극한과 연속

by. 호쌤

1. 함수의 극한

1) 함수의 극한의 뜻

수렴의 정의: $f(x)$에서 x의 값이 a와 다른값을 가지면서 a에 한없이 가까워질때 $f(x)$의 값이 k에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 k에 수렴한다고 하고 이때, k를 극한값 또는 극한 이라고 한다.

표기 ⇒ $\lim_{x\to a} f(x) = k$ or $x\to a$ 일때 $f(x)\to k$

cf) 극한값과 함숫값

$x\to a$ $\quad$ $x=a$

ex) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & (x\neq 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$ 일때 극한값과 함숫값?

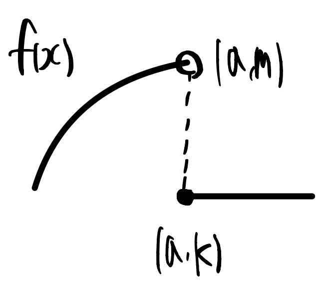
2) 좌극한과 우극한

$x\to a-$ $\quad$ $x\to a+$

$\longrightarrow$ $\quad$ $\longleftarrow$

☆ tip.
- $x\to 1-$: 0.9xx
- $x\to -2-$: -2.1xx
- $x\to 3+$: 3.1xx

ex)



좌극한: $\lim_{x\to a-} f(x) = m$

우극한: $\lim_{x\to a+} f(x) = k$

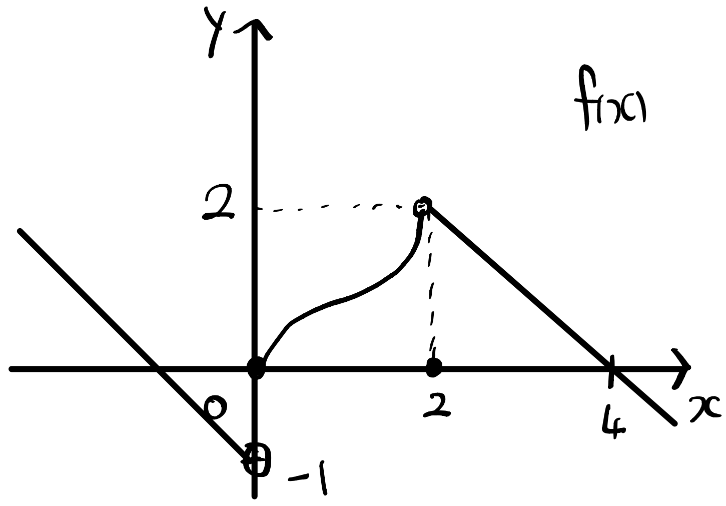
3) 극한값의 존재

좌극한과 우극한이 ①존재하며 그 ②값이 같으면 극한값이 존재

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = k \iff \lim_{x \to a} f(x) = k$$

cf)

ex)



① $\lim_{x \to 0+} f(x)$

② $\lim_{x \to 0} f(x)$

③ $\lim_{x \to 2} f(x)$

④ $\lim_{x \to 4-} f(x)$

4) 합성함수의 극한

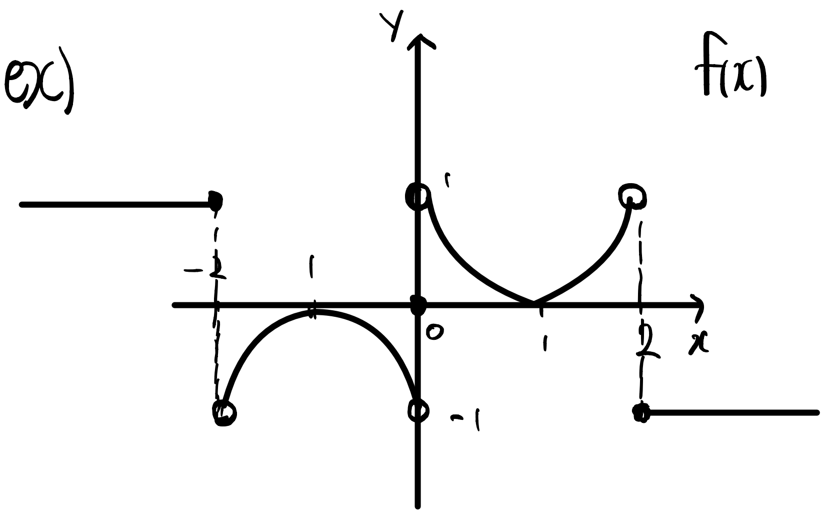
✓ $g(f(x))$의 극한 ⇝ $f(x)$와 $g(x)$ 각각 따로 그려서 구하기

