14. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $k(k \geq 2)$를 작은 것부터 크기순으로 나열했을 때 n번째 수를 a_n이라 하자.

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin kx$의 서로 다른 교점의 개수가 k이다. (단, $0 \leq x \leq \pi$)

$a_2+a_5+a_8$의 값을 구하시오. [4점]

$\cdots\cdots a_n=4n+1$, $a_2+a_5+a_8=3a_5=63$

해설)

방정식 $\sin x=\sin kx$ $(0 \leq x \leq \pi)$ $\cdots(*)$

의 서로 다른 실근의 개수가 k이다. 즉, 각x, 각kx를 각각 나타내는 두 동경이 일치하거나 y축 대칭이고, 그런 실수 x의 개수가 k이다.

정수 $m_j(j=1,2,3,\cdots)$에 대하여

i) 두 동경이 일치하는 경우,

$(k-1)x=2m_1\pi$이므로

㉠$=\left\{x \mid x=\dfrac{2m_1\pi}{k-1}, 0 \leq x \leq \pi\right\}$라 하자.

이때 $0 \leq m_1 \leq \dfrac{k-1}{2}$이다.

ii) 두 동경이 y축 대칭인 경우,

$(k+1)x=(2m_2+1)\pi$이므로

㉡$=\left\{x \mid x=\dfrac{(2m_2+1)\pi}{k+1}, 0 \leq x \leq \pi\right\}$라 하자.

이때 $0 \leq m_2 \leq \dfrac{k}{2}$이다.

iii) 두 동경이 일치하면서 y축 대칭인 경우,

즉, i)과 ii)를 동시에 만족하는 실수 x는 $0 \leq x \leq \pi$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$가 유일하므로 ㉠$\cap$㉡$=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 또는 ㉠$\cap$㉡$=\varnothing$이다.

한편 구하고자 하는 것은 $n($㉠$\cup$㉡$)=n($㉠$)+n($㉡$)-n($㉠$\cap$㉡$)=k$를 만족시키는 k이다.

k가 짝수일 때, m_1의 개수는 $\dfrac{k-2}{2}+1=\dfrac{k}{2}$, m_2의 개수는 $\dfrac{k}{2}+1$, 따라서 $n($㉠$)+n($㉡$)=k+1$.

k가 홀수일 때, m_1의 개수는 $\dfrac{k-1}{2}+1=\dfrac{k+1}{2}$, m_2의 개수는 $\dfrac{k-1}{2}+1=\dfrac{k+1}{2}$, 따라서 $n($㉠$)+n($㉡$)=k+1$.

그런데

$x=\dfrac{2m_1\pi}{k-1}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow m_1=\dfrac{k-1}{4}$,

$x=\dfrac{(2m_2+1)\pi}{k+1}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow m_2=\dfrac{k-1}{4}$

이다. 즉, $m_1=m_2=\dfrac{k-1}{4}$일 때 $x=\dfrac{\pi}{2}$이며 이때만 ㉠$\cap$㉡$=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$이다. m_1, m_2가 정수이므로 모든 자연수 p에 대해 $k=4p+1$일 때만 구하고자 하는 k의 개수가 $n($㉠$)+n($㉡$)-n(\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\})$이고 나머지 경우에는 $n($㉠$)+n($㉡$)$이다. 즉, $k=4p+1$일 때만 $(*)$의 서로 다른 실근의 개수가 k, 나머지 경우에는 $k+1$이다.

따라서, $a_n=4n+1$. $a_2+a_5+a_8=3a_5=63$.