비례식의 원리

1. 비례식의 기본 특성

2. 비례식의 연결

3. 정량값의 계산

CHAPTER

00

1. 비례식의 기본 특성

본 교재는 물리학 학습 이전에 비례식에 대해서 배울 것이다. 뜬금없이 무슨 비례식인가라고 생각할 수 있으나 비례식을 이용하면 문제 풀이 과정에서 여러 장점을 얻게 된다. 첫째로 여러 문제 상황, 조건 등을 직관적으로 파악하기에 매우 수월해지며 둘째로 계산을 획기적으로 단순화할 수 있다. 특히나 실제 출제되는 문항들을 보면 **~는 ~의 몇 배이다, A 의 질량은 $2m$, B 의 질량은 $3m$ 이다**처럼 비율 관계를 나타내는 경우가 많다. 이러한 상황 속에서 비례식을 이용하는 것은 많은 이점을 줄 것이다. 앞으로 본 교재에서는 이론 및 문항 풀이를 가급적이면 비례식을 이용하여 서술해나갈 것이다. 1단원을 하기 이전에 간단한 튜토리얼을 하는 느낌으로 학습해보도록 하자.

0.1.1 비례식의 특징

두 개 이상의 어떠한 값들의 비율을 나타낸 것을 비례식이라 한다. 예를 들어 $a=2$, $b=0.5$라면 이 둘의 비율은 $a:b=2:0.5$라고 쓸 수 있고, 보기 쉽게 2씩 곱하여 $a:b=4:1$라고도 쓸 수 있다. 이처럼 비례식에 대하여 비례식에는 0이 아닌 어떤 수를 곱하든 상관없다는 사실은 익히 알고 있을 것이다. 우리는 앞으로 비례식끼리 사칙연산을 수행할 것이다. 어떻게 계산이 이루어질까? 어떠한 연산 ★에 대해서 아래와 같이 떠올릴 수 있을 것이다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \star & a' & : & b' & : & c' \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{a\star a' : b\star b' : c\star c'} \end{array}$$

n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산 ★을 하는 모습을 나타낸 것이다.

두 비례식에 대하여 어떠한 연산 ★를 한다는 것은 위처럼 첫 번째 숫자는 첫 번째 숫자끼리, n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산을 해준 것을 의미한다. 그렇다면 위와 같은 연산 방식은 늘 성립할까? $a:b=1:2$, $a':b'=2:3$ 면 $a+a':b+b'=3:5$라고 할 수 있을까? **아쉽게도 그럴 수 없다.** 간단한 반례로 $a=1, b=2, a'=4, b'=6$면 $3:5$가 아닌 $5:8$이 나오니 말이다. 그러나 특정 **연산, 상황**에 대해서는 위와 같은 계산이 성립하는데 미리 말하자면 곱셈, 나눗셈에 대해서는 늘 성립하고 덧셈, 뺄셈에 대해서는 특정 상황에 대해 성립한다. 이에 대해 조금 자세히 알아보도록 하자.

(1) 비례상수 : $\mathrm{A:B=a:b}$, $\mathrm{A=ak}$, $\mathrm{B=bk}$ 일 때 상수 k를 $\mathrm{A:B=a:b}$의 비례상수라 한다. 비례식을 구성하는 숫자가 **비율이 아닌 실제값으로 나타내기 위해 곱해야 하는 어떠한 상수**를 의미한다.
: $\mathrm{A}=8$, $\mathrm{B}=12$일 때 $\mathrm{A:B}=2:3$이다. 이 때 2와 3에 각각 4를 곱해주면 A, B의 값이 나오므로 비례식 $\mathrm{A:B}=2:3$에 대한 비례 상수 $k=4$다.

◆ **예시** : $\mathrm{A}=20$, $\mathrm{B}=30$이고 $\mathrm{A:B}=2:3$이다. 비례식 $\mathrm{A:B}=2:3$에 대한 비례 상수 k는 10이다.

(2) 비례식간의 곱셈, 나눗셈 : **곱셈, 나눗셈**으로 이루어진 관식에 대한 계산은 비례식에서도 동일하게 적용된다.

증명

$A:B=a:b$, $A':B'=a':b'$ 이고 비례상수는 각각 k, k'이라 하자. $(k, k'\neq 0)$
이 때 $AA':BB'=aa'kk':bb'kk'=aa':bb'$이다.

만약 비례상수가 0일 경우에는 자연스레 AA'과 BB'이 0이므로 마찬가지로 성립한다.

