2024년 1학년 1학기
수학(상) 기말고사 대비

어수강 수학

2024년 고등학교 1학년 1학기 기말고사 직전 대비

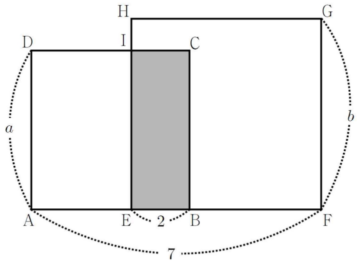
[예제2-1] 삼차방정식 $x^3 = -1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.[1]

㉠ $\omega + \overline{\omega} = \omega\overline{\omega}$

㉡ $\dfrac{1}{1-\omega} + \dfrac{1}{1-\overline{\omega}} = 1$

㉢ $\left\{\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2 - \dfrac{1}{\omega}\right\}^{2023} - \left\{\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2 - \dfrac{1}{\overline{\omega}}\right\}^{2023} = -2$

[예제2-2] 한 변의 길이가 a인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 b인 정사각형 EFGH가 있다. 그림과 같이 네 점 A, E, B, F가 한 직선 위에 있고, $\overline{\text{EB}} = 2$, $\overline{\text{AF}} = 7$이 되도록 두 정사각형을 겹치게 놓았을 때, 선분 CD와 선분 HE의 교점을 I라 하자. 정사각형 EFGH의 넓이가 직사각형 EBCI의 넓이의 4배일 때, b의 값을 구하시오. (단, $2 < a < b < 7$)[2]



[예제2-3] x에 대한 방정식 $x^2 + mx + m + 2 = 0$의 두 근이 유리수일 때, 모든 정수 m의 합을 구하시오.[3]

[예제2-4] x에 대한 연립이차부등식

$$\begin{cases} x^2 - 5a^2 < (a^2 - 5)x \\ x^2 - (25 - a)x > 25a \end{cases}$$

를 만족시키는 정수 x가 존재하지 않는 실수 a의 범위가 $m < a \leq M$일 때, $M^2 - m$의 값을 구하시오. (단, $a > 4$)[4]

[예제2-5] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 10)$이 있다. 두 직선 l, m이 다음 조건을 만족시킬 때, 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)[5]

(가) 직선 l은 점 O를 지난다.

(나) 두 직선 l과 m은 삼각형 선분 AB 위의 점 P에서 만난다.

(다) 두 직선 l과 m은 삼각형 OAB의 넓이를 삼등분한다.

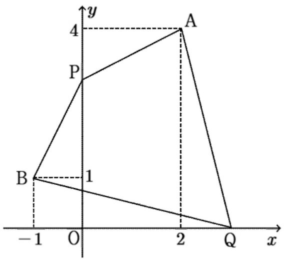
[예제2-6] 자연수 t $(t \leq 9)$와 함수 $f(x) = x^2 - 8x + 9$에 대하여 $x \leq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. $|t \times g(t)|$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.[6]

[예제2-7] 좌표평면 위의 점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있고, 다음 조건을 만족시킨다.

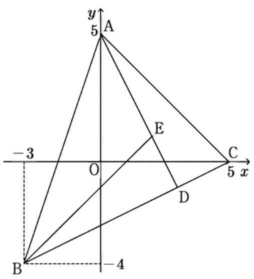
(가) 점 B의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고, 점 D의 좌표는 $(4,\ -5)$이다.
(나) 점 B는 선분 AC를 $1 : 2$로 내분한다.
(다) 점 C는 선분 AD의 중점이다.
(라) 점 E는 선분 CD를 $5 : 2$로 외분한다.

선분 AE의 길이를 구하시오.[7]

[예제2-8] 좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 4)$, $B(-1,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 하고, 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 Q라 할 때, 사각형 APBQ의 넓이를 구하시오.[8]

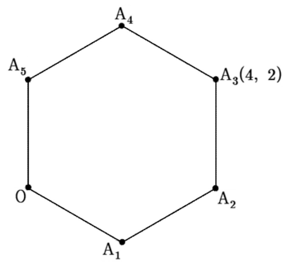


[예제2-9] 세 점 $A(0,\ 5)$, $B(-3,\ -4)$, $C(5,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 D는 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점이고, 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 ABE의 넓이의 2배 일 때, 점 E의 좌표는 $(\alpha,\ \beta)$이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, 점 E는 선분 AD 위에 있다.[9]



[예제2-10] 그림과 같이 좌표평면의 원점 O와 점 $A_3(4,\ 2)$를 지나는 정육각형 $OA_1A_2A_3A_4A_5$가 있다.

