을 얻는다.

b가 자연수이고, $b\leq 3$이므로 가능한 경우는 $b=2$이다.

$$a^{-\frac{1}{4}}\leq\frac{1}{4}$$

$$a\geq 256$$

따라서 a의 최솟값은 256이다.

[참조] 왜 정의역/치역이라는 표현을 안 쓰고 굳이 이렇게 발문을 썼나?

합성함수가 정의되려면 속함수의 치역이 겉함수의 정의역의 부분집합이어야 한다. 이 문제의 경우 그것이 일치하지 않으며, '정의역'의 엄밀한 의미는 그 함수가 정의되는 모든 실수 x가 아닌, 함수가 정의되는 집합의 부분집합 중 '사용자가 임의로 정한 집합'이기 때문에 논란의 여지가 있어 이러한 발문을 사용하였다.

[SEOL:NAME 자작]