1. 2015년 11월 수능 가형 30번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

일 때, $\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점][1]

2. 2016년 6월 평가원 가형 21번

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] 2)

보기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 2010년 수능 나형

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x) = f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x)$이다.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점][3)]

[보기]
ㄱ. $f(-1) = f(1)$이고 $f'(-1) = f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1) < 0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1) > 0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c) = 0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 2008년 수능 나형

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha, \beta, \gamma\,(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

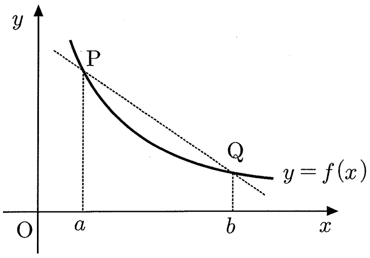
[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점][4)]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 2005년 수능 나형

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $P(a,f(a))$, $Q(b,f(b))$를 나타낸 것이다.



함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점][5)]

ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다.
ㄴ. $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.
ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}\,dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 포카칩 N제 24번

이차함수 $f(x)=x^2-ax$ 와 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 중심이 $(t, f(t))$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이 있다. 이 원 위의 점 Q 에 대하여 선분 OQ 의 길이의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자.
$g(t)$ 가 두 점에서만 미분가능하지 않을 때, a^2+4r^2 의 값을 구하시오.
(단, a 와 r 은 양의 상수이고, O 는 원점이다.) [4점] [6)]

1) 35

[출제의도] 정적분의 성질과 연속함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

(나)에 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$ …… ㉠

(나)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

$\therefore\ \{f'(x)\}^2=4-2f(x)$ (단, $f'(x)\ge 0,\ f(x)\ge 2$)…… ㉡

$x\le b$일 때

$f'(x)=2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$4a^2(x-b)^2=4-2\{a(x-b)^2+c\}$ …… ㉢

㉢이 $x\le b$인 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2=-2a$이고 $4-2c=0$이다.

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2},\ c=2$

따라서 $x\le b$일 때

$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-b)^2+2$

이때 $b<0$이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다.

$\therefore\ b\ge 0$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{2}b^2+2=0$

$\therefore\ b^2=4$

$\therefore\ b=2\,(\because\ b\ge 0)$

이때 ㉡에서 $f'(x)\ge 0$이고 $f(x)\le 2$이므로

$x>b$일 때 $f(x)=2$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)dx&=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx\\&=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx\\&=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+\Big[2x\Big]_2^6\\&=\left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)\\&=12-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ p+q=3+32=35$

2) 정답 ①

ㄱ. (가), (나)에 의하여

$f(x) = -f(-x)$ 이고 $f(-x) \neq 1$이므로 $-f(-x) \neq -1$ 이다.

$\therefore\ f(x) \neq -1 \quad \therefore$참

ㄴ. $f(x)$는 전 구간에서 미분 가능하고 연속인 원점 대칭 함수이므로 반드시 원점을 지나야 한다.

또한 $f(x) \neq 1,\ f(x) \neq -1$ 이기 위해

$f(x)$은 -1과 1 사이여야 한다.

$\therefore\ -1 < f(x) < 1$

(다)에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

$\therefore\ f'(x) > 0$

함수 $f(x)$는 전 구간에서 증가한다. $\therefore$거짓

ㄷ. $f'(x) = 1-\{f(x)\}^2$

양변을 미분하면 $f''(x) = -2f(x)f'(x)$

$(0,0)$에서만 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점은 오직 하나이다. $\therefore$거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

다른 풀이

ㄷ에서

$f(x)=-f(-x)$

$f'(x)=(1+f(x))(1-f(x))$

$\frac{f'(x)}{(1+f(x))(1-f(x))}=1$

$\frac{f'(x)}{(f(x)+1)(f(x)-1)}=-1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)-1}-\frac{f'(x)}{f(x)+1}dx=\int -2dx$

