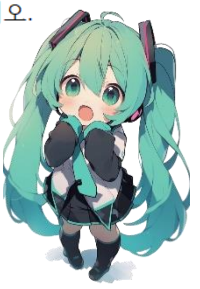
2025학년도 연세대학교 모의 논술 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1, 단답형] 미쿠가 앞면과 뒷면이 나올 확률이 각각 $\frac{1}{2}$인 파를 던진다. n회째 던졌을 때, 앞면이 나온다면 $X_n = 1$, 뒷면이 나오면 $X_n = -1$으로 한다. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[문제 1-1] $S_2 \neq 0$ 이고, $S_8 = 2$일 확률 **[5점]**

[문제 1-2] $S_4 = 0$ 이고, $S_8 = 2$일 확률 **[5점]**

[문제 2, 단답형] 좌표평면 위에 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 을 만족하는 이차곡선이 있다. 기울기가 $\pm m$인 직선들 중 주어진 그래프와 접하는 직선들의 집합을 A_m 이라고 하자. (단, $m > 0$인 실수)

[문제 2-1] $n(A_m) = 4$ 가 되기위한 m의 범위를 구하시오. **[3점]**

[문제 2-2] $n(A_m) = 4$ 를 만족할 때, A_m에 속한 모든 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(m)$이라 하자. $f'(5)$를 구하시오. **[7점]**

[문제 3, 단답형] t를 실수인 상수라 할 때, 함수 $f(x) = (x^2 - x)(x - t)$ 이다. $f'(x) = 0$ 의 두 근을 $\alpha(t), \beta(t)$ 라 하자. t에 관한 식 $|t - \alpha(t)| + |t - \beta(t)|$ 의 $0 \leq t \leq 2$ 에서의 최댓값, 최솟값을 각각 구하시오. **[각 5점]**

[문제 4, 단답형] 함수 $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \cdots f_{2025}(x)$에 대하여

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (2 - \ln x)(3 - \ln x)(4 - \ln x) \cdots (2025 - \ln x) \\ f_2(x) &= (1 - \ln x)(3 - \ln x)(4 - \ln x) \cdots (2025 - \ln x) \\ f_3(x) &= (1 - \ln x)(2 - \ln x)(4 - \ln x) \cdots (2025 - \ln x) \\ &\vdots \\ f_{2025}(x) &= (1 - \ln x)(2 - \ln x)(3 - \ln x) \cdots (2024 - \ln x) \end{aligned}$$

라고 하자. $f(x) = \sum_{k=1}^{2025} f_k(x)$라 할 때, 방정식 $f(x) = 0$의 실근의 개수를 구하시오. **[10점]**

튀긴미쿠

[문제 5, 서술형] 좌표평면 위에 포물선 $y=x^2$ 의 $0<x<1$에 대응하는 부분을 A라 하자. 점 $P(t,t^2)$에서 A의 접선이 x축, 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. (단, $0<t<1$인 실수) 또, 점 $(1,0)$을 점 S라 한다.

[문제 5-1] ΔPQS, ΔPRS 의 면적을 각각 $f(t), g(t)$로 놓았을 때, $f(t) \le g(t)$가 되는 t의 범위를 구하시오. **[5점]**

[문제 5-2] 곡선 A와 x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. P를 한 꼭짓점으로 하고, B에 포함되는 삼각형의 면적의 최댓값 $h(t)$를 구하여라. (단, 영역 B는 테두리를 포함한다.) **[25점]**

[문제 6, 서술형] $p_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$이라하자.

[문제 6-1] $\lim_{n\to\infty}p_n$이 수렴한다면 그 값을 적고, 발산한다면 발산함을 증명하시오. **[10점]**

[문제 6-2] $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$을 구하시오. **[20점]**