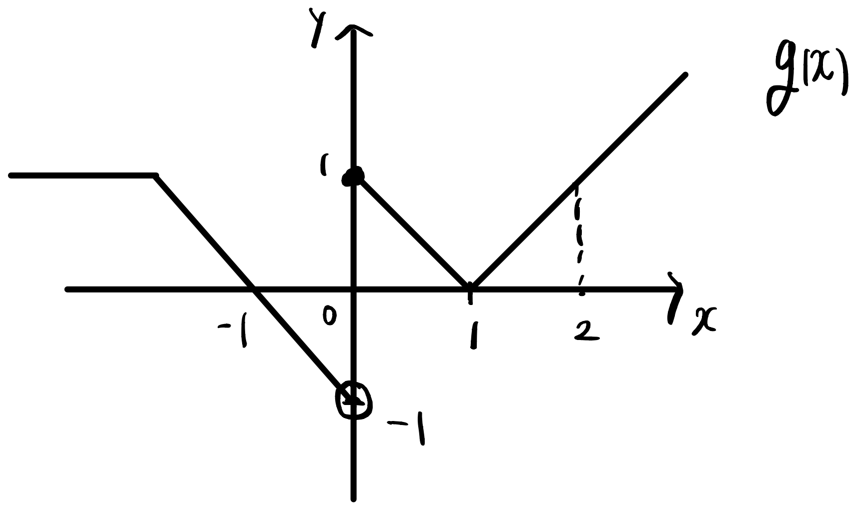
① $a^- \xrightarrow{f} \begin{matrix} b\pm \\ b \end{matrix} \xrightarrow{g} \alpha$

② $a^+ \xrightarrow{f} \begin{matrix} c\pm \\ c \end{matrix} \xrightarrow{g} \beta$

$\alpha=\beta$ 이면 극한값 존재

ex)





① $\lim_{x\to 0} g(f(x))$

② $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

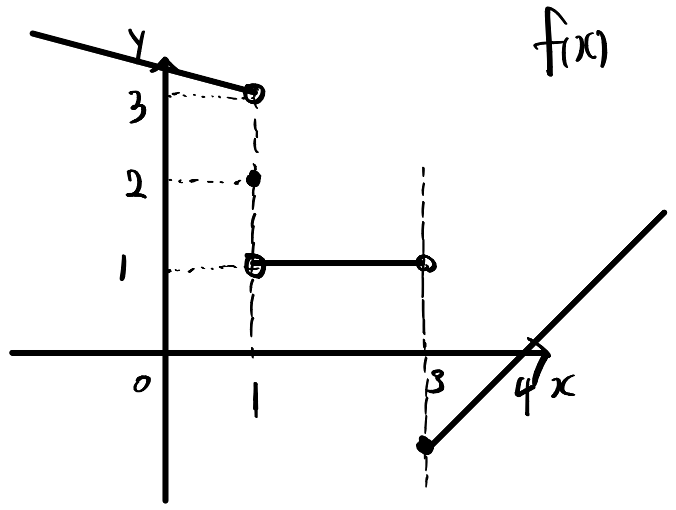
③ $\lim_{x\to -2} g(f(x))$

④ $\lim_{x\to -1} f(g(x))$

⑤ $f(\lim_{x\to 1} g(x))$

cf) $\lim \Rightarrow$ 값

ex)



f(x)

$$\lim_{x\to -1-} f(x^2) + \lim_{x\to 2-} f(5-x)$$

5) $x\to a$일때 함수의 발산

① 무한대 ⇒ ∞ (숫자아닌 기호)