: 예를들어 $F=m\times a$라는 관계식이 있다면 $F비율=m비율\times a비율$도 동일 하게 성립한다. 이는 앞으로 물리학에서 배울 여러 관계식들에 대한 계산을 간소화하는데 매우 유용하게 쓰일 예정이며 본 교재의 기본 베이스가 되는 내용이다.

◆ **예시** : 평균속력×시간=이동거리 이므로 (평균속력 **비율**) × (시간 **비율**) = (이동거리 **비율**) 도 성립한다.

◆ **예시** : 속도변화량×시간=가속도 이므로 (속도변화량 **비율**) × (시간 **비율**) = (가속도 **비율**) 도 성립한다.

(3) 비례식간의 덧셈, 뺄셈 : 일반적으로 비례식간의 덧셈 및 뺄셈은 불가능하나 비례상수가 동일할 경우는 가능하다.
: 간단한 예로 $a=30$, $b=40$, $c=10$, $d=15$라고 했을 때 $a:b=3:4$, $c:d=2:3$이다. 이 두 비례식의 구성 숫자들을 순서대로 더할 경우 $a+c:b+d=(3:4)+(2:3)=(3+2):(4:3)\neq 7:5$와 같이 성립하지 않는다. 그러나 비례식끼리의 덧셈 뺄셈이 성립하는 경우는 대표적으로 두가지가 존재한다.

연산하는 비례식들에 대한 비례상수가 모두 동일할 경우

증명	$A:B=a:b$, $A':B'=a':b'$, 두 비례식에 대한 비례상수는 k로 동일하다 하자 $(k\neq 0)$ 이 때 $A\pm A':B\pm B'=(a\pm a')k:(b+b')k=a\pm a':b\pm b'$ (비례상수 k 소거됨)

◆ **예시 :** $a:b=3:4.\ c:d=1:2$이고 비례상수 $k=10$으로 동일하다면 $a+c:b+d=4:6=2:3$이다.
: 이유는 간단하다. $a,\ b,\ c,\ d$의 실제 값이 30, 40, 10, 20이고 이들에 대해 덧셈을 하든 뺄셈을 하든 10(비례상수 k)으로 묶이며 이들은 비례식을 세워도 어차피 소거되기 때문이다.

한쪽이 0:0일 경우 (두 비례식에 대한 덧셈에서)

증명	$A:B=a:b$, $A':B'=0:0$, $A:B$에 대한 비례상수는 k이다. 이 때 $A\pm A':B\pm B'=ak+0:bk+0=a:b$

◆ **예시 :** $a:b=0:0.\ c:d=1:2$이면 $a+c:b+d=1:2$이다.
: 마찬가지로 어느 한쪽이 $0:0$이면 이에 대해서 덧셈, 뺄셈을 해도 자기 자신이 나오기 때문에 성립한다. 어찌보면 0:0이라는 비례식에 대한 비례상수는 k가 어느숫자든 상관없기 때문이라 볼 수 있다. 만약 두 비례식이 아닌 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0인 경우엔 어떻게 될까? 앞서 말했듯 연산하는 비례식들에 대한 **비례상수가 모두 동일할 경우** 덧셈 뺄셈이 성립하다고 하였다. 즉, 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0이라면 나머지 두 비례식의 비례상수가 동일하다면 상관 없다. 이를 다르게 말하면 0:0이라는 비례식은 더하든 빼든 아무런 영향을 주지 않는다는 의미이기도 하다.

0.1.2 비례식의 계산 방식

앞에서 비례식끼리는 일반적으로 곱셈, 나눗셈이 가능함을 배웠다. 이를 종이에 쓰면서 풀 때에는 다음과 같은 방식으로 쓰도록 하자.

(1) 비례식의 곱셈 : 비례식끼리 곱셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 곱해주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c') = aa':bb':cc' \text{ 또는 } \times\begin{array}{|ccccc} a & : & b & : & c \\ a' & : & b' & : & c' \\ \hline aa' & : & bb' & : & cc' \end{array}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\times(1:2:3) = 3\times1:5\times2:8\times3 = 3:10:24$로 계산이 가능하다.
개인적으로는 우측처럼 세로로 써주면 계산할 때 피로감이 덜하며 검토하기도 수월하여 선호하는 편이다.

