SPC (Special Problems for Champions)

문과 공개 문항 For 2017 (1st)

정답 및 해설

문과정답

1. ④ 2. 53

해설은 각자가 작업한 이후 통일 작업이전단계입니다.

궁금하신 점은 쪽지나 댓글로 문의바랍니다.

문과 1번 - 퓨에르

해설)

우선 함수 $g(x)$는 (일차함수)$\times$(이차함수) 이므로 삼차함수이다.

(가) 조건을 살펴보면 $g(x)$가 역함수를 갖는다.

$f_1(x), f_2(x)$가 최고차항의 계수가 1이기 때문에 $g(x)$는 **단조증가함수** 이다.

그런데, $f_1(x)$는 반드시 하나의 근 $x=\alpha$를 갖는다.
$f_2(x)$는 이차함수이므로 근을 2개 이하를 가질 수 있다. 그런데 $f_2(x)$가 근을 2개 $x=a, b$ 를 가지면 $g(x)=(x-\alpha)(x-a)(x-b)$ 이므로, 증가함수가 될 수 없다.

즉, $f_2(x)$는 중근을 갖거나 허근을 가져야한다.

(나) 조건을 보자.

$h(a)=\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{(x-\alpha)}$ 이다. ($\because f_1(x)=x-\alpha$)

★ 이를 잘 해석해야하는데, 여기서 $h(a)$란,
$\frac{f_2(x)}{(x-\alpha)}$의 함수가 아니고 해당함수의 극한값이다.
따라서 $\frac{f_2(x)}{(x-\alpha)}$자체가 연속인지를 보지말고
극한값이 존재하는지 보아야 한다. ★

이제 $f_2(x)$의 케이스를 분류해보자.

① $f_2(x)=(x-\beta)^2$
$h(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-\beta)^2}{(x-\alpha)}$인데, $a\neq\alpha \text{ or } \beta$ 일 때는 분수함수 꼴이기 때문에 연속하다. 그런데 $a=\alpha$에서 연속하려면 $\beta=\alpha$ 여야만 한다.

② $f_2(x)=x^2+px+q$ (단, $D<0$)
$h(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-\alpha}$이면, $a=\alpha$일 때 연속하지 않는다.

그러므로 $f_2(x)=(x-\alpha)^2$ 이고,
$f_2(2)=1=(2-\alpha)^2$ 이므로 $\alpha=1 \text{ or } 3$
$\therefore g(x)=(x-1)^3 \text{ or } (x-3)^3$
$g(5)$의 최솟값은 $g(x)=(x-3)^3$일 때, $g(5)=8$

문과 2번 - 초성민

유리함수 $y=-\dfrac{1}{x-m}+n$ 는 $y=-\dfrac{1}{x}$을

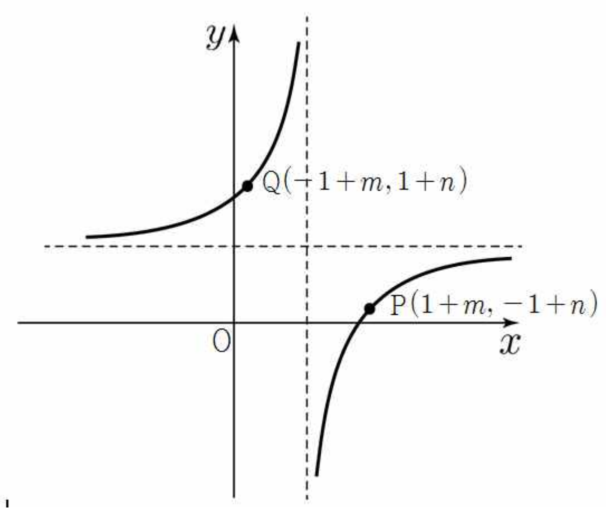
x축으로 m칸 y축으로 n칸 평행 이동한 함수이다.

그리고 두 점 P와 Q는 유리함수 위의 점인데

x좌표와 y좌표가 정수인 점은 오직 두 개다. $y=-\dfrac{1}{x}$이

항상 $(1,-1)$과 을$(-1,1)$ 지나므로 점 P와 Q는

$\mathrm{P}(1+m,-1+n)$, $\mathrm{Q}(-1+m,1+n)$ 가 된다.