$\ln|f(x)-1|-\ln|f(x)+1| = -2x+C$

$f(0)=0$이므로

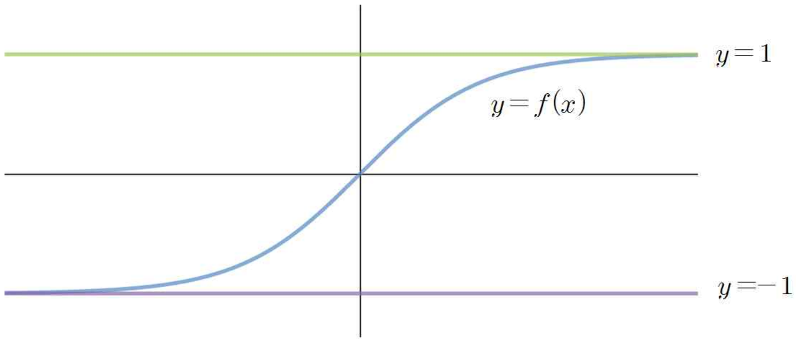
$\therefore C=0$

$-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=e^{-2x}$

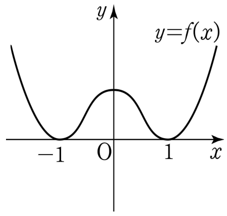
$1-f(x)=e^{-2x}f(x)+e^{-2x}$

$(e^{-2x}+1)f(x)=1-e^{-2x}$

$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

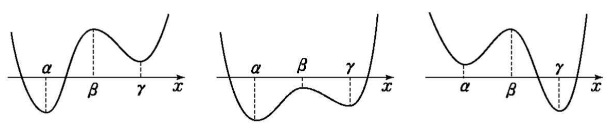


3) ③
ㄱ. (참) $g(x+2)=g(x)$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 $-1 \le x<1$ 일 때의 함수 $f(x)$ 의 그래프가 주기적으로 반복된다.
한편, $f(-1)=f(1)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 연속이다.
또한, $-1<x<1$ 에서 $f(x)$ 는 다항함수이므로 미분가능하고, $f'(-1)=f'(1)$ 이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. (거짓) [반례] $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ 이라 하면 $f(-1)=f(1)=0$,
$f'(-1)=f'(1)=0$ 이므로
$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만
$f'(0)f'(1)=0$



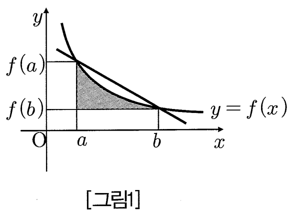
ㄷ. (참) $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$ 이므로 $f'(-1)>0$
한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ 이고
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여
구간 $(-\infty, -1)$ 에 $f'(c)=0$ 인 c 가 존재한다.
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4) ③
조건을 만족하는 사차함수의 그래프는 다음 셋 중의 하나이다.

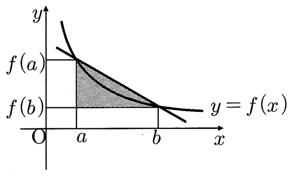


ㄱ. $x=\beta$ 에서 극대값을 갖는다. [참]
ㄴ. 위의 $i), ii), iii)$ 에서 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. [참]
ㄷ. $f(\alpha)>0$ 이면 $f(x)=0$ 은 β 보다 큰 두 실근을 갖는다. [거짓]

5) ③
ㄱ. $[a, b]$ 에서 $F'(x)=f(x)>0$ 이므로 $F(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 증가한다. [참]
ㄴ. (직선 PQ의 기울기)$=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 이므로 직선 PQ의 기울기가 일반적으로 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 와 같다고 할 수는 없다. [거짓]
ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx$ 는 [그림 1]의 어두운 부분의 넓이이고, $\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ 는 [그림 2]의 직각삼각형의 넓이이다.
$\therefore \displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ [참]



[그림1]



[그림2]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6) 풀이는 '욦구나 고선수'의 모집합 파이널 강의에 있는 고선수 풀이를 강추합니다.
참 아름다운 풀이를 보게 될겁니다.
(내가 쓴거야 ㅋㅋㅋ)