(한없이 커지고 있는 상태)

② 발산 = 수렴 X

③ $\frac{c}{0}$꼴 ⇝ $\pm\infty$

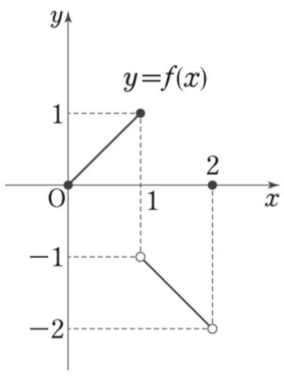
ex) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} =$

$\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) =$

$\lim_{x\to -\infty} f\left(\frac{4x-1}{x+1}\right) =$

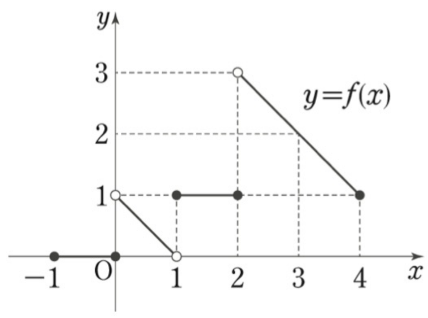
연습문제

정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0, 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은? [4점]



① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x) < \lim_{x \to 1+} f(x)$

ㄴ. $\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$

ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 함수의 극한값의 계산

1) 함수의 극한의 성질

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$ (α, β는 실수) ⇒ 수렴할때

↳ 사칙연산 모두 가능 (÷는 '분모=0' 일때 주의)

예제

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}(x+1)f(x) = 1$을 만족시킬 때,

$\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x) = a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

Sol1) 수렴하는 함수들로 표현

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+1}{x+1}\right)\times\left\{(x+1)f(x)\right\} = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$$

Sol2) 수렴하는 부분 먼저계산

$$\lim_{x\to 1}(\cancel{x+1})f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x) = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

기본 ⇒ 모두 수렴하는 함수로 표현

실전 ⇒ 수렴하는 부분 먼저 계산 (단, '수렴하는 부분 = 0' 제외)

2) 극한값 계산 (부정형 네가지)

극한식
- 부정형X (확정형) $\frac{c}{\infty}$ / $\frac{c}{0^+}$ $(c>0)$ / $\frac{\infty}{0^-}$
- 부정형O
  ① $\frac{0}{0}$꼴
  ② $\frac{\infty}{\infty}$꼴
  ③ $0\times\infty$꼴
  ④ $\infty-\infty$꼴

✓ 부정형

① $\frac{0}{0}$꼴 ⤳ 0의 개수 파악.

cf) 0의 개수?

↳ 인수의 개수를 뜻함 $\lim_{x\to1}(x-1)$

↳ 0개수 한개

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$$

i) f(x)의 0개수 < g(x)의 0개수 ⟶ 극한값 = 0
(분모) (분자)

ii) 분모의 0개수 = 분자의 0개수 ⟶ 인수분해 → 극한값 = ~~~

iii) 분모의 0개수 > 분자의 0개수 ⟶ 극한값 존재 ✕

② $\frac{\infty}{\infty}$꼴 ⤳ 최고차

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Sol₁) 기본 ⇒ 최고차항으로 분모와 분자 나눠서 $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0$ 이용

Sol₂) 실전 ⇒ f(x)와 g(x)의 최고차항 비교

i) 분모의 차수 = 분자의 차수 ⇒ $\frac{\text{분자의 최고차 계수}}{\text{분모의 최고차 계수}}$ 로 수렴

ii) 분모 〃 > 분자 〃 ⇒ 0

iii) 분모 〃 < 분자 〃 ⇒ 발산

③ $0 \times \infty$ 꼴 ⤳ $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형

④ $\infty - \infty$ 꼴 ⤳ $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형

☆ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right) \xrightarrow{\text{변형}} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$ 꼴로 변형후 계산

tip. $\sqrt{\text{이차식}}$ 일때 사용할 수 있는 방법

↳ 완전 제곱식 꼴로 만들어준 뒤 남은 상수항 무시하고 계산

ex) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+8} - \sqrt{x^2-4x+1}\right)$

