〔 2016년 09월 평가원 수학(나형) 20번 〕

20. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

sol)

삼차함수는 극값을 갖지 않는 개형이거나, 혹은 극값을 두 개 갖는 개형인데

(가) 조건에 의해서 $f(x)$는 두 개의 극값을 가져야 함을 알 수 있다.

미분가능한 함수의 극값은, 도함수의 부호변화가 일어나는 지점에서 발생하는데

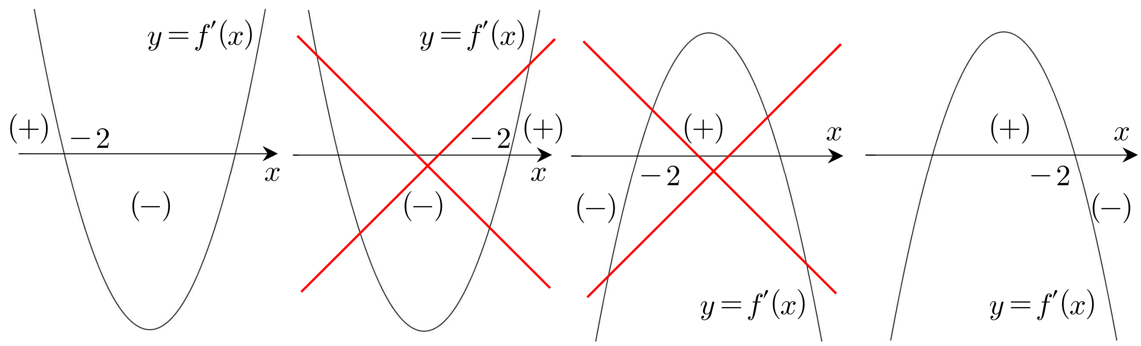
$f'(x)$는 이차함수로서 x축과 -2에서 교점을 가져서 부호변화가 일어났다고 하면

다른 점에서도 반드시 부호변화가 일어나야 한다.

$x=-2$에서 극댓값이라 하였으므로 $f'(x)$는 $(+)$에서 $(-)$로 부호가 바뀌었으므로

$x\neq-2$인 곳에서는 $f'(x)$가 $(-)$에서 $(+)$로 바뀌어야 할 것이다.

그리고 (나) 조건을 고려하지 않았을 때 가능한 상황은 다음 중 두 가지 뿐이다.



그런데 (나) 조건에 의하면 $f'(x)$는 $x=0$ 대칭이어야 한다.

수식으로 보이려고 하더라도, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 두었을 때

(나) 조건을 만족하기 위해서는 $f'(x)-f'(3)=a(x+3)(x-3)$이어야만 하고,

정리해보면 $f'(x)=ax^2-9a+f'(3)$으로서 $x=0$ 대칭임을 알 수 있다.

그래서 개형으로 따지자면 $a>0$인 맨 왼쪽의 모습이어야만 할 것이다.

혹은 $f'(-2)=4a-9a+f'(3)=-5a+f'(3)=0$에서 $f'(3)=5a$를 대입했을 때

$f'(x)=ax^2-9a+5a=a(x^2-4)$이므로 $f'(-2)=0$ 이외에도 $f'(2)=0$임을 알 수 있다.

또한 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌기 위해서는

$a>0$일 수 밖에 없다.

따라서 $f'(x)\geq f'(0)=-4a$가 되어 ㄱ은 참이다.

$f'(x)=a(x^2-4)$를 적분해보면 적당한 적분상수 C를 이용하여

$f(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}-4x\right)+C$라 할 수 있다.

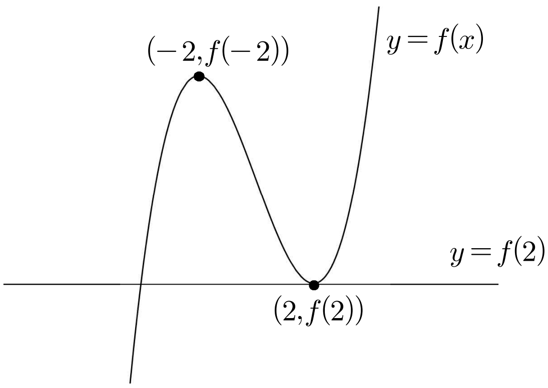
이때 $f(2)=a\left(\dfrac{8}{3}-8\right)+C=-\dfrac{16}{3}a+C$로서

방정식 $f(x)=f(2)$를 풀어보면

$$a\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)+C=-\frac{16}{3}a+C \quad\rightarrow\quad \frac{x^3}{3}-4x=-\frac{16}{3}$$

으로서 $x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)=0$이 되어 ㄴ은 참이 된다.