(2) 비례식의 나눗셈 : 비례식끼리 나눗셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 나눠주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c') = \frac{(a:b:c)}{(a':b':c')} = \frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\div(1:2:3) = \frac{(3:5:8)}{(1:2:3)} = \frac{3}{1}:\frac{5}{2}:\frac{8}{3} = 18:15:16$으로 계산이 가능하다.
풀이 과정을 보면 비례식 통째로 분모, 분자에 두는 것이 가능하다. 그리고 이를 합칠 때에는 : 가 합쳐진다고 보면 아마 이해하기 편할 것이다. 필자는 곱셈이든 나눗셈이든 세로로 쓰는 것을 선호한다. (가로로 쓰면 시선이 좌우로 왔다 갔다 하느라 계산 과정에서 실수가 발생하는 경우가 많음) 추가로 $(a:b)\div(a':b') = \frac{(a:b)}{(a':b')} = ab':a'b$와 같이 숫자가 2개인 비례식끼리 나눠줄 경우에는 분수 형태가 나올텐데 이 때 아래에서 윗방향으로 대각선으로 곱해주듯 계산해주면 훨씬 편안하다. (a와 b', a'와 b를 곱해주듯)

아마 지금까지 배운 내용이 어렵지는 않을 것이다. 단지 익숙하지 않을것이며 익숙하지 않기 때문에 간단한 계산도 조금은 삐걱댈 것이다. 한번 간단한 예제를 통해 비례식간의 계산을 익혀보도록 하자.

예제

◆ 예제 1 : $(3:5)\times(1:6) =$

◆ 예제 2 : $(3:6:5)\times(2:9:12) =$

◆ 예제 3 : $(2:3)\div(5:3) =$

◆ 예제 4 : $(1:3:4)\div(8:6:3) =$

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=3:30=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=6:54:60=1:9:10$
- **예제 3** : $(2:3)\div(5:3)=\dfrac{(2:3)}{(5:3)}=\dfrac{2}{5}:1=2:5$
- **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=\dfrac{(1:3:4)}{(8:6:3)}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{4}{3}=3:12:32$

이렇게 비례식간의 곱셈 나눗셈을 하고나면 **가장 간단한 정수비로 나타내주는 과정**을 거치게 될 것이다. 위의 **예제 1**, **예제 2**풀이를 보면 $3:30$과 $6:54:60$을 $1:10$, $1:9:10$으로 단순화 하게 된다. 이렇게 비례식간의 곱셈 ,나눗셈을 할 때에는 계산후에 단순화를 하는 경우도 있으나 계산 과정에서도 단순화를 진행할 수 있다. 다만, 단순화의 방법은 곱셈을 할 때와 나눗셈을 할 때 조금 다르다.

(3) 비례식의 곱셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 곱셈에서숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 N번째 숫자를 제외한 나머지 수도 k로 한번씩 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c')=aa':bb':cc'=\frac{aa'}{k}:\frac{bb'}{k}:\frac{cc'}{k}=\frac{1}{k}(aa':bb':cc')$$

(어느 비례식인지와 관계 없이 첫 번째, 두 번째, N번째 수를 모두 k로 한번씩 나눠주어야 성립한다)

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=(1:5)\times(1:2)=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=(1:6:5)\times(2:3:4)=(1:3:5)\times(1:3:2)=1:9:10$

예제 1은 $3:5$와 $1:6$에서 첫 번째 숫자 3, 두 번째 숫자 6을 미리 3으로 미리 나눠 단순화를 진행하였고 예제 2에서는 $3:6:5$와 $2:9:12$에서 3, 9, 12를 3으로 나눠주고 이후 2, 6, 4를 2씩 미리 나눠 단순화를 진행한 것이다. 당연한 이야기지만 k씩 나눠준다는 것은 k씩 곱해줄때도 성립함을 의미한다.

이러한 단순화는 나눗셈에서도 가능하다. 다만 방법이 조금 다르다.

(4) 비례식의 나눗셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 나눗셈에서 숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 또 다른 N번째 숫자에 대해 k로 한번 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c')=(\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'})=(\frac{ak}{a'k}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'})$$

(나눗셈에서는 N번째 숫자를 k로 한번 나눠줬다면, 또다른 N번째 숫자도 k로 한번 나눠주어야 성립한다.)

풀이

예제 3 : $(2:3)\div(5:3)=(2:1)\div(5:1)=2:5$

예제 4 : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\frac{1}{8}:\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=3:12:32$

예제 3 풀이를 보면 2:3의 3을 3으로 나눠주면서 5:3의 3도 3으로 나눠 계산을 단순화 한 것이다. **예제 4**는 $1:3:4$의 3을 3으로 나눠줌과 동시에 $8:6:3$의 6도 3으로 나누어 단순화한 것을 나타낸 것이다.

이러한 계산 과정속의 단순화는 나눗셈보다는 곱셈에서 많이 유용한 편이다. 이러한 단순화가 익숙해진다면 비례식간의 계산이 보다 쉬워질 것이다. 다만, 이것이 익숙하지 않다면 그냥 계산을 일괄적으로 한 뒤 마지막 최종 결과물을 단순화해도 무방하다. 익숙하지 않다면 그냥 최종 계산 후 단순화하는 것을 권장한다.