$= \sqrt{(x+1)^2+\cancel{7}} - \sqrt{(x-2)^2-\cancel{3}}$

$= (x+1) - (x-2) = \boxed{3}$

✓ $x \to -\infty$ 일때 함수의 극한값 계산

↳ $-x = t$ 로 치환해주기

예제

① $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

② $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-1}$

③ $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

④ $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$

⑤ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^3+2x}$

⑥ $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

⑦ $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$

⑧ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-4x}{\sqrt{9x^2+1}+x}$

⑨ $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right)=3$ ⇝ a의 값?

3) 함수의 극한의 대소관계 (샌드위치 정리)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ 일때, a에 가까운 모든 x에 대하여

① $f(x) \le g(x)$ 이면 $\alpha < \beta$

② $f(x) \le h(x) \le g(x)$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$.

ex) $f(x)$가 모든 양의 실수에 대해 $\frac{x}{x^2+3} < f(x) < \frac{x}{x^2+1}$ 를 만족시킬때

$\lim_{x \to \infty} x f(x)$ 의 값?

3. 다항함수의 결정

1) 부정형 풀이 guide

① 꼴 파악
- i) $\frac{0}{0}$꼴
- ii) $\frac{\infty}{\infty}$꼴

② 분모 & 분자 비교
- i) $\frac{0}{0}$꼴 → 분모, 분자의 0개수 파악
- ii) $\frac{\infty}{\infty}$꼴 → 분모, 분자의 최고차 차수 파악

③ 계산
- i) 0개수 동일하면 → 인수분해
- ii) 차수 동일하면 → 최고차 계수비교.

꼴 파악 → 분모, 분자 비교 → 계산

✓ 미정계수의 결정

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 → $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이면 → $\lim_{x\to a}g(x)=0$

연습문제

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} f(x) = -7$

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가

$$f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\ \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

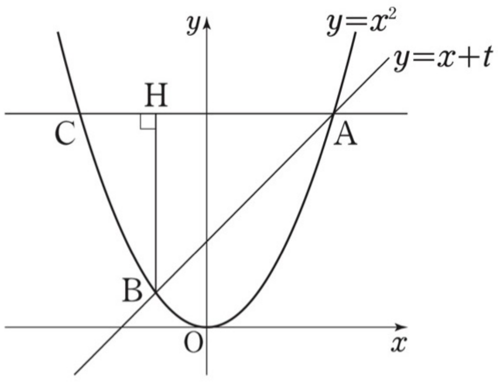
다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5, \ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

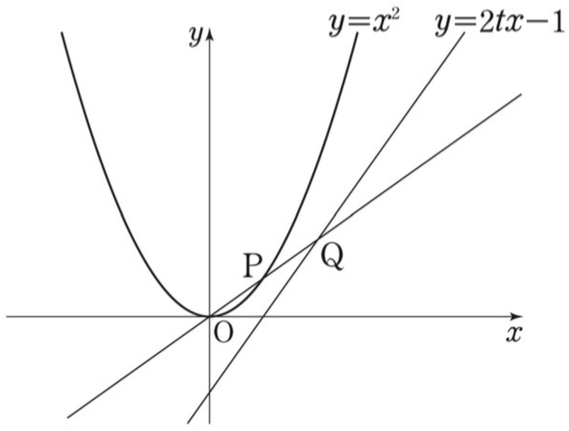
실수 $t\ (t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

그림과 같이 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

(k)

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

2) 다항식을 결정하는 두가지 방법

✓ 다항함수 $f(x)$의 결정

↳ n차함수는 $(n+1)$개의 미지수를 갖는다.

↳ '미지수 개수 = 식 개수' → 결정

↳ ∴ $(n+1)$개의 식(조건)이 있으면 풀린것!!

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ ⇒ 3개의 미지수 $a.b.c$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

↓ 3개의 식 필요.