이를 기하적으로 살펴보자면,　　이때 반드시 x축과 y축을 나타낼 필요는 없다.



(가)에서 $f'(-2)=0$이었고, (나)에서 $f'(x)$가 $x=0$ 대칭으로 $f'(2)=0$이고

$f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다는 사실로부터

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$는 서로 다른 두 교점을 갖는다는 것을 알 수 있다.

특히 $x=2$에서는 이중근을, 다른 근인 $x=-4$에서는 단일근을 갖는다.

따라서 삼차방정식 $f(x)=f(2)$의 세 실근이 $x=-4,2,2$인데,

서로 다른 두 실근만 생각하자면 $x=-4,2$로서 두 개가 있다고 볼 수 있는 것이다.

마지막으로 ㄷ은 그럴싸한 보기인데 확실하게 따지고자,

$f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)+C$ $(a>0)$이라 두고서 수식으로 확인을 해보자.

$f'(x)=a(x^2-4)$에서 $f'(-1)=-3a$이고, $f(-1)=\frac{11}{3}a+C$이므로

점 $(-1,f(-1))$에서 그은 접선의 방정식은 $y-\left(\frac{11}{3}a+C\right)=-3a(x+1)$이 되고,

여기에 $x=2$를 대입해보면 $y=-9a+\left(\frac{11}{3}a+C\right)=-\frac{16}{3}a+C$가,

$f(2)=a\left(\frac{8}{3}-8\right)+C=-\frac{16}{3}a+C$와 일치하므로 ㄷ은 참이 된다.

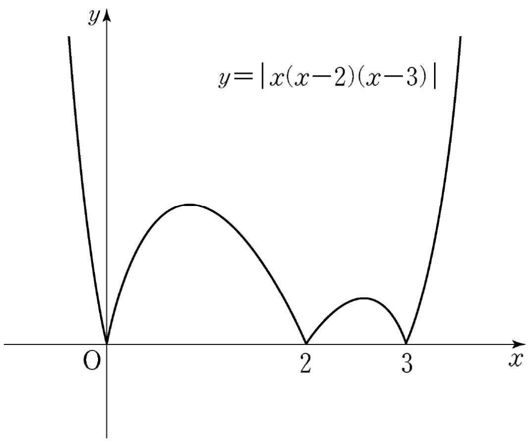
따라서 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

〔 2016년 09월 평가원 수학(나형) 21번 〕

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3) \rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



sol)

우선 $y=|x(x-2)(x-3)|$이라는 함수를 관찰해보자.

절댓값을 취하기 전의 삼차함수인

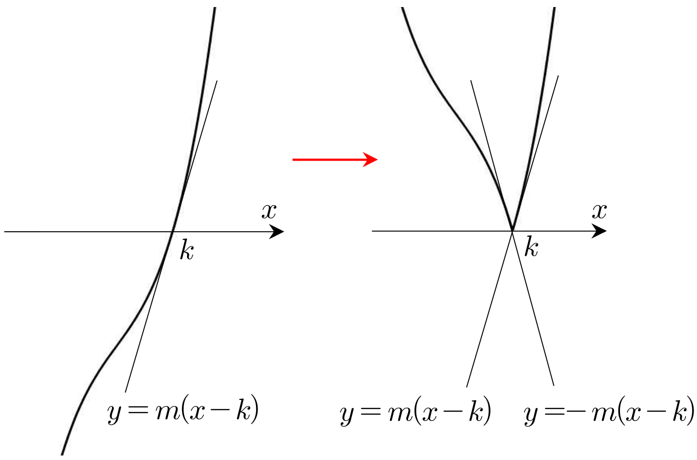
$$y=x(x-2)(x-3)=x(x^2-5x+6)=x^3-5x^2+6x$$

에 대하여 $y'=3x^2-10x+6$으로서 $x=0$, $x=2$, $x=3$에서의 미분계수가 순서대로 $6, -2, 3$임을 알 수 있다.

즉, 어떤 함수가 $x=k$에서 x축과 교점을 갖고, 미분계수가 m인 상태에서 그 함수 전체에 절댓값을 씌워주면 $x=k$에서 첨점을 갖고,

좌우미분계수가 $-m,+m$이 된다는 것이다.

그리고 이 사실을 아주 잘 인지하고 있어야 문제를 수월하게 풀 수 있다.



그러면 $y=|x(x-2)(x-3)|$에 대해서는 $x=0, x=2, x=3$에서 첨점을 갖길, 좌우미분계수가 순서대로 $-6,+6$과 $-2, +2$와 $-3, +3$이 된다.