(5) 비례식의 역수비 : $a:b$와 $a:b:c$의 역수비는 각각 $b:a$, $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ca:ab$이다.

물리 문항에서는 상당수의 문제가 두 물체에 대한 비교를 물어본다. 이 경우 $1:1$을 어떠한 비례식 $a:b$로 나눠주는 경우가 많은데 엄밀하게는 역수비라고 표현하는 것이 맞으나 예외적으로 $a:b$의 역수비는 편하게 반대비 $b:a$라 칭하겠다.

예시 : $1:1$을 $3:2$로 나눠주면 반대비인 $2:3$이 나온다.

0.1.3 비례식의 확장

(1) 관계식의 비례식 변환 : $k_1a = k_2b$이면 $a:b=k_2:k_1$이다. (단, $a\neq 0, b\neq 0$ 이다.)

$$k_1a = k_2b = k_3c\text{이면 } a:b:c=\frac{1}{k_1}:\frac{1}{k_2}:\frac{1}{k_3}\text{이다. (단, } a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \text{ 이다.)}$$

조금 보기 쉽게 비례식으로 표현해보자면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$k_1a = k_2b \text{ 는 } (k_1:k_2)\times(a:b)=1:1$$

$$k_1a = k_2b = k_3c \text{ 는 } (k_1:k_2:k_3)\times(a:b:c)=1:1:1$$

간단한 예로 $2m_A=3m_B$이면 $m_A:m_B=3:2$이고, $2a=3b=4c$면 $a:b:c=6:4:3$이다. 같다 라는 것은 1:1이다 와 동일한 표현이니 $2m_A:3m_B=1:1=(2:3)\times(m_A:m_B)$ 이므로 $m_A:m_B=\frac{1:2}{2:3}=3:2$ 라고 쓸 수 있는 것이다.

두 번째 예시는 $2a:3b:4c=1:1:1=(2:3:4)\times(a:b:c)$ 면 이므로 $a:b:c=\frac{1:1:1}{2:3:4}=6:2:3$

같다는 표현을 단순히 등호가 아니라 1:1이라는 표현으로 바꿔 생각하면 비례식을 이용한 계산식을 세우기에 훨씬 수월하다. 이처럼 우리는 동일한 어떤 식을 다르게 표현하는것도 익숙해지면 좋다. 예를 들어 "$3a$는 $4b$의 2배이다."를 어떻게 표현할 수 있겠는가? $3a:4b=2:1$을 떠올릴 줄 알아야 하며 $(3:4)\times(a:b)=2:1$로 쪼개서 떠올릴줄도 알아야 한다. 그래야 관계식을 비율로 쪼개 계산하기 수월한 형태로 만들 수 있기 때문이다. 간단한 예제를 통해 관계식을 비례식으로 쪼개 계산해보도록 하자.

예제

$a:b$ 또는 $a:b:c$를 구하시오.

- 예제 1 : $3a$는 $4b$의 8배이다.
- 예제 2 : $4a:3b:5c=2:3:4$이다.

풀이

- 예제 1 : $(a:b)\times(3:4)=8:1$, $a:b=\dfrac{8:1}{3:4}=32:3$
- 예제 2 : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{4}{3}=3:12:32$

(2) 관계식에서의 상수의 무시 : 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대해 비례식 계산을 할 경우엔 상수를 무시해도 무방하다.

간단한 예를 들면 삼각형의 넓이는 밑변×높이×0.5이다. 만약 두 삼각형 A, B의 넓이 비율을 구해야 한다면 우리는 어떻게 식을 세우겠는가? 두 삼각형의 밑변의 비율, 높이의 비율, 0.5의 비율을 곱해주면 된다. 그러나 어떠한 동일한 상수의 비율은 1:1을 의미하며 1:1은 곱하든, 나누든 아무런 변화를 주지 않기 때문에 무시하여도 무방하다. 따라서 두 삼각형의 밑변의 비율과 높이의 비율을 곱해주면 자연스레 넓이의 비율이 도출될 것이다.

이 내용들을 배우는 이유는 앞서 설명했듯 계산 과정을 단순화 하기 위해서이다. 하지만 실제 문제 조건은 어떠한 문장으로 표현이 될것이며, 우리는 이러한 문장을 비례식으로 바꿔 계산해나가야 한다. 우리의 일상과 친근한 상황들에 대하여 비례식 계산을 통해 답을 도출해보도록 하자.