✓ 다항식 결정 방법

① 인수 컨트롤 (차함수)

☆ 인수정리

↳ $f(x)$는 다항함수 일때,

$$f(\alpha)=0 \iff f(x)=(x-\alpha)P(x)$$

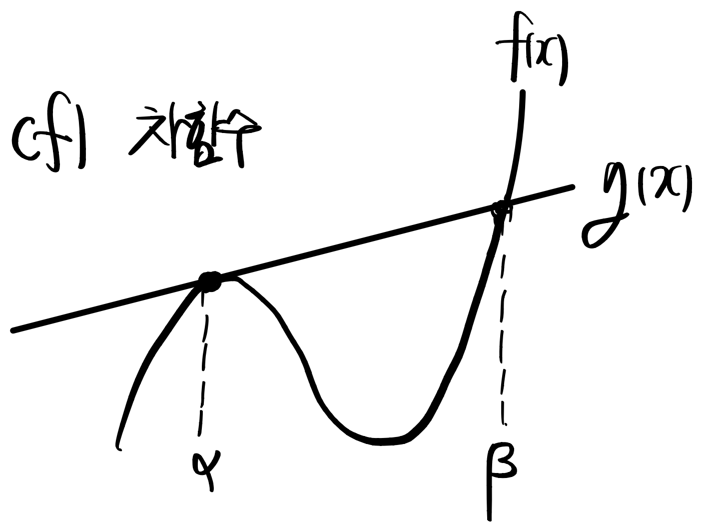
$$f(\alpha)=0.\ f'(\alpha)=0 \iff f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

cf) 그래프 관점 ⤳ $f(x)$가 $x=\alpha$에서 x축을 지나면서 접함.

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$f(3)=0$, $f(2)=0$. $f'(2)=0$ 만족, $f(4)=?$

cf) 차함수

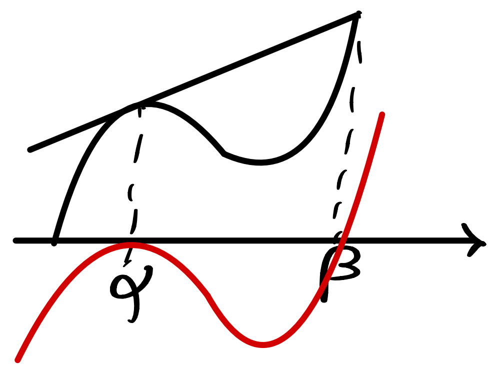


$f(\alpha)=g(\alpha)$ 일때 y= f(x). or y=g(x) 따로 다루는경우 있지만

'$f(\alpha)-g(\alpha)=0$' 로 변형후 y= f(x)-g(x) or y=0의 교점을 다루기☆

• $h(x)=f(x)-g(x)$

h(x) $x=\alpha$ 에서 접하고 $x=\beta$를 지남.
(중근) (실근)



cf) 차함수의 직관적 이해 ⇒ 함숫값 $h(a)=0$ ⤳ $f(a)=g(a)$
$x=a$에서 교점

☆ 조건 만족하는 차함수 직접 설계

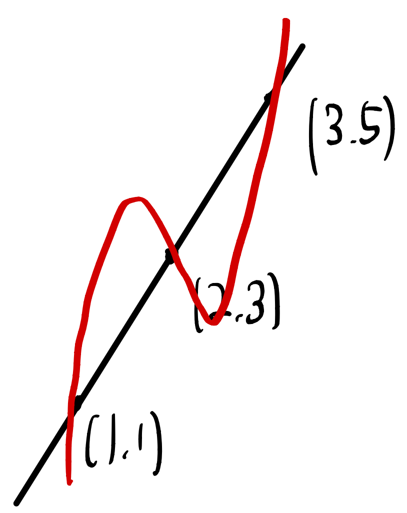
ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)가
$f(1)=\underline{1}$. $f(2)=\underline{3}$. $f(3)=\underline{5}$ $f(4)$는?