다음으로 사차함수 $f(x)$를 생각해보자.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 $0, 2, 3$뿐이라 하였으므로 최고차항의 계수를 $-a<0$이라 두었을 때 $0, 2, 3$중 하나는 반드시 중근으로 갖는 꼴로서

$$f(x)=-ax^2(x-2)(x-3)$$

$$f(x)=-ax(x-2)^2(x-3)$$

$$f(x)=-ax(x-2)(x-3)^2$$

만이 가능함을 알 수 있다.

왜냐하면 $f(x)=-ax(x-2)(x-3)(x-p)$라 하였을 때

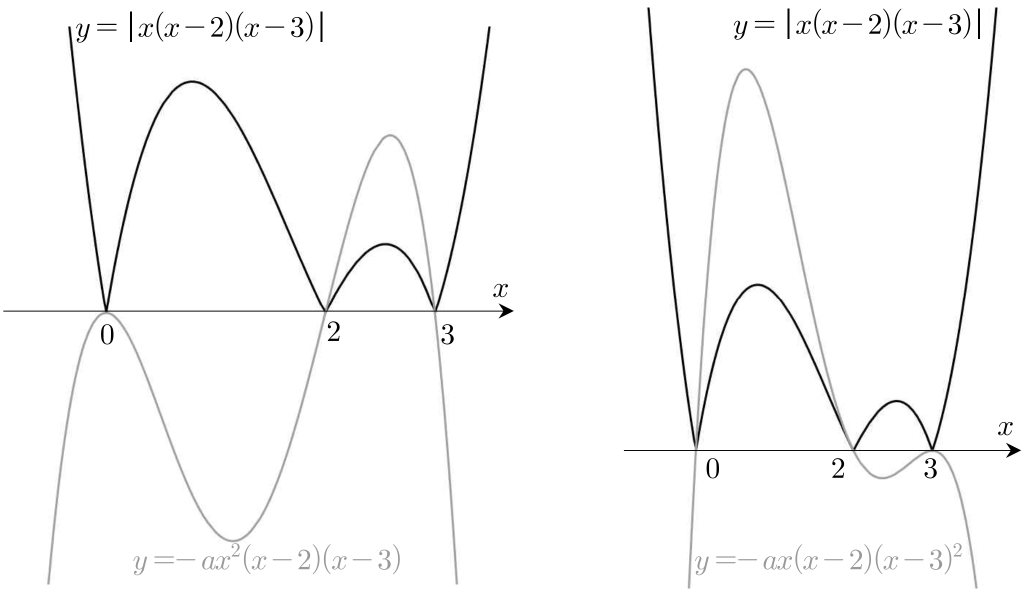
$f(p)=0$로서 p는 실수이기 때문이다.

사차함수를 비롯한 다항함수의 정의 자체가

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

에서 계수들 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$를 모두 실수로 한정한다.

예컨대 $x=0$과 $x=3$에서 각각 중근을 갖는 경우를 살펴보자.



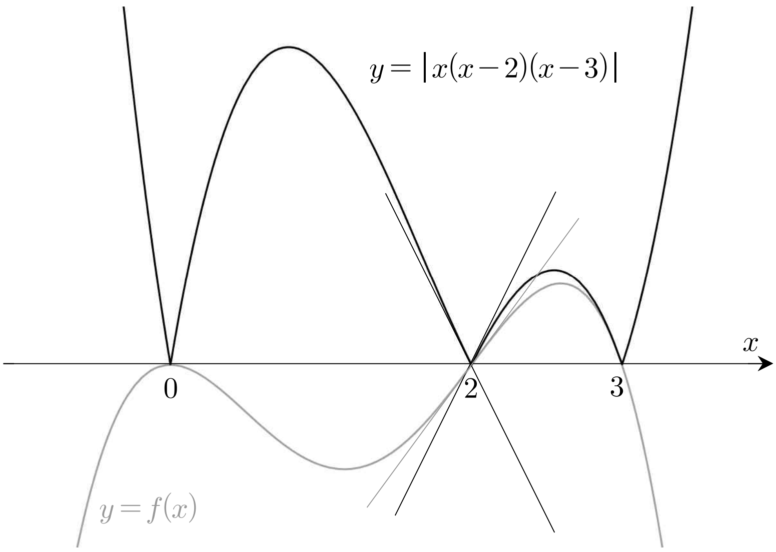
$g(x)$는 포개어진 두 곡선 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중에서

아래쪽에 있는 곡선 경로만을 따라간다는 것에 주의하자.

일단 위에 예를 든 상황에서는 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속임은 자명하지만,

$g(x)$가 전부 미분불가능한 첨점을 두 개씩 갖는다.

그래서 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서 첨점이 없어야 할 것이다.