예제

- 예제 1 : 두 아르바이트의 시급은 2:3, 노동 시간은 7:6이다. 총 급여 비율을 구하시오.
- 예제 2 : 두 물건의 판매 가격은 개당 2:3, 구매 수량은 5:3이다. 필요 금액 비율을 구하시오.
- 예제 3 : 사과와 배의 개당 가격은 3:4이다. 동일한 금액으로 구매 가능한 사과와 배의 개수 비율을 구하시오.

풀이

- **예제 1** : 총 급여는 시급과 시간의 곱한값과 같다. 따라서 (2:3)에 (7:6)을 곱한 14:18=7:9이다
- **예제 2** : 필요 금액은 가격과 수량의 곱이다. 따라서 (2:3)에 (5:3)을 곱한 10:9이다.
- **예제 3** : 구매 가능한 수량은 금액을 가격으로 나눠준 값이다. 따라서 동일한 금액(1:1)으로 구매 가능한 수량은 1:1을 가격비율인 3:4로 나눠준 4:3이다.

그동안 정량적 계산 위주로 하다가 비례식으로 계산을 하려고 하면 조금 익숙하지 않을 것이다. 그러나 적응만 한다면 강력한 무기가 될 수 있으니 천천히 적응해보도록 하자.

2. 비례식의 연결

비례식을 구성하는 값은 단순히 비율만을 알려줄 뿐 실제값을 알려주지는 않는다. 이러한 특성으로 인하여 우리는 서로 다른 두 비례식에 대하여 임의의 값들의 비율을 즉각적으로 구할 수 없다. 예를 들어 $a:b=2:3$, $c:d=4:5$라고 해보자. 이 비례식에서 a와 d를 나타내는 값은 각각 2와 5이다. 그러나 이를 통해 a와 d의 비율이 2:5라고 단정지을 수는 없다. 이는 두 비례식에 대한 비례 상수가 다르기 때문이다. 이처럼 우리는 비례식을 구하는 과정에서 비례상수가 일치하지 않아 즉각적으로 어떠한 값을 비교하기 어려울 수 있다. 이를 해결하기 위해 비례식의 연결을 배워보도록 하자.

0.2.1 공통 문자를 통한 연결

$$a:b=2:3,\ b:c=4:3$$

위 비례식에서 a와 c에 해당되는 값은 2, 3이다. 그렇다면 $a:c=2:3$일까? 아니다. 우리가 $a:c$를 구하기 위해서는 이 둘의 실제값을 구한 뒤에 비율을 구해주어야 한다. 다르게 말하면 주어진 두 비례식의 비례 상수가 1이 되게끔 적당한 수를 곱해주고 나서야 비교가 가능함을 의미한다. 하지만 꼭 비례상수가 1이 아니여도 동일하기만 해도 즉시 비교가 가능하다는 사실을 알 수 있다. 따라서 $a:b$와 $b:c$의 비례상수를 동일하게 맞춰준다면 우리는 바로 $a:c$를 구하는 것이 가능하다. 이처럼 비례 상수를 동일하게 만들어주는 것을 본 교재에서는 **비례식을 연결한다**라고 표현한다.

두 비례식에서 b에 해당하는 값이 각각 3, 4인데 비례식에 어떠한 상수를 곱해서 b를 동일하게 맞춰주어야 한다(같은 b니까) 두 비례식에 대해 각각 4와 3을 곱해주면 아래와 같이 된다.

$$a:b=8:12,\ b:c=12:9$$

이제는 b가 동일해졌으니 우리는 $a:b:c=8:12:9$라고 쓸 수 있으며 $a:c=8:9$임을 알 수 있다. 두 비례식에 대해 4, 3을 곱하여 비례상수를 동일하게 맞춰주었는데 4와 3이라는 숫자는 어떻게 도출된 것인가? 우리는 비례 상수가 동일하다면 같은 b 나타내는 값이 동일해야한다 라는 조건을 이용한 것이다. 이처럼 서로 다른 비례식을 연결하기 위해서는 두 비례식에 대한 어떠한 조건을 이용해야한다.

비례식을 연결하기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 비례 상수를 일치시켜줘야한다. 앞의 예시를 표현하면 다음과 같다.

$$(3:4)\times \text{상수비} = 1:1,\ \text{상수비} = 4:3$$

이는 b를 구성하는 값인 3과 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 동일하게 맞춰주었음을 의미하며 곱해줘야 하는 상수의 비율이 4:3이라는 결과를 나타낸 것이다. 그래서 앞에서 두 비례식에 각각 4와 3을 곱하여 비례상수를 일치시켜준 것이다.