정육각형 $OA_1A_2A_3A_4A_5$의 대각선 OA_4에 대하여 $\overline{OA_4}=d$라 하고, 삼각형 OA_1A_5의 무게중심의 좌표를 $(p_1,\ q_1)$, 삼각형 $A_2A_3A_4$의 무게중심의 좌표를 $(p_2,\ q_2)$라 할 때, $d^2+3p_1+6q_2$의 값을 구하시오.[10]



[예제2-11] 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.[11]

(가) 부등식 $\frac{3}{2}x+2 \le f(x) \le -\frac{3}{2}x+5$의 해는 $-3 \le x \le 0$이다.

(나 부등식 $-\frac{3}{2}x+5 \le f(x) \le \frac{3}{2}x+2$의 해는 $2 \le x \le 5$이다.

[예제2-12] 연립부등식 $\begin{cases} 3(x+1) \geq 2x+7 \\ x^2 < (a+3)x - 3a \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.[12]

[예제2-13] 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$$\frac{(\overline{\omega})^{64}}{\omega} + \frac{\omega^{70}}{\overline{\omega}}$$

의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)[13]

[예제2-14] 좌표평면 위의 두 점 A$(0,\ 6)$, B$(3,\ 5)$애 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(n>m>0)$으로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OBQ의 넓이가 20일 때, $\dfrac{n}{m}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 m, n은 서로소인 자연수이다.)[14]

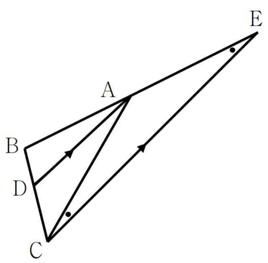
[예제2-15] 점 A$(6,\ 2)$를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 $x^2+y^2=10$과 두 점 P$(x_1,\ y_1)$, Q$(x_2,\ y_2)$에서 만난다. 점 P가 선분 AQ를 $3:2$로 내분하는 점일 때, 직선 l의 기울기를 구하시오. (단, $x_1>x_2$이다.)[15]

[예제2-16] 실수 a에 대하여 x에 대한 사차방정식 $x^4+2ax^3+(a^2+7)x^2+7ax+12=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(a)$라 할 때, $f(-6)+f(-4)+f(-3)+f(4)+f(6)$의 값을 구하시오.[16]

[예제2-17] 반지름의 길이가 r인 두 원 C_1, C_2에 대하여 원 C_1 위를 움직이는 점 P와 원 C_2 위를 움직이는 점 Q가 있다. 이때, 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리를 d라 하고 직선 PQ의 기울기를 m이라 하자. m의 값의 범위가 $-\dfrac{5}{12} \le m \le 0$일 때, $\dfrac{d^2}{r^2}$의 값을 구하시오. (단, $d > 2r$이다.)[17]

[예제2-18] 삼차방정식 $x^3-12x^2+(k+35)x-5k=0$이 서로 다른 세 실근을 세 변의 길이로 하는 삼각형이 직각삼각형이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\dfrac{12n}{m}$이라 하자. $n-m$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)[18]

[예제2-19] 그림과 같이 세 점 A$(3,\ 3)$, B$(-1,\ 1)$, C$(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점을 D라 하고, 점 C를 지나면서 선분 AD와 평행인 직선이 선분 AB의 연장선과 만나는 점을 E라 하자.$\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{AEC}$이고, 점 E를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.[19]



[예제2-20] $f(x) = x^3 + kx^2 - 32$에 대하여 삼차방정식 $f(x) = 0$이 실수인 중근을 가질 때, $\dfrac{1}{10}f(k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)[20]

[예제2-21] y절편이 양수인 직선 $y = 3x + 2b$에 대하여 원점 O와 점 A(6, 0)으로부터 이 직선에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 할 때, 사각형 OACB의 넓이가 15가 되도록 하는 상수 b의 값을 구하시오.[21]

[예제2-22] 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$의 모든 실근은 2, 6이다.
(나) 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근은 2, 10이다.