따라서 $f(x)=-ax(x-2)(x-3)(x-p)$ $(p=0,2,3)$이라 두었을 때

$f'(0)\le 6$, $f'(2)\le 2$, $f'(3)\le 3$이기만 하면 $g(x)$는 조건을 만족할 것이다.

사실 프로 수험생이라면 지금까지 살펴본 내용들이 너무너무너무 당연해서

문제를 읽은 뒤 거의 곧바로 이렇게 식을 세울 수도 있다.

일단 $f(x)=-ax(x-2)(x-3)(x-p)$에서 $f(1)=-2a(1-p)$이고,

$$f'(x)=-a(x-2)(x-3)(x-p)-ax(x-3)(x-p)-ax(x-2)(x-p)-ax(x-2)(x-3)$$

에서 $a>0$이고 p는 $0, 2, 3$ 중의 하나만을 취할 수 있음에 주의해서 부등식을 찾길

$$f'(0)=6ap\le 6 \quad\rightarrow\quad ap\le 1$$

$$f'(2)=2a(2-p)\le 2 \quad\rightarrow\quad a(2-p)\le 1$$

$$f'(3)=-3a(3-p)\le 3 \quad\rightarrow\quad a(p-3)\le 1$$

다시 $p=0$일 때, $0<a\le\frac{1}{2}$로서 $f(1)=-2a<0$이고,

$p=2$일 때, $0<a\le\frac{1}{2}$로서 $f(1)=2a\le 1$이고,

$p=3$일 때, $0<a\le\frac{1}{3}$로서 $f(1)=4a\le\frac{4}{3}$이 되어서

$f(1)$의 최댓값은 $a=\frac{1}{3}$, $p=3$일 때에 해당하는 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x-2)(x-3)^2$에서

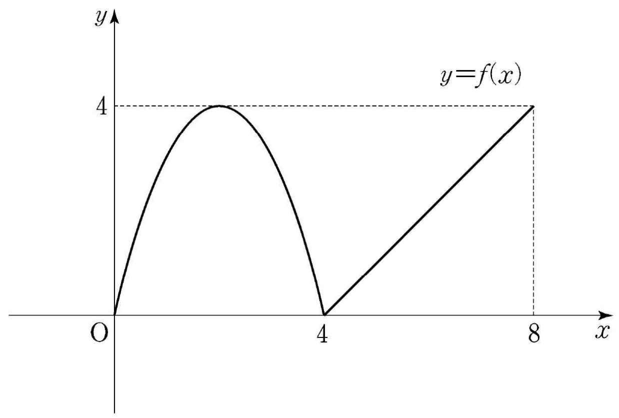
$f(1)=\frac{4}{3}$으로 최대이다. 따라서 ② $\frac{4}{3}$가 답이다.

〔 2016년 09월 평가원 수학(나형) 29번 〕

29. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

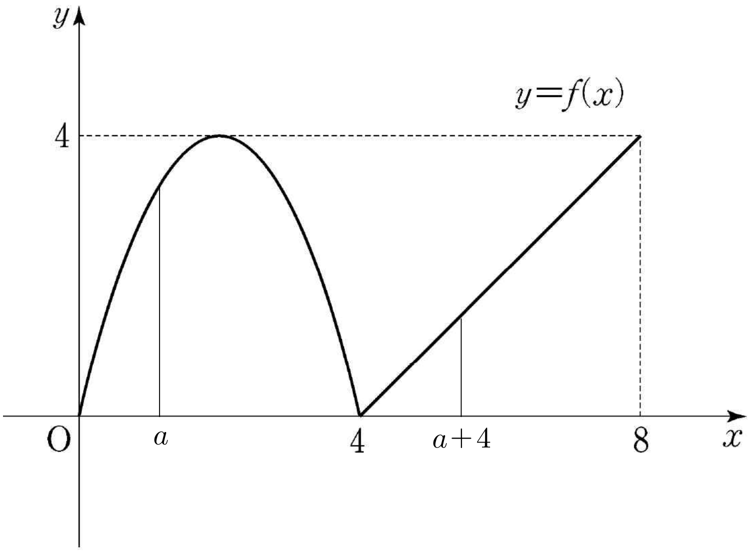
$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