$g(x)=2x-1$

$h(x)=f(x)-g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x-1$

<u>tip</u> 그래프 고려하면서 차함수 설정



ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$f(1)=2.$ $f'(1)=0$ $f(3)=6$

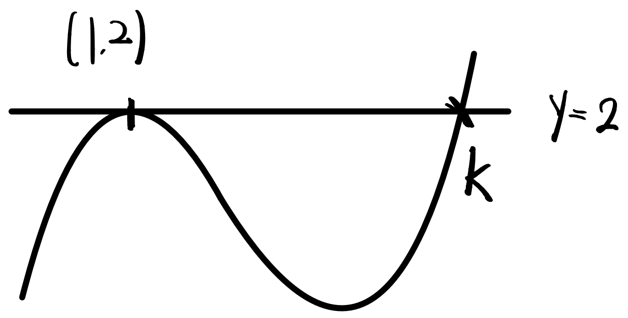
$g(x)=2.$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)+2.$

$h(x) = f(x)-g(x) = (x-1)^2(x-k)$

$f(3)-g(3) = 4(3-k) = 4 \Rightarrow k=2$

tip 차함수는 직선으로 설정하는게 유리.



($k>2$ 인 상황일때)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

② 전개식 활용 (최저차)

✓ $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=k \quad (k\neq 0)$

$f(x)=x^3 g(x)$

$g(0)=k$

최저차

$\therefore f(x)=\square x^n+\cdots+kx^3$

✓ $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=a$

$f(x)=\cdots\cdots+ax^n$

$n\Rightarrow$ $f(x)$의 최저차 차수

$a\Rightarrow$ $f(x)$의 최저차 계수

✓ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^3}=k \quad (k\neq 0)$

$x\to x-a$

$f(x)=(x-a)^3 g(x)$

$g(a)=k \qquad g(x)=\sim\sim+k$

식 전체를 $(x-a)$로 묶었을때 최저차

$\therefore f(x)=\square(x-a)^n+\cdots\cdots+k(x-a)^3$

✓ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}=p$

$f(x)$를 $(x-a)$로 묶었을때

$n\Rightarrow$ $f(x)$의 최저차 차수

$p\Rightarrow$ $f(x)$의 최저차 계수

ex) $f(2)=4$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=3$ 일때 삼차함수 $f(x)$는?

Sol1) $f(x)=a(x-1)^3+3(x-1)^2$

$f(2)=a+3=4$ $\quad a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2$

Sol2) $f(x)=(x-1)^2(ax+b)$

$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x+2)$

plus $f(0)$. $f'(0)$. $f(a)$. $f'(a)$

✓ $f(0)$ & $f'(0)$

$f(x)=\square x^n+\cdots+px+q$ $\qquad f(0) \Rightarrow$ 상수항

$f(0)=q$, $f'(0)=p$ $\qquad f'(0) \Rightarrow$ 일차항

✓ $f(a)$ & $f'(a)$

$f(x)=\square(x-a)^n+\cdots+p(x-a)+q$ $\qquad f(a) \Rightarrow$ 상수항

$f(a)=q$ $\quad f'(a)=p$ $\qquad f'(a) \Rightarrow$ 일차항

tip $f(a)$. $f'(a)$. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}$ 사용할때 실수주의!

$f(x)=\square x^n+\Delta x^{n-1}+\cdots+k(x-a)^2$ (X)

x 대신 $\rightarrow$ $x-a$

$f(x)=\square(x-a)^n+\cdots+k(x-a)^2$ (O)

3) 극한식을 바라보는 두가지 관점

✓ $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a} = q$$

① 함수의 극한 관점

↳ $f(x)-p = (x-a)g(x)$, $g(a)=q$

★ 0의 개수 비교 중요. (특히, 0의 개수 많을때)

② 미분계수 관점

↳ $f(a)=p$. $f'(a)=q$

★ 극한식 1개 ⇒ 기본적으로 조건 2개

⇒ 미지수 2개 지워주는 장치

★ x좌표의 함숫값& 미분계수 알기 때문에 차함수 이용도 가능

연습문제

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3 f(x)}=4$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은?

[4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$

(나) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

ⓚ

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]