그림과 같이 $y=-\dfrac{1}{x}$을 (m,n)만큼 평행이동한 그래프가 되는데,

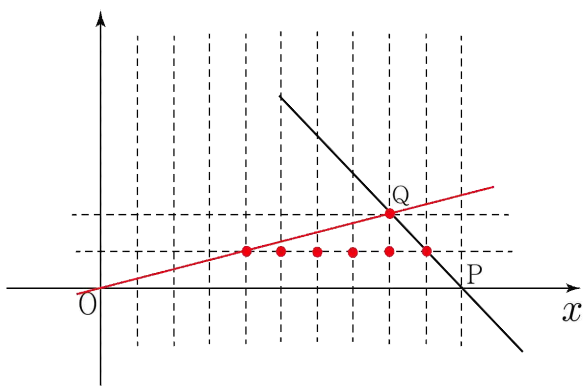
$m+n=10$이므로,

유리함수의 중심은 $x+y=10$위의 점들이다.

그리고 예를 들어 $f(1)=7$이므로 ,

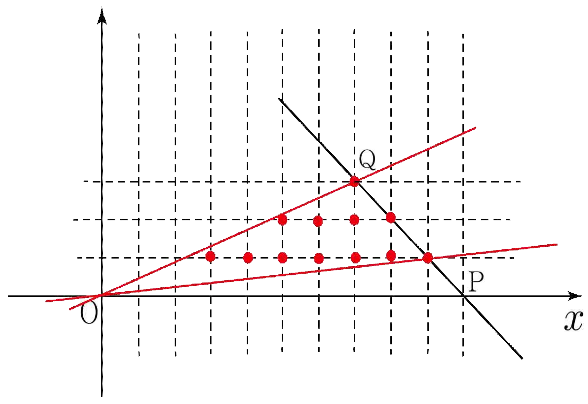
확인해보자

1) $n=1$일 때,



반드시 7개임을 확인하고 $n=2,3$등을 확인해보자

2) $n=2$일 때,

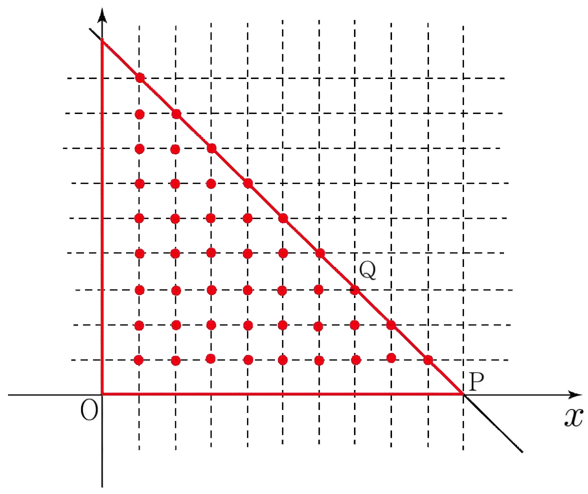


이런 식으로 찾아 올라갈 수 있는데,

사실 구하는 값을 보면

$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$이다

즉,



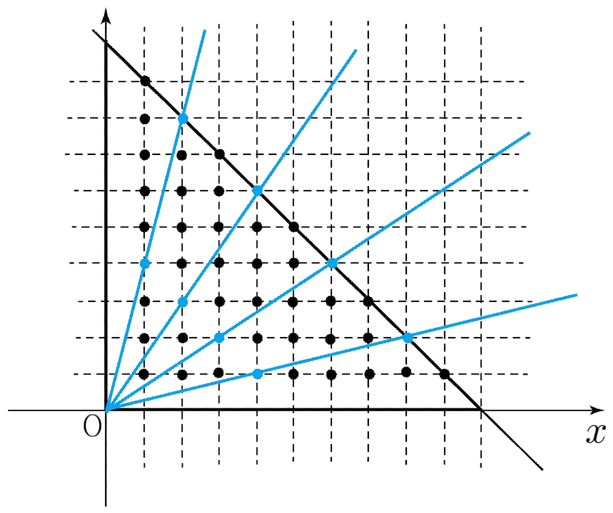
그림과 같이 삼각형 내부의 점들이다.

단,

$f(1)+f(3)$에서 나오는 두 삼각형은

모두 $y=\dfrac{1}{4}x$ 라는 직선을 공유하고 있다.

따라서 삼각형의 각 변들의 점들은 한번 씩 더 세주어야 한다.



아래와 같이

8개의 점들이 한번 더 추가되어서 최종적으로

$1+2+3+\cdots+9=45$

그리고 8개 추가되어서, 53개가 된다.