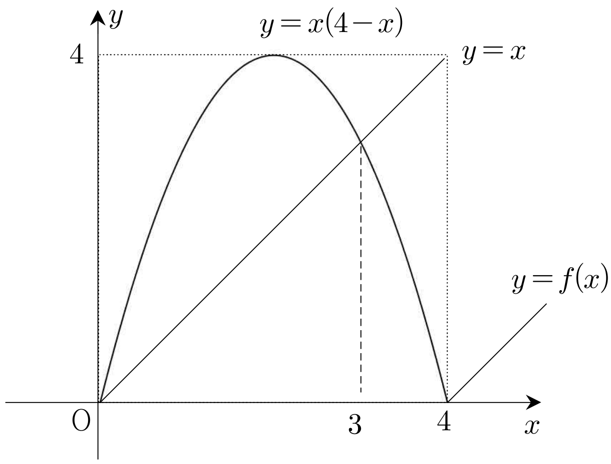


sol)

$\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의 기하적인 의미는, 주어진 $f(x)$의 그래프에서 구간 길이가 4가 되도록 정적분을 하라는 것이다. 그리고 그때의 구간은 $[a, a+4]$이다.



굳이 수식을 세워서 확인하지 않더라도 곧바로 확인하는 방법이 있는데,



이를 통해 $a=3$임을 알 수 있고, 그래서 $\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3^2 + \int_{3}^{4} x(4-x)dx = \frac{9}{2} + \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_3^4$$

$$= \frac{9}{2} + 2(16-9) - \frac{1}{3}(64-27) = \frac{9}{2} + 14 - \frac{37}{3} = \frac{9}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{37}{6}$$

왜냐하면 $\int_a^{a+4} f(x)dx$는 $y=x(4-x)$를 구간 $[a,4]$에서 정적분한 값과

$y=x-4$를 구간 $[4,a+4]$에서 정적분한 값의 합으로 생각할 수 있는데,

$y=x-4$를 구간 $[4,a+4]$에서 정적분하는 것은

$y=x$를 구간 $[0,a]$에서 정적분하는 것과 같기 때문이다.

하지만 이러한 직관을 떠올리지 못했더라도 풀 수 있다.

$\int_a^{a+4} f(x)dx=g(a)$라 하였을 때 적분을 구간별로 잘라보자.

a가 0이거나 4일 때에 구간을 조금 움직였을 때의 넓이가 더 작아지기 때문에

적어도 a가 0과 4사이의 값을 추론할 수 있다. 따라서

$$g(a)=\int_a^4 x(4-x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$

이고, 적분으로 정의된 함수 $g(a)$는 미적분학의 기본정리에 의해 미분이 가능하고

$$g'(a)=-a(4-a)+\{(a+4)-4\}=a^2-3a$$

로서 $g(a)$는 $a=0$에서 극대, $a=3$에서 극소를 갖는다는 것을 알 수 있다.

그리고 $g(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은

구간 끝값에서의 함숫값인 $g(0), g(4)$와 극솟값인 $g(3)$ 중에서

가장 작은 것으로 택하기 때문에, $g(3)$임을 알 수 있다.

그래서 이를 계산해보면 $g(3)=\dfrac{37}{6}$으로서 $p+q=43$이라는 답을 얻는다.

〔 2010년 11월 대수능 수리(가형) 17번 〕

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \leqq t \leqq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$

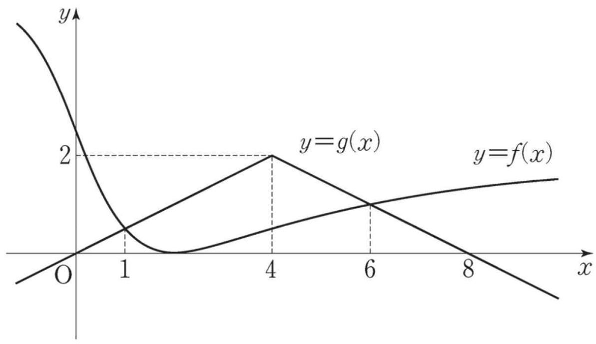
ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} v(t)\,dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

〔 2016년 06월 평가원 수학(가형) 20번 〕

20. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$ 의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

〔 2016년 09월 평가원 수학(나형) 30번 〕

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

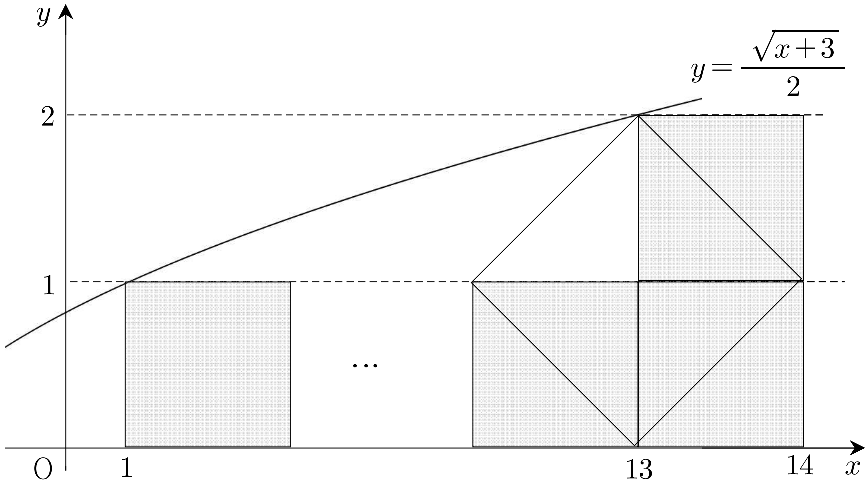
에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다. (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

sol)