0.2.2 추가 조건을 통한 연결

이번엔 조금 다른 예시를 들어보도록 하겠다.

$$a:b=2:3,\ c:d=4:3,\ b:c=5:3\text{이다. } a:b:c:d\text{는?}$$

위 문항은 $a:b$와 $c:d$를 연결하라는것과 동일한 문항이다. 따라서 우리는 $a:b$와 $c:d$에 각각 어떠한 상수를 곱하여 $b:c=5:3$을 만족시켜야 한다. 따라서 b,c를 구성하는 3, 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 5:3으로 맞춰주어야 한다.

$$(3:4)\times \text{상수비} = 5:3,\ \text{상수비} = \frac{5:3}{3:4} = 20:9$$

따라서 두 비례식 $a:b$와 $c:d$에 대해 각각 20, 9를 곱해주면 다음과 같다.

$$a:b:c:d = 40:60:36:27$$

이젠 a~d에 대한 비율을 자유롭게 구할 수 있을 것이다. 물론, 비례식의 연결은 사실 물리보다는 화학에서 더 많이 쓰이는 편이기는 하나 알아두도록 하자. 간단한 예제를 준비하였다. 간혹 귀찮아서 그냥 숫자 끼워맞추기 식으로 푸는 경우가 있는데 상수비를 구하는 과정을 거쳐 풀어 비례식 계산에 적응하도록 하자. 끼워맞추기 숫자가 다소 복잡할 수 있다.

예제

$a:b:c:d$를 구하여라

- 예제 1 : $a:b=3:4, c:d=5:4, \quad a:d=4:7$
- 예제 2 : $a:b=5:3, c:d=2:1, \quad a:c=3:4$시오.

풀이

예제 1 : 3과 4에 어떠한 상수비를 곱하여 4:7이 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{4:7}{3:4}$로 16:21고 $a:b:c:d=48:64:105:84$다.

예제 2 : 5와 2에 어떠한 상수비를 곱하여 3:4가 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{3:4}{5:2}$로 $3:10$고 $a:b:c:d=15:9:20:10$다.

3. 정량값의 계산

0.3.1 배율에 따른 계산값의 변화

$a:b=2:3$이라 해보자. 그렇다면 a는 몇인가? 당연하게도 우리는 알 수 없다. 이처럼 우리는 비례식을 이용하여 문제를 풀어나갈것이나 실제값을 물어보는 문항도 있을터이다. 이 때 우리는 $a:b$의 구성요소인 2와 3에 어떠한 값을 곱하여 실제값으로 변환해주어야 하며 이는 해당 비례식의 비례상수를 1로 맞춰준다는 의미이다. $a:b=2:3$를 실제값으로 바꿔주기 위해서는 어떠한 조건이 추가로 필요할 것이다. 이러한 조건은 여러 가지가 있겠지만 대표적으로 많이 나오는 유형은 합, 차, 곱으로 주어지는 경우가 많다. 한번 아래 예제를 풀어보도록 하자.

예제

$a:b=2:3$이다. 각 상황별 a의 값과 b의 값을 구하시오.

예제 1 : $a+b=20$

예제 2 : $|a-b|=10.$

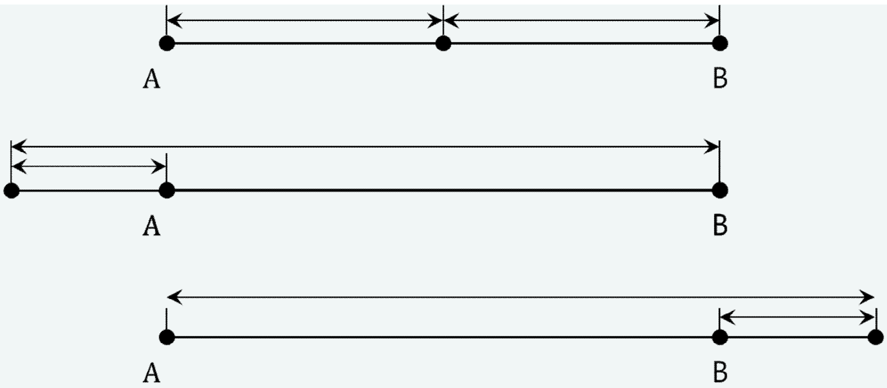
예제 3 : $ab=54$

답을 구해보았는가? 정답은 (a, b)순으로 (8, 12), (20, 30), (6, 9)이다. 사실 위 문항을 푸는 것은 어렵지 않을 것이다. $a=2k, b=3k$로 두면 당연히 풀릴테니 말이다. 그러나 조금 더 친근하게 다가가 보도록 하자.