방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, k의 값을 구하시오.[22]

[예제2-23] 양의 실수 k에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} \left||x+1|-\sqrt{x^2-4x+4}\right| \le 4 \\ x^2-5kx-6k^2>0 \end{cases}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 1일 때, k의 값의 범위를 구하시오.[23]

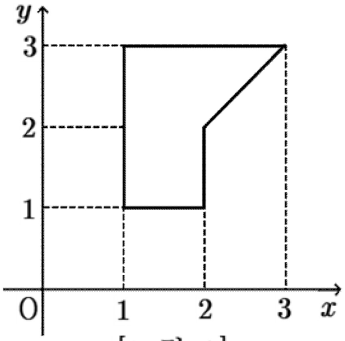
[예제2-24] 이차함수 $y = x^2 + 4$의 그래프 위의 한 점 A에서 그은 접선을 l_1이라 하고, l_1이 직선 $x - y = 0$과 만나는 점을 B라 하자. 또 점 B에서 이차함수 $y = x^2 + 4$의 그래프에 그은 접선을 l_2 $(l_1 \neq l_2)$라 할 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이다. 이때, 점 B의 x좌표를 구하시오.[24]

[예제2-25] 좌표평면 위의 직선 $l : y = mx + 4(-1 < m < 0)$이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 이때, 선분 AB의 수직이등분선이 두 직선 l, $y = 0$과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 OBCD의 넓이가 11이 되도록 하는 m의 값을 구하시오.[25]

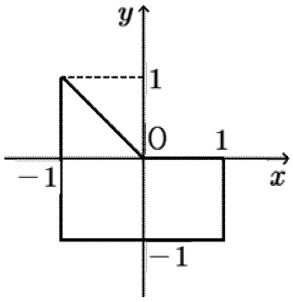
[예제2-26] $\overline{\mathrm{OA}}=8$, $\overline{\mathrm{OB}}=6$이고 $\angle\mathrm{O}=60°$인 삼각형 OAB의 내부에 한 점 P를 잡아 $\triangle\mathrm{POA}:\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{POB}=1:2:3$이 되도록 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 값을 구하시오.[26]

[예제2-27] 실수 k에 대하여 좌표평면에서 원 $C: x^2+y^2-2kx-2|k|y-4|k|-2=0$이 직선 $y=x-2$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(k)$라 하자. $f(-3)+f(-1)+f(0)+f(2)+f(4)$의 값을 구하시오.[27]

[예제2-28] 도형 $f(x,\ y)=0$의 그래프가 [그림 1]과 같을 때, 다음 중 그래프가 [그림 2]와 같은 것을 고르시오.[28]



[그림 1]



[그림 2]

① $f(x+2,\ 2-y)=0$
② $f(2-x,\ 2-y)=0$
③ $f(y+2,\ x+2)=0$
④ $f(y+2,\ 2-x)=0$
⑤ $f(2-y,\ x+2)=0$

[예제2-29] 원 $(x-8)^2+(y-6)^2=25$ 위의 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$에 대하여 $(a+b-c+d-15)^2-2(a-c-12)(b+d-3)$의 값이 최대가 될 때의 점 $(a,\ b)$를 점 A, 최소가 될 때의 점 $(c,\ d)$를 점 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이고, 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 같은 점인 경우도 가능하다.)[29]

[예제2-30] 원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 3)$, $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$이 있다. 점 A에서의 원의 접선 l_1이 x축과 만나는 점을 P, 직선 OB와 만나는 점을 Q라 하고, 점 B에서의 원의 접선 l_2가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. $x_1>0$, $y_1>3$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, 점 P에서 직선 l_2에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{HO}}^2+\overline{\mathrm{HR}}^2=a-b\sqrt{5}$이다. $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, O는 원점이다.)[30]

어수강 수학

① 홈페이지 : www.soogangmath.com

② 블로그 : blog.naver.com/math-fish

③ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr

④ 전자도서

1. 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀
2. 당신이 수학을 망치는 N가지 이유

⑤ 2024년 1학기 기말고사 대비

1. 고1 수학(상) Full version 57문항 링크 : https://docs.orbi.kr/docs/12516/
2. 고2 수학I Full version 29문항 링크 : https://docs.orbi.kr/docs/12511/

⑥ **수업 및 교육상담 문의** : www.soogangmath.com/inquire

정답

[1] ㉠, ㉡

[2] $-4+2\sqrt{22}$

[3] 4

[4] 22

[5] $-\frac{5}{8}$

[6] 65

[7] $8\sqrt{2}$

[8] 9

[9] $\frac{16}{5}$

[10] 19

[11] 7

[12] $6 < a \leq 7$

[13] 1

[14] $\frac{20}{11}$

[15] 1

[16] 14

[17] 104

[18] 37

[19] 16

[20] 40

[21] 8

[22] 65

[23] $\frac{1}{5} < k \leq \frac{2}{5}$

[24] $\frac{15}{4}$

[25] $-\frac{1}{2}$

[26] 22

[27] 7

[28] ④

[29] 12

[30] $\frac{4}{15}$