출제자가 친히 '예를 들어' 준 부분을 확인하면서 문제 상황을 이해해보자.



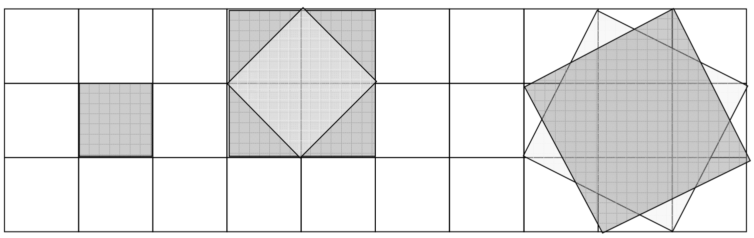
그러면 구간 $[1,14]$에서는 한 변의 길이가 1짜리인 정사각형이 $13+1=14$개가 있고, 곡선 $y=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$가 격자점 $(13,2)$를 지나는 $x=13$에 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형 1개도 존재함을 알 수 있다.

따라서 $f(14)=15$가 되는 것이다.

여기서 몇 가지 추론을 할 수 있는데,

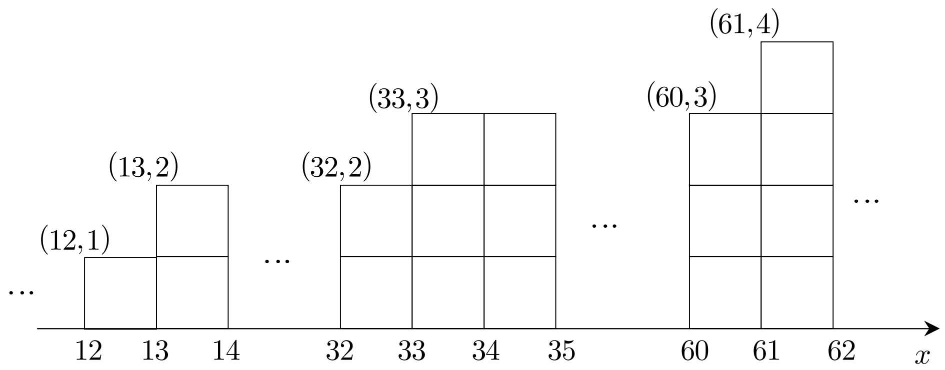
지금껏 이 비슷한 유형에서는 항상 한 변의 길이가 1인 정사각형들의 개수에 대해서만 물어보다가, 뜬금없이 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$이하인 정사각형들로 확장했다는 점이다.

가능한 정사각형들의 변의 길이는, 격자점들을 연결하여 만든 것이기 때문에 음이 아닌 정수 p,q에 대하여 $\sqrt{p^2+q^2}$과 같은 꼴로서 $\sqrt{5}$이하인 것은 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$의 네 가지 종류가 가능하다는 것이다.



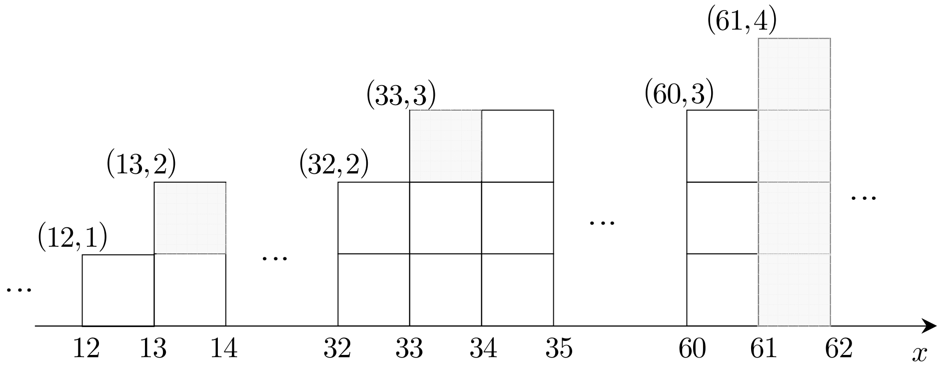
이때 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형은 한 변의 길이가 2인 정사각형에 포함될 수 있으므로 아마도 그 개수가 서로 비슷할 것이라 생각할 수 있고,
한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형에 대해서도 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수의 거의 두 배쯤 될 것이라 생각할 수 있다.