$a:b=2:3$에서 2와 3의 합은 5, 차는 1이다. 이 2와 3을 n배 해주면 합, 차 모두 n배가 될 것이다. 그래서 문제를 풀 때는 합이 5인데 실제론 4배인 20이므로 4씩 곱하여 (8, 12)를 도출하고, 차가 1인데 실제론 10배인 10이므로 10씩 곱하여 (20, 30)을 도출하는 것이 보다 편할 것이다. 그렇다면 곱 조건은 어떻겠는가? $a=2k, b=3k$로 두면 $ab=6k^2$이니 이 경우에는 숫자를 n배 해주면 곱해준 값은 곱해준값의 제곱배로 늘어날 것이다. (만약 ab가 아니라 ab^2처럼 세 번 곱하는 방식이라면 세제곱이 될것이며 n번 곱하는 꼴이면 n제곱이 될 것이다.) 따라서 2와 3의 곱은 6인데 실제로는 9배인 54므로 9에 루트를 씌운 3을 각각 곱하여 (6,9)를 도출하는 것이 정량적 계산보다 편할 것이다.

0.3.2 내분점과 외분점

비례식도 생소할텐데 내분점과 외분점까지 나오니 당황스럽겠지만, 그래도 비례식을 사용할 때 내분점과 외분점은 빼놓을래야 빼놓을 수 없는 개념이다. 외분점과 내분점이 무엇인지는 알 것이다. 하지만 이 공식은 아마 잊은 사람들도 많을것이라 생각한다. 내분점과 외분점은 합과 차의 특성만 알고 있다면 쉽게 구할 수 있다. 각 구성요소들을 n배 해주면 이들의 합, 차 역시 n배가 된다. 이를 이용하면 외분점과 내분점을 쉽게 구하는 것이 가능하다.



그림은 각각 내분점, 외분점(좌측), 외분점(우측)을 나타낸 것이다. 포인트는 내분점으로부터 두 점까지의 거리의 합이 곧 두 점 사이의 거리이며, 외분점으로부터 두 점까지의 거리의 차가 곧 두 점 사이의 거리이다. 필자는 내분점과 외분점을 구할 때 아래와 같은 방법을 사용한다.

(1) 내분점

- 거리의 비율이 $a:b$라면 이에 대해 $a+b$로 나눠 $\frac{1}{a+b}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{a+b}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{a+b}$, $\frac{bk}{a+b}$이다.
  (합은 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

(2) 외분점 (좌측 기준)

- 거리의 비율이 $a:b$라면 (단, $a<b$) 이에 대해 차 $b-a$로 나눠 $\frac{1}{b-a}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{b-a}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{b-a}$, $\frac{bk}{b-a}$이다.
  (차는 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

이러한 정량적 계산 과정이 중요한 이유는 비율만을 계산하다가 문항에서 비율이 아닌 실제 값이 필요한 경우 당황할 수 있기 때문이다. 이럴 때는 당황하지 말고 문항에서 실제 값과 관련된 조건이 있는지 찾아본 뒤 이를 통해 실제값을 도출해주면 된다.
물론, 이러한 풀이를 문항에 적용하기 위해서는 앞으로 여러 과정을 거쳐야 할 것이다. 한번 맛보기로 간단한 예제를 통해 비례식을 통한 문제 풀이를 해보도록 하자. 아마 개념학습이 되어있다면 풀 수 있을 것이다.

예제

예제 1 : 두 물체 A와 B는 등가속도 운동을 통해 점점 빨라지고 있다. 두 물체에 작용하는 알짜힘의 비율은 각각 3:5이며 같은 시간 동안 증가한 속력의 크기는 1:2이다. 두 물체의 질량 비율은?

예제 2 : 두 물체 A와 B는 질량이 $1:2$, 운동에너지는 $2:9$이다. 두 물체의 속력 비율은?

예제 3 : 고정된 점전하 A, B가 있다. A와 B의 $a:b$ 내분점에 존재하는 점전하 C가 두 점전하 A, B에 의해 정지해 있을 때 A와 B의 전하량의 비율은?

풀이

예제 1 : 두 물체의 증가한 속력의 크기 $\triangle v$는 가속도와 시간에 비례한다.
조건에서 같은 시간(1:1)동안 증가한 속력의 크기가 1:2 이므로 가속도의 크기는 1:2이다.
가속도 a는 힘의 크기에 비례, 질량에 반비례한다. 따라서 $\dfrac{3:5}{질량비}=1:2$이고
질량비는 $\dfrac{3:5}{1:2}=6:5$이다.