그리고 예를 든 부분에서 격자점의 y값이 1에서 2로 넘어가는 지점인 $x=13$ 부근에서 물어보았으므로, 가급적이면 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$가 정수가 되는 지점을 경계로 나누어서 생각해볼 수 있다. 만약 양의 정수 m에 대해 $m=\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$라 하면 $x=4m^2-3$에서마다 y값이 양의 정수 m이 될 것이다.
즉, $(4m^2-3, m)$을 염두에 두고 대략적인 한 변의 길이가 1인 정사각형들을 기준으로 나타내면 다음과 같다. 이것으로 주어진 곡선은 역할을 다했다.



구간 $[0,62]$에서 먼저 살펴보도록 하자.
하필 이 구간으로 잡는 까닭은 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형들까지 모두 등장하기 때문이다. 만약 n이 33이하였다면 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형을 언급한 이유가 없다. 그래서, 일단 구간 $[0,62]$에서 관찰해보고, 그때의 수치를 기준으로 구간을 더 늘이든지 줄이든지 하면 될 것이다.
또한 이는 '예를 들어'에서 출제자가 격자점의 y좌표가 증가하는 구간의 경계인 $x=4m^2-3$을 보여주었다는 것에서 힌트를 얻은 것이기도 하다.

그러면 한 변의 길이가 1인 정사각형은



정사각형의 중심의 좌표가 $\left(x+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$인 것으로 $1 \leq x \leq 61$에서 61개

정사각형의 중심의 좌표가 $\left(x+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$인 것으로 $13 \leq x \leq 61$에서 49개

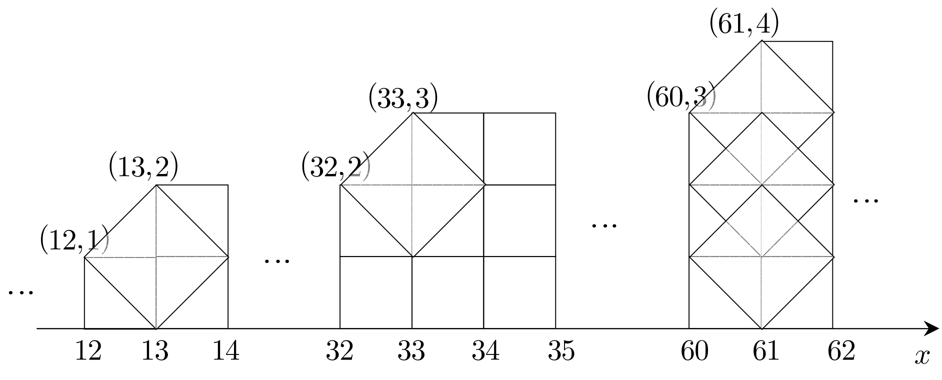
정사각형의 중심의 좌표가 $\left(x+\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$인 것으로 $33 \leq x \leq 61$에서 29개

정사각형의 중심의 좌표가 $\left(x+\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$인 것으로 $x=61$인 1개

총 $61+49+29+1=140$개가 존재한다.

그리고 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이,

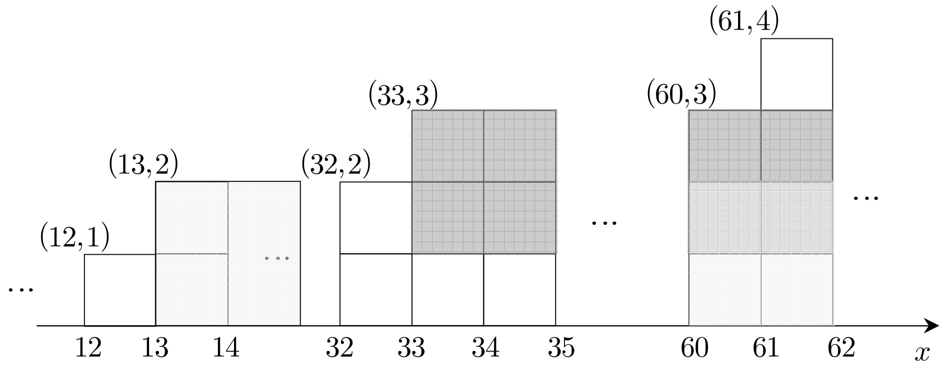
마찬가지로 그 대각선의 중심의 존재할 수 있는 격자점을 기준으로 생각해보면



$(61-13+1)+(61-33+1)+1=49+29+1=79$개가 존재함을 알 수 있다.