예제 2 : 두 물체의 질량 m의 비율은 1:2, 운동에너지의 비율 즉, 상수를 제외한 mv^2은 2:9이다.
따라서 $\dfrac{mv^2비}{m비}=v^2비=\dfrac{2:9}{1:2}=4:9$로 v의 비율은 $2:3$이다.

예제 3 : 어떠한 두 점전하 사이에 작용하는 힘의 크기는 $\dfrac{q_1q_2}{r^2}k$로 점전하의 크기에 비례하고 거리의 제곱에 반비례 한다. 점전하 C는 A, B에 의한 전기력의 크기가 같으며 이는 1:1을 의미한다.
따라서 점전하 C의 전하량의 크기를 q_c라 하면 $1:1=\dfrac{(q_c비율)\times(q비율)}{a^2:b^2}\times k비율=\dfrac{q비율}{a^2:b^2}$
전하량의 비는 $a^2:b^2$이다.

만약 위 예제에 대하여 비슷하게 풀이를 하였다면 이제 본 교재를 학습할 준비가 되었을 것이다. 만약 아직 본 풀이가 익숙하지 않다면 다시 한번 복습 후 다음 파트를 학습할 것을 권장한다.

요약 아래의 특성들을 이용하여 이후 내용들을 전개해 나갈것이니 점검하도록 한다.

1) 비례식 간의 연산은 다음과 같은 방식을 따른다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \star & a' & : & b' & : & c' \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{a \star a' : b \star b' : c \star c'} \end{array}$$

위 방식의 계산은 곱셈, 나눗셈에 대하여 성립하며, 덧셈, 뺄셈은 비례상수가 동일 한 경우에 성립한다. 또한 계산하고자 하는 비례식이 두 개일 경우 덧셈 뺄셈은 어느 한쪽 비례식이 0:0일 경우에 성립한다.

2) 1:1, 1:1:1과 같은 비례식은 곱셈과 나눗셈에 영향을 주지 않으며 0:0, 0:0:0은 덧셈과 뺄셈에 영향을 주지 않는다.

3) 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대한 계산은 비례식간의 계산에서도 동일하게 적용된다. 이 때 관계식에 존재하는 상수는 비례식간의 계산에서 1:1로 취급되므로 제외하여도 상관없다. (삼각형의 넓이 공식 앞에 붙는 0.5처럼)

4) 비례식간의 곱셈 과정에서는 첫 번째 수부터 n번째 수까지 동일한 수로 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) × (3 : 6 : 4) = (1 : 2 : 5) × (3 : 6 : 2) = 3 : 12 : 10

5) 비례식간의 나눗셈 과정에서는 동일한 N번째 수에 대해 동일한 수로 한번씩 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) ÷ (3 : 6 : 4) = (2 : 2 : 5) ÷ (3 : 3 : 4) = 8 : 8 : 15
- 물론 위와 같은 단순화는 익숙하지 않으면 계산 후 최종 계산 결과를 단순화하여도 상관없다.

6) 1:1에 대하여 어떠한 비례식을 나눈 것을 역수비라 표현하며 구성요소가 두 개일 경우 편의상 반대비라 칭한다.

7) 동일하다(등호)는 1:1로 변환이 가능하다.

8) $k_1a = k_2b$ 는 $(k_1 : k_2) \times (a : b) = 1 : 1$로 변환이 가능하고, $k_1a = k_2b = k_3c$ 는 $(k_1 : k_2 : k_3) \times (a : b : c) = 1 : 1 : 1$로 변환이 가능하다.

9) 서로 다른 비례식은 비례상수가 동일 하지 않으면 어떠한 값들의 비율을 바로 구하는 것이 불가능 하며 이러한 비례식들의 비례상수를 일치시키는 것을 비례식을 연결 한다 라고 표현한다. (본 교재 한정)

10) 비례상수를 일치시키기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 어떠한 조건을 만족하는 방향으로 식을 세워 곱해주어야 하는 상수의 비를 구하도록 한다.

11) 비율을 실제값으로 변환하기 위해서는 문제상에서 주어진 조건을 바탕으로 추론하며 주로 합차 또는 곱의 조건이 일반적으로 출제된다. 합차 조건의 경우 비례식 구성요소의 합차가 실제값과 몇 배 차이 나는지 구하여 해당 배수를 곱한다. 곱 조건의 경우 비례식 구성요소의 곱이 실제값과 몇 배 차이나는지 구한 뒤 n제곱근을 씌워 이를 곱한다.

12) 내분점과 외분점을 구할 때에는 값들을 n배 하면 합, 차도 n배가 뒤는 특성을 이용하여 구하도록 한다.