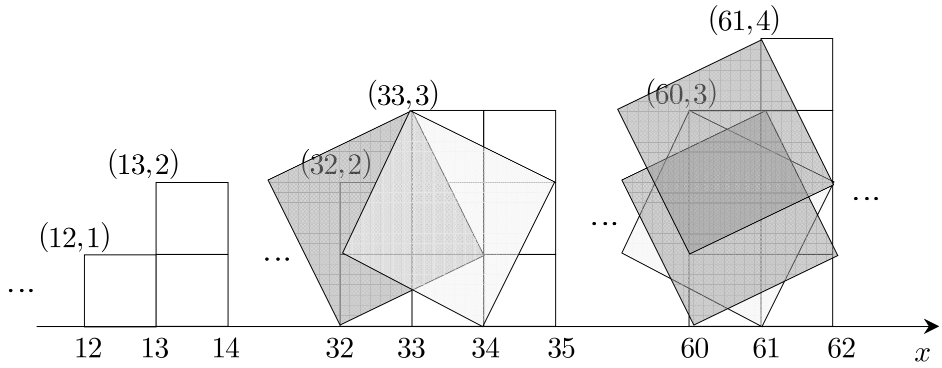
참고로 정수 n, m에 대하여 $n \leq x \leq m$을 만족하는 정수 x의 개수는 $m-n+1$이다.

또 한 변의 길이가 2인 정사각형은 대각선 중심의 y좌표가 $1, 2$일 때마다 x좌표가 취할 수 있는 범위로 생각해보면



$(61-14+1)+(61-34+1)=48+28=76$개 존재한다.

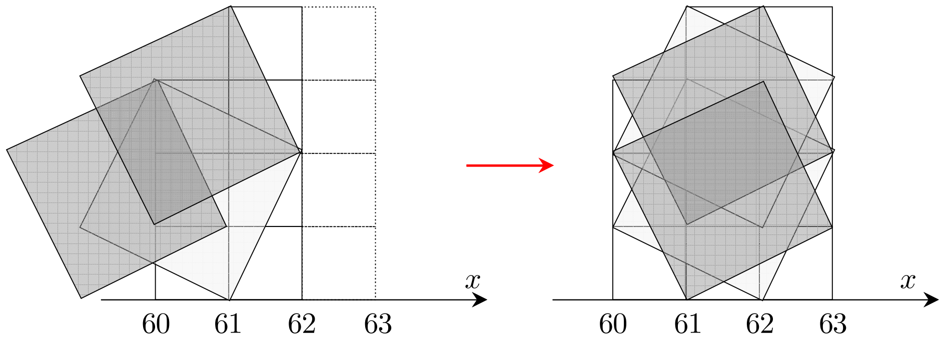
끝으로 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형은



$28+30=58$개 존재한다.

여기까지 종합하면 $140+79+76+58=353$이 되므로 n은 62보다는 조금 더 큰 자연수임을 알 수 있다.

그렇다면 n을 조금씩 키워가면서 정답에 다가 가보자.



이때 구간 $[0,62]$에서 구간 $[0,63]$으로, 길이가 1만큼 늘어날 때마다

한 변의 길이가 1인 것 4개

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 것 3개

한 변의 길이가 2인 것 3개

한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 것 4개

로서 총 14개씩 더 늘어남을 알 수 있다.

따라서 구간 $[0,62]$일 때 353개의 조건을 만족시키는 정사각형이 존재해서

$f(62)=353$이었다면, $f(63)=367$, $f(64)=381$, $f(65)=395$, $f(66)>400$으로서

자연수 n의 최댓값은 65가 된다.

※ 아니면 처음부터, $n=13$일 때까지는 한 변의 길이가 1인 정사각형만 생기다가

$n=14$부터 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이 같이 발생해서

$$f(13)=12,\ f(14)=12+(2+1)=15$$

$n=15$부터는 한 변의 길이가 2인 정사각형도 같이 발생해서

$$f(15)=15+(3+1)=19,\ f(16)=19+4=23,\ \cdots$$

이런 식으로 파악해도 된다.

그런데 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형이 두 종류가 있는데,

한 변의 길이가 1인 정사각형들의 모습을 보면 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의

개수가 항상 똑같이 존재하지 않음을 고려해서 조심히 카운팅 해야 할 것이다.

그래서 처음부터 이러한 미세한 상황이 언제 발생하는지 파악하는 수고를 덜고자

$n=62$라는 적당한 수를 눈치껏 잡아서 푼 것이다.